21世纪高等学校计算机规划教材

COMPUTER

数字电路与逻辑设计

Digital Circuit and Logic Design

解本巨 马浩 主编

- 遵循逻辑推理原则，知识点分解详细易懂
- 将电路设计作为逻辑实现过程，条理性强
- 分析过程详尽，设计实例丰富多样

高校系列

中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等学校计算机规划教材

COMPUTER

数字电路与逻辑设计

Digital Circuit and Logic Design

解本巨 马浩 主编

高校系列

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

数字电路与逻辑设计 / 解本巨，马浩主编. — 北京：人民邮电出版社，2017.8
21世纪高等学校计算机规划教材. 高校系列
ISBN 978-7-115-45289-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①解… ②马… Ⅲ. ①数字电路－逻辑设计－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN79

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第062798号

内容提要

本书共 7 章，主要内容包括逻辑学基础、电路的逻辑表示与逻辑门、组合逻辑电路、时序逻辑电路、存储器与 FPGA（可编程逻辑阵列）、接口技术等内容。在传统的数字电路分析与设计的基础上，本书增加了逻辑问题的抽象与数据表示、数字电路研究逻辑化、时序电路时间的具体实现、触发器设计、时序电路相关概念的提出、接口设计、电路扩展逻辑设计等新的内容，为数字逻辑电路的逻辑性学习和研发过程提供了更高层次的平台。

本书可作为高等院校计算机、软件工程、自动化、电子、通信、机电等专业的教材，也可作为技术开发人员的参考资料。

◆ 主　　编　解本巨　马　浩
责任编辑　张　斌
责任印制　陈　犇

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市中晟雅豪印务有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：20.25　2017 年 8 月第 1 版
字数：460 千字　2017 年 8 月河北第 1 次印刷

定价：54.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

前　　言

当今世界已进入信息高速发展的时代，随着大规模集成技术的快速发展，逻辑门元件日趋智能化、生物化。它们被集成为数字系统，广泛应用于生物、化工、经济、生产、家庭等各个领域。以数字电路技术为基础的数字系统，最典型的应用是计算机系统。它以 CPU 微处理器、NiosII 微处理器为核心，辅以大容量存储器，通过移动网络、以太网、Wi-Fi、蓝牙等外部信息设备，与外部交换信息。随着智能手机、机器人等智能产品的大量出现，意味着智能信息化时代的到来，这是一场新形式的工业革命。

现代电子产品在性能提高、复杂度增大的同时，价格却一直呈下降趋势，而且产品更新换代的步伐也越来越快，实现这种进步的主要因素是生产制造技术和电子设计技术的发展。前者以微细加工技术为代表，目前已进展到深亚微米阶段，可以在几平方厘米的芯片上集成数千万个晶体管。后者的核心就是 EDA 技术，EDA 是指以计算机为工作平台，融合应用电子技术、计算机技术、智能化技术最新成果而研制成的电子 CAD 通用软件包，主要能辅助进行三方面的设计工作：IC 设计、电子电路设计、PCB 设计。没有 EDA 技术的支持，想要完成上述超大规模集成电路的设计制造是不可想象的；反过来，生产制造技术的不断进步又必将对 EDA 技术提出新的要求。

综上所述，针对计算机相关专业，“数字电路与逻辑设计”课程在大学教学中具有极其重要的地位和作用。它以逻辑学为基础，通过逻辑抽象实现了数字电路研究内容的逻辑假设，包括逻辑变量和逻辑关系，并将电路的分析与设计转换为逻辑代数的表示过程。本课程以组合逻辑电路和时序逻辑电路分析、设计为主要学习目标，在传统教材的基础上，将逻辑学作为研究数字电路的主要依据，并为课程增加了数字电路的逻辑研究实现、时序电路的时间实现、触发器设计实现、接口电路的设计实现、电路扩展的逻辑实现等新的内容，使课程的学习更具逻辑化。

本书共分为 7 章，第 1 章“逻辑学基础”提出了具体过程和事物的逻辑抽象问题，并假定了逻辑问题的表示方法。利用逻辑常量“0”“1”去表达数据、条件及结果，引出逻辑代数这一门应用数学，全面讲述了逻辑代数的基本知识、表示方法、逻辑定律及规则、公式法化简、卡诺图化简等内容。第 2 章“电路逻辑表示与逻辑门”讲述了逻辑图与实际电路之间相互转换的方法、基本电路的设计实现、逻辑门组成及工作原理等内容。在技术层面上，本章讲述了数字电路的概念及电路的逻辑设计方法，为嵌入式设计提供了一定的技术手段。第 3 章“组合逻辑电路”主要讲解了组合电路的分析与设计方法，组合电路中存

在的竞争与冒险，常用组合逻辑器件及应用。本章用逻辑抽象的方法实现了电路的设计与电路的扩展。第 4 章“时钟脉冲与触发器”讲述了脉冲的定义及如何利用脉冲使时间具象化，系统脉冲发生电路的设计实现，触发器的设计实现、工作原理及表示方法，脉冲波形的整形与输出。第 5 章“时序逻辑电路”主要讲述了时序逻辑电路的表示方法，同步时序电路分析与设计，异步时序电路分析与设计，常用时序电路元件计数器与寄存器的设计与应用。前面 5 章是电子技术设计的基础，必须能够达到熟练设计的要求，要认真分析每一个电路的设计过程，抽象或例化出芯片的引脚定义与内部行为及状态转换，把自己培养为一个真正的电子设计者。第 6 章“半导体存储器与大规模可编程逻辑器件”讲述了半导体存储的分类、RAM、ROM 构造原理与容量扩展，PLD 设计技术。第 7 章“接口电路设计技术”主要讲解了接口电路的设计思想和简单设计实例，介绍了两个接口电路 A/D 和 D/A 转换器的组成原理和应用。

本书第 1 章由唐松生编写；第 2 章由刘明华编写；第 3 章由江守寰编写；第 4 章由张春玲编写；第 5 章由庞志永编写；第 6 章由马浩编写；第 7 章由解本巨编写；王豫凌、周丽艳负责全书统稿。

由于编者的实际工作经验限制，本书还存在一些不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2017 年 3 月

目 录

第1章 逻辑学基础

数字逻辑电路是电子设计技术（EDA），特别是计算机硬件技术的理论基础课程，在信息科学体系的研究中具有极其重要的地位。数字电路与逻辑设计是指所研究的电路只有高低两种电平，可用数字0、1一一对应表示，而后用数字0、1表示逻辑条件和结果，用逻辑分析的形式去设计和表达电路。把数字0、1设为逻辑条件满足与否、逻辑结果成立与否的取值，设定逻辑变量，根据逻辑关系可以得到输入逻辑条件变量和输出逻辑结果变量之间的逻辑表达式。这是一种新的数学方式的研究体系，称为逻辑学，数字电路的研究则可转换为逻辑学或者是逻辑代数的研究。

1.1 逻辑的抽象与表示

本书提到的“0”“1”不是数值型数据，是表示两种对立状态的数字。

如果某电路中只有两种稳定的电压：高电平和低电平，在研究时可用数字0、1与之一一对应表示。从而将对电平的研究转化为对数字0、1的研究，将对电路内部规律的研究转换为由数字延展的数学规律的研究，这种电路称为数字电路。在数字电路中只存在高电平和低电平两种对立的、相反的电平状态，表示它们的0、1两个数值并不代表具体的数值大小，而是相反的、对立的两种条件或状态。

对于逻辑分析过程，一般要根据多个条件的满足与否，决定结果的成立与否，每个条件具有“满足”和“不满足”两种取值，结果具有“成立”和“不成立”两种取值，条件与结果都具有二值性，所以条件和结果都可以用0、1两个数字进行表示。

无论是电路中的0、1，还是逻辑分析过程中的0、1，都是某个过程中对立且仅有的两个逻辑常量，也就是说常量具有二值性，而且是相反的两种条件或状态。这种常量存在于逻辑问题的抽象过程中。0、1是逻辑学的两个常量，也是全部常量。

我们可以通过对逻辑学的研究，寻找一定的逻辑规律，同时研究数字电路与逻辑学的关系，研究是否可以用逻辑学的规律去实现数字电路的分析与设计。

1.1.1 逻辑的抽象

世界上的所有事物与过程都存在着一定的矛盾，矛盾是永恒存在和对立的。我们针对对

象和过程寻找矛盾产生的条件，也可根据矛盾存在的原因推理矛盾可能存在的结果，这个过程称为逻辑推理过程，也是逻辑问题具体抽象的过程，即把研究对象和事件过程分解为逻辑条件、逻辑结果及条件和结果间的逻辑关系（原因）的抽象过程。

上述描述可归结为逻辑问题。逻辑就是针对研究对象的研究（抽象）性思维规律，逻辑学就是关于思维规律的学说。研究对象可以是人认识的一切东西，包括客观的事物、现象，人的感觉、表象、思想意识、情感意志等。抽象思维规律是指逻辑的研究规则，就是研究时有理有据，有原因有结果，有条件有结果。从狭义来讲，逻辑就是指形式逻辑或抽象逻辑，是指人的抽象思维的逻辑；广义来讲，逻辑还包括具象逻辑，即人的整体思维的逻辑。就本书的研究而言，是利用狭义的逻辑进行逻辑研究的，狭义的逻辑即抽象逻辑。

抽象是从众多的事物中抽取出共同的、本质性的特征，而舍弃其非本质的特征。例如苹果、香蕉、生梨、葡萄、桃子等，它们共同的特性就是水果。得出水果概念的过程，就是一个抽象的过程。要抽象，就必须进行比较，没有比较就无法找到在本质上共同的部分。共同特征是指那些能把一类事物与它类事物区分开来的特征，这些具有区分作用的特征又称本质特征。因此抽取事物的共同特征就是抽取事物的本质特征，舍弃非本质的特征。所以抽象的过程也是一个裁剪的过程。在抽象时，同与不同，取决于从什么角度上来抽象。抽象的角度取决于分析问题的目的。

而抽象逻辑则是通过调查研究，根据分析结果的需要，去抽象所有对象的共同特征，并根据共同特征存在与否（存在条件），确定结果的成立与否（结果状态），即将具体化的逻辑推理过程转换为条件决定结果的形式化表示过程。条件决定结果的依据，是抽象逻辑中的研究规律，这里可称为逻辑关系，逻辑关系是逻辑学中的运算关系。

【例 1.1】判断苹果、桃子、菠菜是否都是水果？找出逻辑条件、逻辑结果及逻辑关系。

分析：从题目要求来看，我们要判断的结果是“苹果、桃子、菠菜是否都是水果？”，这个结果具有两种取值：是水果或不是水果，这是指逻辑结果。那么如何根据逻辑条件判断该结果呢？显然要同时判别苹果是否为水果、桃子是否为水果、菠菜是否为水果，每一个判别只有两种取值：满足这个条件还是不满足条件，这两个为逻辑条件的对立取值。根据三个逻辑条件的满足与否决定逻辑结果是否都是水果，这就是逻辑关系。如果三个条件都是水果，则逻辑输出结果都是水果。

对于上述逻辑结果、逻辑条件、逻辑关系的分析过程，就是将事件进行逻辑抽象的过程。我们可以将该抽象过程以二维表格的形式体现，该表格首先罗列出逻辑条件的所有可能取值，然后根据逻辑关系计算每种取值的结果。逻辑条件有 3 个，每个逻辑条件有两种取值，根据乘法定理，逻辑条件取值共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种，三个条件从不满足条件开始取值，采用从高位到低位、从不满足到满足的交替变化，从而获得表 1-1 所示的水果判别逻辑抽象表。

表 1-1　水果判别逻辑抽象表

苹果满足为水果与否	桃子满足为水果与否	菠菜满足为水果与否	是否全是水果
否	否	否	否
否	否	是	否

续表

苹果满足为水果与否	桃子满足为水果与否	菠菜满足为水果与否	是否全是水果
否	是	否	否
否	是	是	否
是	否	否	否
是	否	是	否
是	是	否	否
是	是	是	是

针对表中左侧三列条件的取值，根据逻辑关系逐行进行判断，只有最后一行都满足条件，符合逻辑关系的要求，所以输出结果为是，其他输出结果为否；而因为菠菜是蔬菜而不是水果，满足倒数第 2 行的条件，因此实际的逻辑结果为否。这种用二维表格进行逻辑关系抽象的方法比较直观，表示条件全面，便于观察，能够对抽象过程的反映一目了然。

上述抽象过程存在一个问题，就是苹果、桃子、菠菜可以直接指定为水果、水果、蔬菜，而分析过程需要逐一列举其是否为水果，这个过程是否是多余的呢？这里有先入为主的原因存在，是因为我们知道它们是否是水果，而判断过程应该把它们看做是未知的，需要进行调查研究与取证，去证明它们在抽象过程中应该具有的所有可能逻辑条件，用客观分析代替主观判断，实现逻辑抽象的完整性。

任何事物和过程都可以进行逻辑抽象。

物体可以看做是由客观存在的“元素”组成的，元素“存在与否”是逻辑状态，用 1 表示“有元素”，而用 0 表示“无元素”，用 1、0 代替物体中的元素，则将物体转换为逻辑表示。例如，对苹果图像进行等份分割，分解为多个方形元素，对属于苹果组成部分的元素用 1 表示，不属于苹果组成部分的元素用 0 表示，以行列形式排列的二进制数，就是苹果图形的逻辑表示。

过程可以抽象为由逻辑条件去推导逻辑结果的实现，根据逻辑条件推导出逻辑结果的依据称为逻辑关系。逻辑条件与逻辑结果的取值具有二值性，也就是取值是对立的、相反的。三评委表决过程是根据评委“投票与否”“同意与否”确定表决是否通过，采用少数服从多数的逻辑关系。逻辑条件是指每个评委同意与否，3 个评委对应 3 个逻辑条件，逻辑条件的取值是“同意与不同意”，或者是“投票与不投票”；逻辑结果是表决结果通过或不通过。

逻辑抽象是实现逻辑问题的主要方法。

1.1.2　逻辑的数字表示

通过对事物或过程进行逻辑抽象，可以得到逻辑条件、逻辑结果及逻辑关系，而逻辑条件和逻辑结果具有二值性。根据前面所述，可以用数字 0、1 代替逻辑条件或逻辑结果的两种对立的取值，用数字表示文字含义，可以把语言化的逻辑分析过程转换为逻辑数学的分析过程，在研究时更容易记忆和寻找规律，这门数学称为逻辑代数。和代数一样，逻辑代数具有常量、变量、运算符、表达式、定律与规则等。其中常量 0、1 不是两个数值，表示条件“是否满足”或结果“是否发生”的两种状态。

数字 0、1 是两个相对立的数字，逻辑条件有两种相对立的取值，它们之间可以一一对应

表示。如果用数字“0”表示不满足的条件取值，用数字“1”表示满足的条件取值，这称为正逻辑表示法；反之，如果用数字“1”表示不满足的条件取值，用数字“0”表示满足的条件取值，称为负逻辑表示法。本书一般采用正逻辑表示法。

采用正逻辑表示法，用数字“0”表示逻辑条件或逻辑结果的“否”，用数字“1”表示逻辑条件或逻辑结果的“是”。而对于“苹果满足为水果与否”等3个逻辑条件，以及“是否全是水果”的逻辑结果，可以分别用未知逻辑变量A、B、C、F表示，则把表1-1转换为正逻辑表示的水果判别逻辑表，如表1-2所示。

表1-2　正逻辑表示的水果判别逻辑表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

表1-2由逻辑变量和数字“0”“1”组成，“0”视为不满足条件或结果不成立，“1”视为满足条件或结果成立，3个条件变量的不同取值组合，反映了所有可能出现的逻辑条件情况，以及对应的逻辑结果。用数字代替逻辑条件和逻辑结果进行表示，让逻辑过程的分析更有规律性，这种用数字表示的逻辑表称为真值表。真值表将逻辑问题转化为数学问题，从而可以寻找逻辑学的研究规律。

1.1.3　逻辑学研究方法

根据前面所述，任何的事物与过程都可以抽象为逻辑问题，即抽象出所有逻辑条件变量、逻辑结果变量及找出它们之间的逻辑关系，并为逻辑条件和逻辑结果的两种取值指定用“0”还是用“1”表示。然后列出真值表，自小到大列举所有逻辑条件的可能取值，从而根据逻辑关系求出逻辑结果的数值，将逻辑问题转换为逻辑代数。最后用逻辑代数的定义、公式、定律去实现和表达逻辑问题。

对于数字电路，我们用数字“1”“0”表示高低电平，从而将对电路电平的研究，转换为对逻辑代数的研究。可以把数字电路的研究看做逻辑代数研究的特例，或者把数字电路看做逻辑代数的一种表示形式。

1.2　信息的逻辑表示

信息是逻辑学研究的对象，信息一般是指客观存在的一切事物通过物质载体所发出的消息、情报、指令、数据和信号中所包含的一切可传递和交换的内容。数字、字母、文字、图

像、声音、波形等都可以认为是信息，它们可以通过对象进行表达、传递和交换。根据研究数据的形式不同，我们可以把信息分为数值型数据和非数值型数据，除了能够进行计算的数值型数据之外，其他信息都可以看做非数值型数据。这两种数据都可以用逻辑常数“0”“1”进行表示。

逻辑常数表示的是两种条件或状态，单独的“0”“1”是无法表达任何信息的。我们应该从信息自身的特征进行研究，用“0”“1”有序排列组合的形式，去表示信息的共同特征。比如说运动员，编号是它的信息特征，可以用“0”“1”的排列组合将所有运动员编号表示出来。同理，对于数字电路，信息可以利用输入或输出的稳定电压排列组合来表示，也可以用“0”“1”的排列组合来表示。

1.2.1　数值型数据的逻辑表示

在逻辑问题或数字电路中表达的数值型数据，数据的位数只有“0”“1”两个数字，这到底是一种怎样的表示方法呢？在日常生活中，人们是使用十进制数来表示数值型数据的，因此，我们应从十进制数入手，找出其表示的规律。十进制数是一种表示数值型数据的方法，这种方法称为数制。除了十进制数之外，是否存在其他表示数的方法呢？是否还有其他数制呢？答案是确定的。因此，我们可以把数制推广到任意的 $R(R\geqslant 2)$进制数，研究 R 进制数的表示方法，找出“0”“1”两个数字表示的数制，实现不同数制之间的转换，研究逻辑常量表达数据的表示形式和运算规则。

1. 数制

数制是一种表示数的方法。在日常生活中，人们是以十进制数来表示数据并进行计数与运算的。100 个苹果的“100”，10.6 元的“10.6”都是十进制数表示的数据，它由整数部分和小数部分组成。对于整数位有 n 位、小数位有 m 位的任意十进制数来说，我们可以把它表示为十进制数据的形式。

$$(k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_1k_0.k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m+1}k_{-m})_{10}$$

从所列数据来看，数据的下标 10 表示该数为十进制数据，该数据主要由 k_i 自高位向低位排列组成，i 为位号，i 为负数表示该位为小数位，k_i 称为位或系数，用 0～9 之间的数表示。

根据十进制数据大小的表示规律，该数据可以展开为乘积和的形式。

$$\begin{aligned}
&(k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_1k_0.k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m+1}k_{-m})_{10}\\
&=k_{n-1}\times 10^{n-1}+k_{n-2}\times 10^{n-2}+\cdots+k_1\times 10^1+k_0\times 10^0\\
&+k_{-1}\times 10^{-1}+k_{-2}\times 10^{-2}+\cdots+k_{-m+1}\times 10^{-m+1}+k_{-m}\times 10^{-m}\\
&=\sum_{i=-m}^{n-1}k_i\times 10^i
\end{aligned}$$

上式称为多项式的表示形式，k_i 为第 i 位数据的系数，10^i 称为第 i 位对应的权，10 为基数，它的指数即为本位的位号，它的大小是指本位系数为 1 个单位时该位数据的大小。$k_i\times 10^i$

表示第 i 位数据的实际大小，它由位与权的乘积计算所得，因此，这种表示数的方法称为位权表示法，是我们书写时经常采用的格式。十进制数加减法计算原则是“逢10进1，不够减向高位借1变10”。

如果把十进制数中的10改为任意的 R，则整数为 n 位、小数为 m 位的十进制数则变为 R 进制数，该数据如下表示：

$$(k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_1k_0.k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m+1}k_{-m})_R$$

任意 R 进制的多项式表示形式如下：

$$\begin{aligned}&(k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_1k_0.k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m+1}k_{-m})_R\\&=k_{n-1}\times R^{n-1}+k_{n-2}\times R^{n-2}+\cdots+k_1\times R^1+k_0\times R^0\\&+k_{-1}\times R^{-1}+k_{-2}\times R^{-2}+\cdots+k_{-m+1}\times R^{-m+1}+k_{-m}\times R^{-m}\\&=\sum_{i=-m}^{n-1}k_i\times R^i\end{aligned}$$

$\sum\limits_{i=-m}^{n-1}k_i\times R^i$ 体现了位权表示法的含义，对于其中的参数，约定如下。

① 位号与指数：i 既是系数（位）对应的位号，也是权对应的指数。i 为正整数或0时表示的是整数位，为负整数时表示的是小数位。

② 系数（位）：k_i 为第 i 位系数的大小，系数可以取值的范围应该在 $0\sim(R-1)$之间。系数最大取值比进制数小1。

③ 权：R^i 是第 i 位的系数 k_i 为单位1时，该位的大小，这里称为 R 进制数的权。

④ 位权表示法：R 进制数并列表示的每一位系数，其实际大小是由系数与权的乘积获得，因此称这种表示数据的方法为位权表示法。

⑤ 加减法计算规则：R 进制数加法运算的规则为“逢 R 进一”；减法运算规则为“不够减向高位借1变 R”。

根据任意进制数数据位的取值范围，对于只能用0、1两个数字表示的数制，位的最大值为1，因此进制数应该是 $1+1=2$，所以用“0”“1”作系数的数制是二进制数。二进制数是逻辑学中表示数值型数据的唯一数制。

【例1.2】 对于两个五进制数 $(334.23)_5$ 和 $(231.04)_5$，阅读题目要求及实现过程。

（1）指出第1个五进制数的第1和−2位的系数与权，并写出多项式形式，求出十进制数。

① 对于任意的 R 进制数，整数部分是从第0位开始自低位向高位算起的，小数部分是从小数位后−1位，依次向右减1位计算。因此，$(334.23)_5$ 第1位的系数是3，权是 5^1；第−2位的系数是3，权是 5^{-2}。系数与权是位权表示法的体现参数。

② 根据位权表示法写出 $(334.23)_5$ 的多项式表示形式。

$$(334.23)_5=3\times5^2+3\times5^1+4\times5^0+2\times5^{-1}+3\times5^{-2}$$

③ 将 $(334.23)_5$ 转化为十进制数。

只要将②中的多项式按照十进制数的计算方法和逢十进一的原则进行计算，得到的结果就是十进制数。使用这种方法可以把任意进制数转换为十进制数的形式。在②中 5^2 对于五进

制数来讲是 100，对于十进制数来讲 $5^2=5\times5=25$，25 即为十进制数据，而五进制数的系数比 9 小，因此五进制数的系数也是十进制的系数。最后，按照逢十进一原则进行乘法、加法运算，最终得到的结果即为十进制的数。$(334.23)_5$转化为十进制数，计算过程为

$$
\begin{aligned}
(334.23)_5 &= 3\times5^2+3\times5^1+4\times5^0+2\times5^{-1}+3\times5^{-2}\\
&=3\times25+3\times5+4\times1+2\times0.2+3\times0.04\\
&=75+15+4+0.4+0.12=94.52
\end{aligned}
$$

因此，$(334.23)_5$转化为十进制数的结果是 94.52。

（2）计算两个五进制数的和与差。

根据 R 进制数加减法运算原则，五进制数的加法原则是逢 5 进 1；减法运算原则是对位相减，不够减则向高位借 1 变 5。以下是$(334.23)_5$和$(231.04)_5$的加、减法运算过程。

① 加法运算。加法所列竖式为

$$
\begin{array}{r}
334.23\\
+\quad 231.04\\
\hline
1120.32
\end{array}
$$

在进行加法运算过程中，自低位向高位逐位相加并逢 5 进 1。首先是最低位 3 加 4 为 7，大于 5，所以向高位逢 5 进 1，余 2，即本位和为 2，进位为 1；然后次低位 2 加 0，再加进位 1，得本位和为 3，进位为 0；依次类推……，最后得到两个五进制数相加的结果为$(1120.32)_5$。

② 减法运算。减法所列竖式为

$$
\begin{array}{r}
334.23\\
-\ 231.04\\
\hline
103.14
\end{array}
$$

在进行减法运算过程中，自低位向高位逐位相减，如果减数大于被减数，需要被减数向高位借一个 1，变成 5 后加到本位，然后再相减。首先是最低位的被减数 3 减去减数 4，因为不够减，需要向次高位借 1 变为本位的 5，5 加 3 变为十进制数 8，用 8 减去 4 得到本位差 4，同时次高位 2 减去 1 后变为 1；然后次高位被减数 1 减去减数 0，得到结果 1；依次类推……，最后得到两个五进制数相减的结果为$(103.14)_5$。

（3）实现两个五进制数的乘法与除法运算。

对于任意进制数的乘法和除法运算，实现过程并不相同。对于乘法运算而言，使用被乘数和乘数自低位向高位逐位相乘，然后相加的运算方法，相乘过程和相加过程全部采用逢 R 进 1 的原则，运算方法与十进制数运算方法相同；R 进制数除法的运算方法也和十进制数除法的运算方法相类似，运算过程参考下面对应的除法竖式。

① 乘法运算。省略小数点，乘法所列竖式为

被乘数 33423 与乘数最低位 4 相乘，被乘数的最低 3 与 4 相乘得十进制数 12，然后将 12 转换为五进制数 22，本位和为 2，进位为 2；然后次低位 2 与 4 相乘得十进数 8，再与进位 2 相加，得到十进制数 10，将其转换为五进制数为 20，本位和为 0，进位为 2；依次类

推……，得到相乘的第一个五进制数 300302。被乘数与乘数的每一位相乘后，按顺序和规则列出所有的乘积项，如乘法竖式所列，最后按照五进制数逢五进一的加法原则相加，得出最终的结果。

```
             3 3 4 2 3
   ×         2 3 1 0 4
   -------------------
           3 0 0 3 0 2
           0 0 0 0 0
         3 3 4 2 3
     2 1 1 3 2 4
   1 2 2 4 0 1
   -------------------
   2 0 0 0 0 3 2 1 0 2
```

在进行运算时，我们没有写小数位，被乘数和乘数各有两位小数，因此结果应有 4 位小数位。乘法运算的结果为 $(200003.2102)_5$。

② 除法运算。去掉小数点，将被除数和除数分别变为 $(33423)_5$ 和 $(23104)_5$，则相除的结果保持不变，列式计算两个数的商和余数，计算过程如下：

```
                      1 . 2 0 3
              ---------------------
2 3 1 0 4  /  3 3 4 2 3
              2 3 1 0 4
              -----------
              1 0 3 1 4 0
              1 0 1 2 1 3
              ---------------------
                  1 4 2 2 0 0
                  1 2 4 3 2 2
                  -----------------
                    1 2 3 2 3
```

在进行除法运算的过程中，被除数 33423 和除数 23104 的位数相同，直接比较两数大小，除数小于被除数，能够直接相除。五进制数 33423 大于五进制数 23104，小于 23104 的 2 倍即五进制数 103140；因此最高位商为 1，又因整数部分已经除完，1 的后面应该有一个小数点；用被除数减去除数，得到五进制余数 10314。在 10314 后添加一个 0 后，变为被除数，继续除以 23104，得到商 2 和余数 1422；在 1422 后添加一个 0，因为不够除，所以商为 0，余数不变；再填一个 0，被除数变为 142200，相除后得到商为 3，余数为 12323。进行除法运算的过程主要是进行乘法和加法运算，都要及时将运算数据转换为五进制数。该除法运算得到的商为 $(1.203)_5$，余数为 $(0.12323)_5$。

2. 常用进位计数制

根据前面所述，我们知道在逻辑过程中，数值型数据只能用二进制数来表示，但是二进制数单位小，表示数据位数较多，因此在其他编辑、编译等非逻辑表示过程中，一般采用与二进制数有特殊转换规律的八进制数、十六进制数及人们习惯使用的十进制数来表示。常用进制数有二进制数、十进制数、八进制数及十六进制数 4 种。因数制采用位权表示法，所以我们主要掌握每种数制的基（进制数）、系数范围及表示、编辑格式及多项式表示形式。

（1）二进制数

在逻辑问题中，二进制数是能够表示数值型数据的唯一进位计数制。二进制数的基数为 2，系数只有 0、1 两个数字。在编辑时，一般在二进制数后写上字母 B 作为区别于其他进制数的标志，数字 11101.101B 表示二进制数 11101.101。二进制数的加法运算规则为“逢 2 进 1”。

将二进制数 11101.101B 展开为多项式的表示形式：

$$11101.101B = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

（2）十进制数

十进制数是人们在日常生活中表示数据的通用方法。十进制数的基数为 10，系数由 0～9 间的数字表示。编辑时，在一个数据后写上字母 D 或不写任何字母，都表示该数为十进制数据，267.109 和 267.109D 都表示十进制数 267.109。十进制数的加法运算规则为“逢 10 进 1”。

将十进制数 267.109 展开为多项式的表示形式：

$$267.109 = 2 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

（3）八进制数

八进制数是由二进制数按照一定规则转变而来。八进制数的基数为 8，系数由 0～7 间的数字表示。编辑时，在一个数据后写上字母 O 来表示该数为八进制数据，237.106O 即表示八进制数 237.106。八进制数的加法运算规则为“逢 8 进 1”。

将八进制数 237.106O 展开为多项式的表示形式：

$$237.106O = 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 1 \times 8^{-1} + 0 \times 8^{-2} + 6 \times 8^{-3}$$

（4）十六进制数

十六进制数也是由二进制数按照一定规则转变而来。十六进制数的基数为 16，系数由 0～15 间的数字表示，但是 10～15 无法单独用数字表示，因此我们使用系数 A、B、C、D、E、F 这六个字母一一对应表示 10、11、12、13、14、15 这六个数。编辑时，在一个数据后写上字母 H 来表示该数为十六进制数据，9AB.6FH 即为十六进制数。十六进制数的加法运算规则为“逢 16 进 1”。

将十六进制数 9A5B.6FH 展开为多项式的表示形式：

$$9A5B.6FH = 9 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 11 \times 16^0 + 6 \times 16^{-1} + 15 \times 16^{-2}$$

3. 数制之间的转换

逻辑常数只能表示二进制数，但在编辑和书写过程中，还要使用八进制数、十进制数、十六进制数甚至其他进制的数，这就要考虑各种数制数据之间转换的问题。因为我们最常使用和运用熟练的数制是十进制数，所以首先要考虑的是十进制数和其他任意进制数之间的转换，包括十进制数转换为任意进制数，任意进制数转换为十进制数。以十进制数为中介，可以实现任意进制数之间的转换，可以把一种任意进制数转换为十进制数，然后再把所得十进制数转换为另一种任意进制数。而二进制数和八进制数、十六进制数之间有特殊的转换关系，因此它们之间可以直接转换，而不必通过十进制数为转换中介。

综上所述，数值转换主要包括“任意进制数转换为十进制数”“十进制数转换为任意进制

数”“任意进制数之间的相互转换”“八进制数、十六进制数转换为二进制数”“二进制数转换为八进制数、十六进制数”5 种情况。

（1）任意进制数转换为十进制数

只要将位权表示法表示的任意进制数用多项式的形式表示出来，然后按照十进制数的运算规则运算，得到的结果就是十进制的数据。

【例 1.3】将数据 $(1420.32)_5$，$(9AE6.4F)_{16}$，$(110111.1011)_2$ 分别转换为十进制数。

$$
\begin{aligned}
(1420.32)_5 &= 1\times5^3+4\times5^2+2\times5^1+0\times5^0+3\times5^{-1}+2\times5^{-2}\\
&=1\times125+4\times25+2\times5+0\times1+3\times0.2+2\times0.04\\
&=125+100+10+0+0.6+0.08\\
&=235.68
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9AE6.4F)_{16} &= 9\times16^3+10\times16^2+14\times16^1+6\times16^0+4\times16^{-1}+15\times16^{-2}\\
&=9\times4096+10\times256+14\times16+6\times1+4\times0.0625+15\times0.00390625\\
&=36864+2560+224+6+0.25+0.05859375\\
&=39654.30859375
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(110111.1011)_2 &= 1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}+1\times2^{-4}\\
&=1\times32+1\times16+0\times8+1\times4+1\times2+1\times1+1\times0.5+0\times0.25+1\times0.125+1\times0.0625\\
&=32+16+4+2+1+0.5+0.125+0.0625\\
&=55.6875
\end{aligned}
$$

从实例可以看出，任意进制数转换为十进制数过程中，无论指数运算，还是乘法、加法运算，都是采用十进制数的运算规则进行的。

（2）十进制数转换为任意进制数

从例 1.3 来看，任意进制数都可以表示为多项式的形式，如果把一进制数表示为另一进制数多项式形式，然后用位权表示法就可以把新的进制数表示出来，完成数制的转化。这种转换方法要根据原数据的大小，找出新数制的所有权值，然后计算出每个权值对应系数即可。由于我们对十进制数比较熟悉，所以这种方法非常适合于十进制数转换为任意进制的数。

以十进制数 115 为例，把其转换为五进制的数据。首先，找出最大的权值，由于 $5^2<115<5^3$，所以最大权值为 5^2，又因为 $5^2\times4=100<115<5^3$，所以该权值对应的系数为 4，用 115 减去 100，得到差 15，然后分别计算权 5^1 和 5^0 的系数分别是 3 和 0，自高位向低位排列，115 所转化的五进制数为 $(430)_5$。

转换过程首先需要判断新数制数据对应的最大权值，然后自高而低计算所有权值对应的系数，并以多项式的形式进行展示。

$$115=4\times5^2+3\times5^1+0\times5^0$$

而对于小数部分，则从第−1 位系数开始判别，直到判别出所有系数为止，计算过程和整数求解过程相同。将 0.712 转换为五进制数，以多项式的形式表示。

$$0.712=3\times5^{-1}+2\times5^{-2}+4\times5^{-3}$$

所以，$0.712=(0.324)_5$。