国家出版基金资助项目

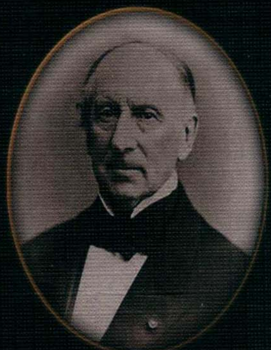
现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

CAUCHY INEQUALITY (I)

Cauchy不等式(上)

南秀全　编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Cauchy 不等式(上)

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编　王梓坤

CAUCHY INEQUALITY (I)

Cauchy不等式(上)

南秀全 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了柯西-许瓦兹不等式、柯西不等式的应用技巧、证明恒等式、解方程(组)或解不等式、证明不等式、证明条件不等式、求函数的极值、解几何问题、切比雪夫不等式及其应用等内容，而且在重要章节后面都有相应的习题解答或提示.

本书通俗易懂，内容紧凑，收录了大量的数学竞赛试题及其解答，适合广大数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Cauchy 不等式. 上/南秀全编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.7

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6696-8

Ⅰ. ①C…　Ⅱ. ①南…　Ⅲ. ①不等式　Ⅳ. ①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147280 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　牡丹江邮电印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 32　字数 454 千字
版　　次　2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6696-8
定　　价　98.00 元

⊙ 代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

◎ 前言

柯西(Cauchy,Augustin Louis 1789—1857),出生于巴黎,他的父亲路易·弗朗索瓦·柯西是法国波旁王朝的官员,在法国动荡的政治漩涡中一直担任公职.由于家庭的原因,柯西本人属于拥护波旁王朝的正统派,是一位虔诚的天主教徒.并且在数学领域,有很高的建树和造诣.

柯西的创造力惊人,在柯西的一生中,发表论文 789 篇,出版专著 7 本,全集共有十四开本 24 卷.从他 23 岁写出第一篇论文到 68 岁逝世的 45 年中,平均每月发表一至两篇论文.1849 年,仅在法国科学院 8 月至 12 月的 9 次会上,他就提交了 24 篇短文和 15 篇研究报告.他的文章朴实无华、充满新意.柯西 27 岁即当选为法国科学院院士,还是英国皇家学会会员和许多国家的科学院院士.

柯西对数学的最大贡献是在微积分中引进了清晰和严格的表述与证明方法.正如著名数学家冯·诺伊曼所说:“严密性的统治地位基本上是由柯西重新建立起来的.”在这方面他写下了三部专著:《分析教程》(1821 年)

《无穷小计算教程》(1823 年)《微分计算教程》(1826～1828 年). 他的这些著作，摆脱了微积分单纯的对几何、运动的直观理解和物理解释，引入了严格的分析上的叙述和论证，从而形成了微积分的现代体系. 在数学分析中，可以说柯西比任何人的贡献都大，微积分的现代概念就是柯西建立起来的. 因此，人们通常将柯西看作是近代微积分学的奠基者.

柯西的另一个重要贡献，是发展了复变函数的理论，取得了一系列重大成果. 特别是他在 1814 年关于复数极限的定积分的论文，开始了他作为单复变量函数理论的创立者和发展者的伟大业绩. 他还给出了复变函数的几何概念，证明了在复数范围内幂级数具有收敛圆，还给出了含有复积分限的积分概念以及残数理论等.

柯西还是探讨微分方程解的存在性问题的第一个数学家，他证明了微分方程在不包含奇点的区域内存在着满足给定条件的解，从而使微分方程的理论深化了. 在研究微分方程的解法时，他成功地提出了特征带方法并发展了强函数方法.

柯西在代数学、几何学、数论等各个数学领域也都有建树. 例如，他是置换群理论的一位杰出先驱者，他对置换理论做了系统的研究，并由此产生了有限群的表示理论. 他还深入研究了行列式的理论，并得到了有名的宾内特(Binet)-柯西公式. 他总结了多面体的理论，证明了费马关于多角数的定理等.

柯西对物理学、力学和天文学都做过深入的研究. 特别在固体力学方面，奠定了弹性理论的基础，在这门学科中以他的姓氏命名的定理和定律就有 16 个之多，

仅凭这项成就，就足以使他跻身于杰出的科学家之列.

柯西的一生对科学事业做出了卓越的贡献，但也出现过失误，特别是他作为科学院的院士、数学权威，在对待两位当时尚未成名的数学新秀阿贝尔（Abel）、伽罗瓦（Galois）都未给予应有的热情与关注，对阿贝尔关于椭圆函数论的一篇开创性论文，对伽罗瓦关于群论的一篇开创性论文，不仅未及时做出评论，而且还将他们送审的论文遗失了，这两件事常受到后世评论者的批评.

很多的数学定理和公式也都以他的名字来命名，以他的姓名命名的有：柯西积分、柯西公式、柯西不等式、柯西定理、柯西函数、柯西矩阵、柯西分布、柯西变换、柯西准则、柯西算子、柯西序列、柯西系统、柯西主值、柯西条件、柯西形式、柯西问题、柯西数据……，而其中以他的姓名命名的定理、公式、方程、准则等有多种.

在本套书中，我们重点来研究柯西不等式. 我们知道，不等式是数学中的重要内容之一，也是解决数学问题的一种重要的思想方法. 而柯西不等式又是不等式的理论基础和基石，它的应用十分广泛，特别是国内外各级各类的数学竞赛试题中，许多有关不等式的问题，若能适当地利用柯西不等式来求解，可以使问题获得相当简便的解法.

在本套书中，我们通过大量经典的各级各类数学问题，介绍了应用柯西不等式解题的一些常用方法与技巧，以及利用柯西不等式及其重要的变形解等式、方程、不等式、极值、几何问题等方面的应用，并对部分试题做了一般性的推广. 通过书中问题的解答，可以发现

在一个问题的众多解法中，利用柯西不等式来解，其方法往往是比较简捷的. 因此，正确地理解和常握柯西不等式的结构特征和一些巧妙的变形及它的一些应用技巧，是应用柯西不等式解题的关键.

排序不等式是许多重要不等式的来源，如算术-几何平均不等式、算术-调和平均不等式、柯西不等式、切比雪夫不等式等著名不等式都是它的直接推论，可以说排序不等式是一个“母不等式”，而且它本身也是解很多数学问题，特别是一些难度较大、技巧性较强的数学竞赛问题的一个有力工具. 因此，在本套书的第14～16章中，详细介绍了排序不等式及其变形、排序思想的应用.

在本套书的第 17 章中，还介绍了另一个著名的不等式——切比雪夫不等式在解数学问题中的应用.

本书内容全面，知识点丰富，是在柯西不等式研究领域一大重要突破，本套书的出版必会成为广大数学爱好者的心仪之作，同时可作为参考书使用.

由于本人水平有限，书中一定会存在许多不足之处，诚请广大读者批评指正.

目录

第1章 柯西-许瓦兹不等式

在很多数学教材或参考书中，都有这样一道题.

证明

$$ac+bd\leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \quad (1.1)$$

这道题用比较法是很容易证明的.

事实上，当 $ac+bd<0$ 时，结论显然成立.

当 $ac+bd\geqslant 0$ 时，由于

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=\\&a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2-\\&(a^2c^2+b^2d^2+2abcd)=\\&(ad)^2+(bc)^2-2abcd=\\&(ad-bc)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

所以，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$. 由不等式的性质，两边开平方即得所证.

式(1.1)还可以用比值法来证明.

当 $a=b=0$(或 $c=d=0$)时，显然成立.

假设 $a^2+b^2\neq 0$ 且 $c^2+d^2\neq 0$，则

$$\begin{aligned}&\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\leqslant\\&\frac{|ac|+|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}=\\&\frac{|ac|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}=\\&\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{c^2}{c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{d^2}{c^2+d^2}}\leqslant\\&\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{d^2}{c^2+d^2}\right)=1\end{aligned}$$

故

$$ac+bd\leqslant|ac+bd|\leqslant|ac|+|bd|\leqslant\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}$$

式(1.1)就是著名的柯西-许瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式的一个简单特例.

柯西-许瓦兹不等式的一般形式为:

对任意的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\tag{1.2}$$

或

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\tag{1.3}$$

其中等号当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立(当 $b_k=0$ 时,认为 $a_k=0,1\leqslant k<n$).

下面介绍柯西-许瓦兹不等式的几种证法.

证法一 (求差-配方法)因为

$$\text{不等式(1.2)的右边}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2)$$

$$\text{不等式(1.2)的左边}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+2\sum_{i\neq j}a_ib_ia_jb_j$$

所以,不等式右边 − 不等式左边 $=\sum_{i\neq j}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0$.

故不等式右边≥不等式左边,其中等号当且仅当 $a_ib_j=a_jb_i(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$时成立.

因为

$$b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$$

所以

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

证法二 (比值法)当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$(或 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$)时显然成立;当$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0$ 且$\sum_{i=1}^{n}b_i^2\neq 0$ 时,则