



伯努利 教你学概率分布

[韩]金承泰 著 姜子莲 译

考点精讲，高分必备！

- ★ 概率分布表
- ★ 期望值
- ★ 方差和标准差
- ★ 二项分布

掌握应用，攻克难点
★ 数学 ★
就得这样学！

全国百佳图书出版单位
时代出版传媒股份有限公司
黄山书社



伯努利 教你学概率分布

[韩] 金承泰 著 姜子莲 译

考点精讲，高分必备！

- ★ 概率分布表
- ★ 期望值
- ★ 方差和标准差
- ★ 二项分布

掌握应用，攻克难点
★ 数学 ★
就得这样学！

全国百佳图书出版单位
时代出版传媒股份有限公司
黄山书社

수학자가 들려주는 수학 이야기

Copyright © 2010 by JAEUM & MOEUM CO., LTD.

Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Huangshan Publishing House.

This translation was published by arrangement with Jaenum & Moeum Publishing Co., through Shanghai

All One Culture Diffusion Co., Ltd.

All rights reserved.

图书在版编目 (CIP) 数据

伯努利教你学概率分布 / 【韩】金承泰著; 姜子莲译. — 合肥: 黄山书社, 2015. 12

(数学家教你学数学: 中学版)

ISBN 978-7-5461-5119-9

I. ①伯… II. ①金… ②姜… III. ①数学—青少年读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 175871 号

版权合同登记号 图字: 12151528

BONULI JIAO NI XUE GAILU FENBU

伯努利教你学概率分布

【韩】金承泰 著 姜子莲 译

出品人 任耕耘

总策划 任耕耘 杨雯

执行策划 司雯

责任编辑 程景

特约编辑 郝敏 李晓阳

装帧设计 齐娜 李斐斐

出版发行 时代出版传媒股份有限公司 (<http://www.press-mart.com>)

黄山书社 (<http://www.hspress.cn>)

地址邮编 安徽省合肥市蜀山区翡翠路 1118 号出版传媒广场 7 层 230071

印刷 安徽国文彩印有限公司

版次 2016 年 3 月第 1 版

印次 2016 年 3 月第 1 次印刷

开本 710mm×1000mm 1/16

字数 80 千

印张 8.5

书号 ISBN 978-7-5461-5119-9

定价 24.00 元

服务热线 0551-63533706

销售热线 0551-63533761

官方直营书店 (<http://hssbook.taobao.com>)

版权所有 侵权必究

凡本社图书出现印装质量问题,
请与印制科联系。

联系电话 0551-63533725



推荐语

让我们站在数学巨人的肩膀上， 以更远的目光、更广的视野去观察数学世界吧！

数学教科书往往以“结果”来揭示数学，很难使学生了解数学不断进化的过程。事实上，数学的历史是围绕着一个课题，由众多数学家刻苦研究从而揭示一个个规律性原理的演绎推理过程。

《数学家教你学数学》是古今中外的数学家以他们那亲切的声音直接给我们讲述各种数学原理的产生过程，有助于学生以“现在进行时”来理解数学，而不是以“过去完成时”来理解。

学生对数学产生畏难情绪的主要原因之一是数学较强的“抽象思维”。数学的这一特性恰恰与学生喜欢的“具体思维”相悖。要想缩短“抽象思维”和“具体思维”之间的差距，方法只有一个，那就是在尽量回避数学抽象推理的同时，尽可能地增加对数学概念和原理的具体说明。而《数学家教你学数学》正是生动再现数学教科书的内容，力争使数学“变脸”，将原来抽象的数学改头换面成为具体的数学。此外，书中引用的大量名人逸事和数学家的趣闻，使学生感到枯燥无味的数学很容易变成妙趣横生、回味无穷的数字

游戏。

从结构上看，《数学家教你学数学》首先简要介绍数学家的业绩，然后通过数学家的讲解揭示数学的内在世界和外在世界，从列举的大量例子中说明数学概念和原理，最后再通过一个小结来归纳每节课讲的内容。本丛书的这种结构可以使读者从整体上了解每个数学概念和原理。

《数学家教你学数学》紧扣中学数学教程，尽可能包含中学数学所涉及的全部内容。比如《莱布尼茨教你学记数法》讲述的是数字形成的背景、原始进制法到数位进制法的发展过程、0的出现、莱布尼茨二进制法等方面的故事，如实反映了中学一年级进制法的内容。可见这套《数学家教你学数学》丛书能够起到帮助学生消化和吸收学校数学课程的作用。

伟大的科学家牛顿留下了一句绝世名言：“If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.（如果说我比别人看得更远些，那是因为我站在了巨人的肩膀上）”没错，如果我们也站在这些数学巨人的肩膀上放眼远眺，就可以用更长远、更开阔的视野去了解数学世界。希望这套丛书能使我们的读者们都有机会站在数学巨人的肩膀上，把数学世界看得更清楚。

弘益大学数学教育系教授、《数学协奏曲》作者 朴京美



用数学眼光看穿世上的真理， 让我们亲身体会真理之伟大的“概率分布”的故事

数学家们对这个世界作出了巨大贡献，他们通过数学为人类造福，但这种话千万别对学生们说，他们可不觉得数学家是什么了不起的人物。

相反，很多学生都非常讨厌数学，更不会喜欢数学家了，所以无论什么时候，为人类进步作出过贡献的数学家们对学生来说都是“罪人”。我在教数学的时候最常听到的问题就是“究竟是哪个数学家创造了这么难学的数学啊？！”每当听到这个问题的时候，我就会先推脱说：“不是我！再说了，数学也不是一两个人创造出来的，而是无数数学家共同努力的结果。”

实际上，数学家们完全是根据时代所需而创造的数学。现在同学们学习的数学知识是几代数学家研究成果的汇总。让学生们从小学学习那么多数学家的研究成果，好像的确是有些不近人情。这就好比让一个人背诵自己家的族谱一样，都是非常困难的事情。学生们不仅要学习这么多数学知识，而且还要用它们来应对考试，真是一

件十分烦恼的事情啊，也难怪学生们会怨声载道了。

所以，我决定给这些被看作是“罪人”的数学家们一个恢复名誉的机会。那就是让数学家们亲自给学生讲解自己研究发现的数学知识和理论，让学生们体会到数学与生活之间的密切联系，感受到学习数学的乐趣。

总而言之，我衷心希望大家能愉快地阅读本书，并与数学“亲近”起来。但愿通过这本书，同学们能和数学家们“言归于好”。

金承泰



课 程 导 航

1

这本书的不同之处

伯努利家族是瑞士一个连续出了三位著名数学家的名门望族。这三位数学家分别是雅各布和约翰兄弟，以及约翰的儿子丹尼尔。他们都出生在瑞士巴塞尔。《伯努利教你学概率分布》这本书中的主人公伯努利是指雅科布·伯努利，他是一位在巴塞尔大学研究概率论、解析几何学和变分法的数学家。

伯努利将用简洁生动的语言和有趣的生活实例为同学们讲述原本枯燥的概率分布知识。相信读完本书，大家对概率分布将会形成全新的认识。

2

这本书的几个亮点

1. 全面包含了高中数学的内容。采用对话方式并以有趣的故事为例，使读者轻松理解知识难点。

2. 由数学家伯努利亲自出场，讲述有趣的概率分布。数学家像家教一样，把课本中的数学知识一对一地讲给读者听。

3. 本书采用了较为简单的表达方式，即使是低年级的学生也能轻松理解。



第一课 概率和函数

探讨概率和函数之间的关系，了解变量是如何取值的。

• 提前预习：

随机变量：在某个试验中，与样本空间内的各基本事件相对应的数就是随机变量。

变量：可以取变化数值的量。

统计学：根据统计结果来观察和研究社会现象的学科，属于数学的一个领域。分为数理统计学和推测统计学。

函数：有两个变量 x ， y ，当 y 的值由 x 在一定范围内的取值来决定时， y 即为相对于 x 的函数，表示为 $y=f(x)$ 。

• 学习方法：

可以将“随机变量”的概念与“函数”联系起来进行思考。

随机变量可以看作是以样本空间为定义域，全体实数的集合为值域的函数。

某个变量 X 可以取的值为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，变量 X 取这些值的概率分别为 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 时，这个变量 X 就叫作随机变量。随机变量决定了变量可取的数值，以及变量取各个值的概率。

第二课 概率分布表

了解概率分布，学习概率分布表，详细了解离散型随机变量。

• 提前预习：

概率分布：随机变量的分布状况。使某个试验中每一个发生的事件都与它的概率值相对应。

频率分布：将测定值分为几个等级，统计属于各等级的数值出现的频率，再将其表示出来的一种统计方法。

Σ （西格玛）：希腊字母中的第18个字母，是一个表示总和的符号，读作西格玛。

• 学习方法：

随机变量 X 可取值 x_i 与 X 取 x_i 的概率 p_i 之间的对应关系叫作随机变量 X 的概率分布。

一般来说，一个试验中的离散型随机变量 X 可取的值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 与 X 取这些值的概率 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 之间的对应关系，叫作离散型随机变量 X 的概率分布。

概率的总和等于1。

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1 \quad (p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

在频率分布中，频数 f_k 除以总频数 N 得到的数值叫作相对频数。相对频数 $\frac{f_k}{N}$ 等于变量 X 取相应值的概率 $P(X=x_k)$ 。

当离散型随机变量 X 的概率是 $P(X=x_i) = p_i (i = 1, 2, 3, \dots,$

n) 时,

$$\textcircled{1} 0 \leq p_i \leq 1$$

事件无发生可能性时为0, 总是发生时为1。

$$\textcircled{2} p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

所有概率相加就成为一个整体, 所以概率之和为1。

$$\textcircled{3} P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b P(X=x) \quad (a, b \text{ 是小于等于 } n \text{ 的自然数})$$

第三课 期望值

了解平均值和期望值的关系, 并且了解相对频数。

• 提前预习:

平均值: 一组数据中所有数据之和除以这组数据的个数。包括算术平均值、几何平均值、调和平均值等, 一般是指算术平均值。

期望值: 在一个离散型随机变量试验中, 期望值等于某一事件发生时能得到的结果乘以该事件发生的概率的总和。

• 学习方法:

相对频数 $\frac{f_i}{N}$ 与 X 取 x_i 的概率相等。

$$P(X=x_i) = \frac{f_i}{N}$$

$$\text{相对频数} = \frac{\text{各级的频数}}{\text{频数总和}}$$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_i p_i + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$E(X)$ 的 E 是 Expectation (期望值) 的第一个字母, m 是 mean

(平均值)的第一个字母。

第四课 概率和统计的故事

通过了解概率和统计故事，提高学习兴趣。

- 提前预习：

利率：相对于本金的利息比率。

方程式：只有当字母取特定的数值时才能成立的等式。

统计学：根据统计结果来观察和研究社会现象的学科，属于数学的一个领域，包括数理统计学和推测统计学。

样本资料：与通过抽取而获得的数据有关的某个参数的推测值。作为反映统计样本的数字，包括平均值、方差等。

DNA：基因的实质。它是一种含有脱氧核糖的核酸，存在于一部分病菌及所有生命的体细胞中，主要存在于真核生物的细胞核中。含有腺嘌呤、鸟嘌呤、胞嘧啶、胸腺嘧啶4种碱基，在它们的排列顺序中包含了遗传基因。

- 学习方法：

不知从何时起，现代人开始变得非常相信统计结果。不仅是人口变化，就连像道德、犯罪这种无秩序性的社会现象也开始被赋予了统计学上的规律性意义。

在统计学研究中，用图表表示统计结果比用文字更加简洁、直

观。但如果没有充足的统计学知识做铺垫,简单的图表也不是那么容易看懂的。

第五课 如何求随机变量的方差和标准差

求随机变量的方差和标准差,并了解平均值、方差和标准差的性质。

• 提前预习:

方差:各个数据分别与其平均数之差的平方的和的平均数。方差小时,数据就会围绕在平均值周围;方差大时,数据就会远离平均值。

标准差:表示数据方差程度的数值,它是方差的算术平方根。标准差小表示平均值周围的方差程度小。

• 学习方法:

当随机变量 X 的平均值 $E(X)=m$ 时, $(X-m)^2$ 的平均值,也就是 $E[(X-m)^2]=\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2 p_i$

$$= (x_1-m)^2 p_1 + (x_2-m)^2 p_2 + \cdots + (x_n-m)^2 p_n, \text{ 叫}$$

作随机变量 X 的方差 $V(X)$ 。另外,方差 $V(X)$ 的算术平方根 $\sqrt{V(X)}$ 叫作随机变量 X 的标准差,表示为 $\sigma(X)$ 或 σ 。

$$V(X) = E[(X-m)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = m = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$V(X) = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^n [(aX_i+b) - (am+b)]^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n [a(X_i-m)]^2 p_i \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n (X_i-m)^2 p_i \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

$$\sigma(aX+b) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a| \sqrt{V(X)} = |a| \sigma(X)$$

第六课 二项分布和独立重复试验

了解独立重复试验、组合、二项式定理和二项分布。

• 提前预习:

独立重复试验: 就像重复投掷骰子一样, 每个试验之间没有任何从属关系, 各事件发生的概率在任何试验中都是相同的。

二项分布: 通过试验结果仅有两种可能的独立重复试验获得的概率分布情况。

组合: 在不考虑顺序的情况下, 从 n 个互异元素中任取 r ($r \leq n$) 个组成一组。

二项式定理: 两数之和的整数次幂可以用组合展开为类似项之和的恒等式。

• 学习方法:

当重复进行某一试验时, 如果各试验结果之间互不干扰, 则该

试验叫作独立重复试验。

组合是指一种不考虑顺序而进行选取的方法。一般来说，从不同的 n 个元素中抽取 r 个元素，叫作从 n 个不同元素中选择 r 个元素的组合。这时，可能的组合数用下面的符号来表示。

$$C_n^r$$

一般来说，当1次试验中事件 A 发生的概率为 p ，不发生的概率为 q ($q=1-p$) 时，在 n 次独立重复试验中，设事件 A 发生的次数为 X ，则 X 是可取 $0, 1, 2, \dots, n$ 中任意一值的随机变量。

根据二项式定理可知，概率分布图中的概率之和与 $(p+q)^n$ 的展开式相等。

$$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^n q^0$$

第七课 二项分布的平均值和标准差

求二项分布中的平均值、方差和标准差。

• 提前预习：

完全平方式：对于一个整式 A ，如果存在另一个实系数整式 B ，使 $A=B^2$ ，则 A 就是完全平方式。简而言之，完全平方式就是某个整式的平方公式。

因式分解：把一个多项式化成几个最简整式的积的形式，这种变形叫作把这个多项式因式分解。也可以这样理解：因式分解就是

将整式分解成几个简单的因式相乘的形式。

• 学习方法:

当随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ 时,

平均值 $E(X) = np$

方差 $V(X) = npq$

标准差 $\sigma(X) = \sqrt{npq} \ (q=1-p)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np (p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

第八课 二项分布的图和性质

观察二项分布图, 了解其性质。

• 提前预习:

大数定律: 当重复进行某试验时, 某一事件发生的比率会逐渐趋向于一个确定的值, 这一规律或理论就叫作大数定律。例如连续掷多次骰子时, 掷出点数6的比率逐渐接近于 $\frac{1}{6}$ 。

• 学习方法:

当随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ 时,

平均数值 $E(X) = np$

方差 $V(X) = npq$

标准差 $\sigma(X) = \sqrt{npq} \ (q=1-p)$