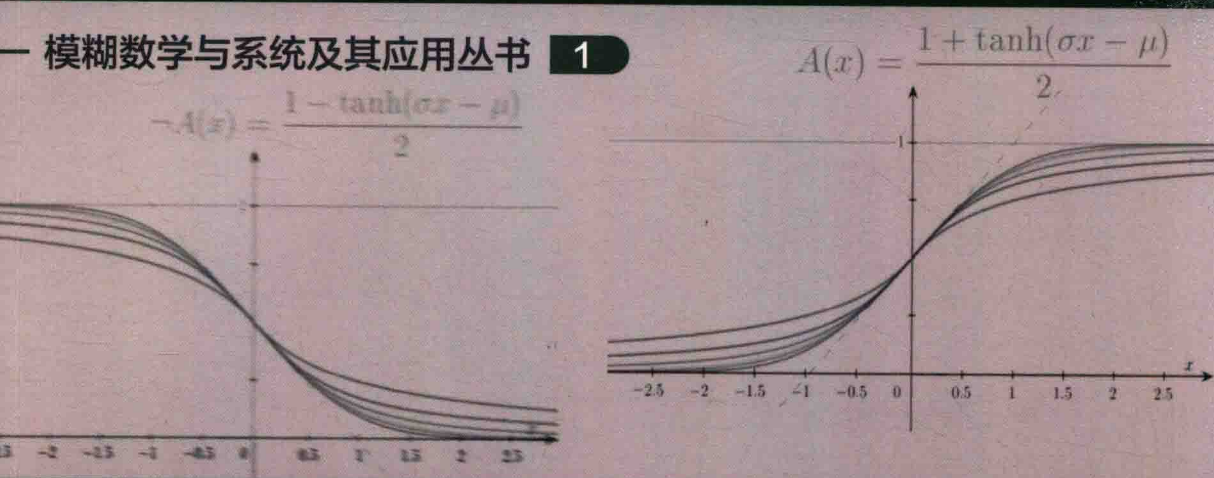
模糊数学与系统及其应用丛书 1



犹豫模糊集理论及应用

徐泽水　赵　华/著

Hesitant Fuzzy Sets Theory and Applications

科学出版社

模糊数学与系统及其应用丛书 1

犹豫模糊集理论及应用

徐泽水 赵 华 著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

犹豫模糊集作为模糊集的一种最新拓展，其基本组成为犹豫模糊元素，每个犹豫模糊元素是由若干个可能的数值构成的集合. 因此，犹豫模糊集比其他模糊集的拓展形式能够更全面、细致地刻画决策者的犹豫信息. 犹豫模糊集由西班牙学者 Torra 和 Narukawa 于 2009 年引入以来，已经受到学者们的高度关注，并且被应用于决策、聚类分析、医疗诊断、人事评估、信息检索等诸多领域. 本书将系统地介绍犹豫模糊集理论的主要研究成果，包括：犹豫模糊集成技术、犹豫模糊偏好关系、犹豫模糊测度、犹豫模糊聚类算法、犹豫模糊多属性决策模型、犹豫模糊语言决策方法，及其在实际生活中的应用.

本书可作为模糊数学、运筹学、信息与计算科学、管理科学与工程等领域研究人员和工程技术人员的参考书，也可作为高等院校相关专业高年级本科生和研究生的教学用书.

图书在版编目(CIP)数据

犹豫模糊集理论及应用/徐泽水，赵华著. —北京：科学出版社，2018.2
(模糊数学与系统及其应用丛书；1)
ISBN 978-7-03-036275-9

Ⅰ. ①犹… Ⅱ. ①徐… ②赵… Ⅲ. ①模糊集理论 Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 032969 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2018 年 2 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 2 月第一次印刷 印张：30 3/4
字数：600 000

定价：198.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《模糊数学与系统及其应用丛书》序

自然科学和工程技术, 表现的是人类对客观世界有意识的认识和作用, 甚至表现了这些认识和作用之间的相互影响, 例如, 微观层面上量子力学的观测问题.

当然, 人类对客观世界最主要的认识和作用, 仍然在人类最直接感受、感知的介观层面发生, 虽然往往需要以微观层面的认识和作用为基础、以宏观层面的认识和作用为延拓.

而人类在介观层面认识和作用的行为和效果, 可以说基本上都是力图在意识、存在及其相互作用关系中, 对减少不确定性、增加确定性的一个不可达极限的逼近过程; 即使那些目的在于利用不确定性的认识和作用行为, 也仍然以对不确定性的具有更多确定性的认识和作用为基础.

正如确定性以形式逻辑的同一律、因果律、排中律、矛盾律、充足理由律为形同公理的准则而界定和产生一样, 不确定性本质上也是对偶地以这五条准则的分别缺损而界定和产生. 特别地, 最为人们所经常面对的, 是因果律缺损所导致的随机性和排中律缺损所导致的模糊性.

与随机性被导入规范的定性、定量数学研究对象范围已有数百年的情况不同, 人们对模糊性进行规范性认识的主观需求和研究体现, 仅仅开始于半个世纪前 1965 年 Zadeh 具有划时代意义的 *Fuzzy sets* 一文.

由于模糊性与随机性都具有难以准确把握或界定的共同特性, 而从 Zadeh 开始延续下来的 "以赋值方式量化模糊性强弱程度" 的模糊性表现方式, 又与已经发展数百年而高度成熟的 "以赋值方式量化可能性强弱程度" 的随机性表现方式, 在基本形式上平行——毕竟, 模糊性所针对的 "性质", 与随机性所针对的 "行为", 在基本的逻辑形式上是对偶的. 这也就使得 "模糊性与随机性并无本质差别" "模糊性不过是随机性的另一表现" 等疑虑甚至争议, 在较长时间和较大范围内都有持续.

然而, 时至今日, 应该说, 不仅如上由确定性的本质所导出的不确定性定义已经表明模糊性与随机性在本质上的不同, 而且, 人们也已逐渐意识到, 表现事物本身性质的强弱程度而不关乎其发生与否的模糊性, 与表现事物性质发生的可能性而不关乎其强弱程度的随机性, 在现实中的影响和作用也是不同的.

例如, 当情势所迫而必须在 "于人体有害的可能为万分之一" 和 "于人体有害

的程度为万分之一”这两种不同性质的 150 克饮料中进行选择时, 结论就是不言而喻的; 毕竟前者对“万一有害, 害处多大”没有丝毫保证, 而后者所表明的“虽然有害, 但极微小”还是更能让人放心得多. 而这里, 前一种情况就是“有害”的随机性表现, 后一种情况就是“有害”的模糊性表现.

模糊性能在比自身领域更为广泛的科技领域内得到今天这一步的认识, 的确不是一件容易的事, 到今天, 模糊理论和应用的研究所涉及和影响的范围也已几乎无远弗届. 这里有一个非常基本的原因: 模糊性与随机性一样, 是几种基本不确定性中, 最能被人类思维直接感受、也是最能对人类思维直接影响的.

对于研究而言, 易感知、影响广本来是一个便利之处, 特别是在当前以本质上更加逼近甚至超越人类思维的方式而重新崛起的人工智能的发展已经必定势不可挡的形势下. 然而, 也正因为如此, 我们也都能注意到, 相较于广度上的发展, 模糊性研究在理论、应用的深度和厚度上的发展, 还有很大的空间; 或者, 更直接地说, 还有很大的发展需求.

例如, 在理论方面, 思维中模糊性与直感、直观、直觉是什么样的关系? 与深度学习已首次形式化实现的抽象过程有什么样的关系? 模糊性的本质是在于作为思维基本元素的单体概念, 还是在于作为思维基本关联的相对关系? 还是在于作为两者统一体的思维基本结构? 这种本质特性和作用机制以什么样的数学形式予以刻画和如何刻画才能更为本质深刻和关联广泛?

又例如, 在应用方面, 人类是如何思考和解决在性质强弱程度方面难以确定的实际问题的? 是否都是以条件、过程的更强定量来寻求结果的更强定量? 有否可能如同深度学习对抽象过程的算法形式化一样, 建立模糊定性的算法形式化? 在比现在已经达到过的状态、已经处理过的问题更复杂、更精细的实际问题中, 如何更有效地区分和结合“性质强弱”与“发生可能”这两类本质不同的情况? 从而更有效、更有力地在实际问题中发挥模糊性研究本来应有的强大效能?

这些, 都是模糊领域当前还需要进一步解决的重要问题; 而这, 也就是作为国际模糊界主要力量之一的中国模糊界研究人员所应该、所需要倾注更多精力和投入的问题.

现在, 科学出版社针对相关领域高等院校师生和科技工作者, 推出这套以专著为主、也包含高级研讨班成果、讲习班讲义、研究生讲义等形式和内容的《模糊数学与系统及其应用丛书》, 以介绍国内外模糊数学与模糊系统领域的前沿热点方向和最新研究成果, 从上述角度来看, 是具有重大的价值和意义的, 相信能在推动我国模糊数学与模糊系统乃至科学技术的跨越发展上, 产生显著的作用.

为此, 我冒昧将此认为自己的责任之一, 应邀为该丛书作序, 借此将自己的一些粗略的看法和想法提出, 供中国模糊界同仁们批评和参考.

罗懋康
国际模糊系统协会 (IFSA) 副主席 (前任)
国际模糊系统协会中国分会代表
中国系统工程学会模糊数学与模糊系统专业委员会主任委员
2018.1.15

前　　言

在人们进行决策的过程中, 他们对决策对象进行评估时经常会犹豫不决, 从而难以达成一致意见. 例如, 当两个决策者讨论一个元素属于一个集合的隶属度时, 一个赋予 0.7, 另一个认为是 0.9. 因此, 两位决策者不能给出一个共同的隶属度, 这并不是因为有一定幅度的误差, 而是因为存在一个由一些可能值组成的集合. 为了处理此类情况, 西班牙学者 Torra and Narukawa (注: 为了统一起见. 本书后面章节英文姓氏之间均用 and 连接) 于 2009 年提出了犹豫模糊集的概念. 犹豫模糊集作为模糊集的一种最新拓展, 其基本组成为犹豫模糊元素, 每个犹豫模糊元素是由若干个可能的数值构成的集合. 因此, 犹豫模糊集比其他模糊集的拓展形式更能够全面细致地刻画决策者的犹豫信息. 随即, 于 2011 年, 作者和作者的博士生夏梅梅给出了犹豫模糊集的数学表达式, 定义了犹豫模糊元素的概念. 犹豫模糊元素是犹豫模糊集的基本组成单元, 也是决策过程中用于刻画决策者犹豫偏好的一个简洁有效的工具. 从那以后, 我的研究小组在犹豫模糊集理论及应用方面做了大量的研究工作, 并取得了丰硕的研究成果. 为该领域“犹豫模糊集理论及其在决策中的应用”入选全球《2016 研究前沿》, 以及在数学、计算机科学与工程学 Top10 热点前沿中排名第一做出了大量原创性和奠基性工作!

本书将深入系统地介绍犹豫模糊集成技术、犹豫模糊判断矩阵、犹豫模糊测度、犹豫模糊聚类算法、犹豫模糊多属性决策模型、犹豫模糊语言决策方法, 及其在实际生活中的应用等. 本书共 5 章, 分别处理不同但相关的问题, 具体如下:

第 1 章介绍犹豫模糊集成方式. 首先介绍犹豫模糊集、犹豫模糊元素等基本概念, 给出犹豫模糊元素的比较方法、基本运算法则和基本性质. 基于这些运算, 给出了犹豫模糊信息的一系列集成算子, 如: 犹豫模糊加权集成算子、广义犹豫模糊加权集成算子、犹豫模糊有序加权集成算子、广义犹豫模糊有序加权集成算子、犹豫模糊混合集成算子、广义犹豫模糊混合集成算子、犹豫模糊 Bonferroni 平均算子、基于拟算术平均和导出思想的犹豫模糊集成算子、基于 t-范数和 t-余范数的犹豫模糊集成算子以及犹豫模糊优先“或”算子等. 详细讨论了它们的关系, 把它们应用于企业发展战略规划、场地选择、供应链中的供应商选择、工作系统战略规划的安全评价以及流域环境规划和评估等.

第 2 章主要介绍犹豫模糊信息的距离测度、相似性测度、关联测度、熵测度和聚类算法. 首先介绍犹豫模糊集的一系列距离和相似性测度, 研究犹豫模糊元素的距离和关联测度, 详细讨论了它们的性质. 其次介绍犹豫模糊信息的熵, 二元熵测度和交叉熵概念, 并分析这些熵、交叉熵和相似性测度的关系, 给出一些关联系数

公式, 并且在聚类不同目标的过程中应用它们计算犹豫模糊集的关联度. 最后, 介绍犹豫模糊聚合层次聚类算法、以层次聚类结果为初始输入值的层次犹豫模糊 K-均值聚类算法, 以及基于最小生成树法的聚类技术, 利用它们和犹豫模糊距离对犹豫模糊集进行聚类分析, 并且把上述算法应用于能源政策评价、医疗诊断、制造企业的供应商选择、软件评估和分类, 以及旅游资源评估等.

第 3 章介绍基于犹豫判断矩阵的群决策方法. 首先介绍犹豫模糊判断矩阵和犹豫积性判断矩阵, 利用它们给出相应的群决策途径. 基于积性一致性和可接受积性一致性, 提出了两种算法来增进犹豫模糊判断矩阵的一致性水平, 并且研究基于豫模糊判断矩阵的群体决策的共识性. 然后介绍两种分别基于加性传递性和弱一致性的转化犹豫模糊判断矩阵为模糊判断矩阵的回归方法. 此外, 利用 α 规范化和 β 规范化这两种法则构建犹豫目标规划模型来求解犹豫模糊判断矩阵的排序向量和获取犹豫模糊判断矩阵的一致性测度. 最后介绍群决策环境下求解层次分析法 (AHP) 中犹豫积性判断矩阵排序向量的一种模糊规划方法.

第 4 章介绍犹豫模糊多属性决策方法. 基于 TOPSIS 法和最大化偏差法, 给出一种求解属性权重信息不完全且属性值为犹豫模糊元素的多属性决策问题的方法. 利用基于得分和偏差度的犹豫模糊调和与犹豫模糊不调和概念, 给出犹豫模糊 ELECTRE Ⅰ法和犹豫模糊 ELECTRE Ⅱ法, 并且应用于犹豫模糊多属性决策问题. 针对不完备权重信息的情形, 定义方案满意度概念, 依此构建几个确定属性权重的优化模型, 并且提出相应的求解犹豫模糊多属性决策问题的交互式方法. 上述方法均在实际应用中进行了验证和说明.

第 5 章介绍基于犹豫模糊语言信息的决策方法. 首先介绍语言术语集和犹豫模糊语言术语集的基本概念, 基于犹豫模糊语言术语集, 提出犹豫模糊语言偏好关系, 定义犹豫模糊语言偏好关系的一致性测度和一致性改进方法; 基于图论的方法, 进一步探讨拓展的犹豫模糊语言偏好关系的一致性测度. 最后给出了犹豫模糊语言环境下的两类多准则决策方法: 基于犹豫模糊语言 Bonferroni 平均算子的多准则决策方法和基于改进 MACBETH 方法的犹豫模糊语言多准则决策方法, 并分别给出了两类方法的实际应用案例.

本书是作者在 Springer 出版社出版的英文专著 *Hesitant Fuzzy Sets Theory* 的中文拓展版. 它可作为模糊数学、运筹学、信息与计算科学、管理科学与工程等领域的研究人员和工程技术人员的参考书, 也可作为高等院校有关专业高年级本科生和研究生的教学用书. 本书作者的有关研究工作得到了国家自然科学基金项目 (61273209, 71571123) 的资助.

徐泽水
2017 年 9 月于成都

符号说明

$\Theta, X, A, \bar{X}, X_0, \varnothing, D, \Upsilon, \Re$	
$V, \Lambda, OV^B, KV^B, J_{c_{ij}}, J_{c'_{ij}}, J_{d_{ij}}$	
$J_{d'_{ij}}, \Delta, S, H_S, \quad S_{ll}$	集合
$h, h_i, b_i, e, e_i, e_i^*, \hat{m}(h), \hat{n}(h)$	犹豫模糊元素
$\oplus, \otimes, \ominus, \oslash, \cup, \cap$	运算符号
α_i	直觉模糊数
$w, \omega, v, \omega^{(i)}, w^*, \bar{w}^{(i)}, \bar{w}^*, w^{HFPM}$	
$w^{EVM}, w^{(i)}$	权重向量
$\vartheta, g, \varphi, \varphi_i, \sigma, \dot{\tau}, \dot{\sigma},$	
$\ddot{\sigma}, E, E_i, f, E_{NS}, E_{G_H}$	函数
$H, H_k, H^{(k)}, H^c, U, \bar{H}, \widehat{H}^{(k)}$	
$\bar{H}^{(k)}, \tilde{H}, P, H^N, B^{(i)}, W, C, \bar{D}$	
F, Q, P, K	矩阵
E_{NS}	映射
A_i	方案
$\lambda, p, q, \dot{\eta}, \zeta, \pi, \beta, \varsigma$	参数
x_i	属性
D_k	决策者
$d_i, d_o, d, d_{ij}, z_{ij}$	距离测度
$s_o, \bar{s}$	相似性测度
c, c_i	关联测度
E_a, E_b, ψ	熵
ρ_i	关联测度
C	关联矩阵
λ_0	置信水平
$\theta_0, cl_{ik}, cl_{\tilde{H}}, U_i^{H_1}, CI,$	
GCI,CR, $C\bar{I}(B)$, $CI(B)$	一致性水平
C_{λ_0}, C_λ	截矩阵
Π_i	犹豫模糊距离矩阵
$\alpha_{env}(h)$	犹豫模糊元素的包络

R, R_i	犹豫积性判断矩阵
Z	犹豫模糊距离矩阵
$\Gamma, \bar{\Gamma}, P_{H_i}$	犹豫模糊图
$s_{-\tau}, s_{\tau}, s_{\alpha}, s_{\beta}, s_t, b_{\alpha}, b_{\beta}$	语言术语
$S, \bar{S}, H_S$	语言术语集
$h_s(x_i)$	犹豫模糊语言元素
$L, \# b_{ij}$	语言术语的数量
G_H	文本自由语法
I	有序下标集
$B, B_{\alpha}, B_{\beta}, \tilde{H}, H$	犹豫模糊语言偏好集
B^N	归一化的犹豫模糊语言偏好集
${}^{m}B^N$	改进的归一化的犹豫模糊语言偏好集
b_{ij}	犹豫模糊语言偏好集中的元素
H_S	拓展的犹豫模糊语言术语集
$E(h_S)$	期望语言术语
G_{HP}, G_{S-HP}	有向图
$\tau_{i,j}$	结合度满意因子

目　录

第 1 章　犹豫模糊集成算子及其应用

自 1965 年 Zadeh 教授提出模糊集的概念以来, 人们对其提出了许多拓展形式, 如: 直觉模糊集 (Atanassov, 1986)、二型模糊集 (Dubois and Prade, 1980; Miyamoto, 2005)、n 型模糊集 (Dubois and Prade, 1980)、模糊多集 (Yager, 1986; Miyamoto, 2000) 和犹豫模糊集 (Torra and Narukawa, 2009; Torra, 2010; Zhu et al., 2012a). 直觉模糊集主要由三部分组成: 隶属函数、非隶属函数和犹豫函数. 二型模糊集中的隶属度是一个集合. n 型模糊集推广了二型模糊集, 其隶属度是 $n-1$ 型模糊集. 在模糊多集中, 其元素可以重复多次. 犹豫模糊集的每个元素是若干个可能值组成的集合. Torra and Narukawa(2009), Torra(2010) 讨论了犹豫模糊集和其他三类模糊集的关系, 表明了犹豫模糊集的包络是直觉模糊集, 并且证明了他们提出的犹豫模糊集包络的运算与直觉模糊集的运算相符.

犹豫模糊集在许多的决策问题中均可以得到应用. 为了能够在多属性群决策中得到最优方案, 人们已经提出了两个常用的途径 (Xia and Xu, 2011a): ① 针对每个属性, 把所有决策者对某一方案的意见进行集成, 然后把某一方案的所有属性值进行集成; ② 针对每一个方案, 把某一决策者给出的所有属性值进行集成, 然后把每一个方案的所有决策者的意见进行集成. 例如: 对于一个具有 4 个属性 $x_j(j=1,2,3,4)$ 的决策问题, 邀请 5 个决策者 $D_k(k=1,2,3,4,5)$ 对 3 个方案 $A_i(i=1,2,3)$ 进行评估并且提供属性值. 假设决策者 D_1 熟悉属性 x_1, 决策者 D_2 熟悉属性 x_2, 决策者 D_3 熟悉属性 x_3, 决策者 D_4 和 D_5 熟悉属性 x_4, 为了得到更合理的决策信息, 最好让决策者评估他们自己熟悉的属性. 然而, 在一些实际问题中, 为了保护决策者的隐私或者避免彼此影响, 需要对决策者进行匿名, 例如: 在总统选举或者论文盲审过程中, 不知道决策者分别熟悉哪些属性, 因此, 为了获得更合理的决策结果, 需要考虑所有的情形. 然而, 现有的方法通常仅仅考虑决策者擅长评估所有的属性的情形, 但它很少发生. 犹豫模糊集能够避免这类问题, 此时, 决策者对每个方案的意见可以用犹豫模糊集进行刻画 (Torra and Narukawa, 2009), 且在该方案下的每个属性的评估值可以用犹豫模糊元素来表达 (Xu and Xia, 2011a). 然后, 利用集成算子去融合每个方案的关于所有属性的犹豫模糊元素. 本章将对现有的犹豫模糊信息集成算子进行详细的介绍, 并且把它们应用于解决多属性决策问题.

1.1 犹豫模糊元素

1.1.1 比较方法

在决策者进行决策的过程中, 他们对决策对象进行评估时经常会犹豫不决, 从而难以达成一致意见. 决策者不能给出一个共同的意见 (隶属度), 这并不是因为仅有一个可能的值 (模糊集) 或有一定幅度的误差 (直觉模糊集或区间模糊集 (Zadeh, 1975)), 而是存在一个由一些可能值组成的集合. 在大多数情形, 为了得到一个合理的决策结果, 可能会邀请一个由许多专家或决策者组成的决策组织对一组方案提供偏好信息. 通常地, 在估计一个方案满足一个属性的程度时, 决策组织并不能够很明确地提供一个值, 而是对几个可能的取值犹豫不决 (Xu and Xia, 2012a). 例如: 在决策组织中一些决策者提供 0.3, 一些提供 0.5, 其他提供 0.6, 当这三部分决策者不能说服彼此时, 方案满足属性的程度可以表示为犹豫模糊元素 $\{0.3, 0.5, 0.6\}$ (Xu and Xia, 2011a). 我们注意到: 作为一个犹豫模糊集 (Torra and Narukawa, 2009) 基本单元的犹豫模糊元素 $\{0.3, 0.5, 0.6\}$ 比精确的实数 0.3(或 0.6)、区间数 $[0.3, 0.6]$ 或直觉模糊数 $(0.3, 0.4)$(Xu and Yager, 2006; Xu, 2007a) 能够更加全面地刻画上述问题, 这是因为方案满足属性的程度不是 0.3 和 0.6 的凸组合或 0.3 与 0.6 之间的区间, 而是三个可能的值: 0.3, 0.5 和 0.6. 为了处理此类情形, Torra and Narukawa(2009) 以及 Torra(2010) 给出了模糊集的另一个推广:

定义 1.1(Torra and Narukawa, 2009; Torra, 2010)　设 X 是一个固定的集, 则犹豫集是 X 的每个元素映射到 $[0,1]$ 子集的函数.

为了便于理解, Xia and Xu(2011a) 首次给出了犹豫模糊集的数学表达式:

$$A = \{\langle x,\ h_A(x)\rangle | x \in X\} \tag{1.1}$$

其中 $h_A(x)$ 是 $[0,1]$ 中一些数值的集合, 表示元素 x 关于集合 A 的一些可能的隶属程度. Xu and Xia(2011a) 称 $h = h_A(x)$ 为犹豫模糊元素, 且用 Θ 表示所有犹豫模糊元素的集合.

例 1.1(Chen et al., 2013a)　设 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 为一固定的集, $h_A(x_1) = \{0.2, 0.4, 0.5\}$, $h_A(x_2) = \{0.3, 0.4\}$ 和 $h_A(x_3) = \{0.3, 0.2, 0.5, 0.6\}$ 分别为 $x_i(i = 1, 2, 3)$ 隶属于集合 A 的犹豫模糊元素, 则 A 可以被考虑为犹豫模糊集:

$$A = \{\langle x_1,\ \{0.2, 0.4, 0.5\}\rangle, \langle x_2,\ \{0.3, 0.4\}\rangle, \langle x_3,\ \{0.3, 0.2, 0.5, 0.6\}\rangle\}$$

Torra(2010) 给出了一些特殊的犹豫模糊元素:

(1) **空集**　$h = \{0\}$, 为了简便起见, 把它记为 O^*.

(2) **全集**　$h = \{1\}$, 记为 I^*.

(3) **完全无知集**(一切皆都可能) $h=[0,1]\triangleq U^*$.

(4) **无意义集** $h=\varnothing^*$.

Liao and Xu(2014a) 从犹豫模糊集定义和实际的决策工程角度对上述这些特殊的犹豫模糊元素进行了详细的阐述. 考虑一个由若干来自不同领域的决策者组成的决策团体, 他们用犹豫模糊元素对所给定的方案进行评估, 空集表示所有决策者反对该方案; 全集表示所有决策者同意该方案; 完全无知集表示所有决策者对该方案无想法, 不知道如何去选择; 无意义集意味着无意义.

为了对犹豫模糊元素进行比较, Xia and Xu(2011a) 给出了下列排序方法:

定义 1.2(Xia and Xu, 2011a) 设 h 为犹豫模糊元素, 则称 $s(h)=\dfrac{1}{l_h}\sum\limits_{\gamma\in h}\gamma$ 为 h 的得分, 其中 l_h 为 h 中元素的个数. 对于两个犹豫模糊元素 h_1 和 h_2, 若 $s(h_1)>s(h_2)$, 则 h_1 优于 h_2, 记为 $h_1>h_2$; 若 $s(h_1)=s(h_2)$, 则 h_1 与 h_2 无差别, 记为 $h_1\sim h_2$.

例 1.2 设 $h_1=\{0.2,0.4,0.5\}$, $h_2=\{0.3,0.4\}$ 和 $h_3=\{0.3,0.2,0.5,0.6\}$ 为三个犹豫模糊元素, 则根据定义 1.2, 可得

$$s(h_1)=\frac{0.2+0.4+0.5}{3}=0.367$$
$$s(h_2)=\frac{0.3+0.4}{2}=0.350$$
$$s(h_3)=\frac{0.3+0.2+0.5+0.6}{4}=0.400$$

所以, $s(h_3)>s(h_1)>s(h_2)$, 由此可得 $h_3>h_1>h_2$.

我们注意到 $s(h)$ 直接与 h 中所有元素的均值相关: 均值越大, 得分 $s(h)$ 越高, 因此, h 越优. 然而, 在一些特殊情形, 该排序方法无法辨别两个犹豫模糊元素. 下面举例说明:

例 1.3(Liao et al., 2014) 假设 $h_1=\{0.1,0.1,0.7\}$ 和 $h_2=\{0.2,0.4\}$ 为两个犹豫模糊元素, 则根据定义 1.2, 可得

$$s(h_1)=\frac{0.1+0.1+0.7}{3}=0.3,\quad s(h_2)=\frac{0.2+0.4}{2}=0.3$$

由于 $s(h_1)=s(h_2)$, 因此, 通过定义 1.2 我们不能判别 h_1 和 h_2 的优劣. 实际上, 此类情况在现实中经常发生. 显然, 定义 1.2 没有考虑两个犹豫模糊元素 h_1 和 h_2 的得分值相同且偏差度不同的情形. 一个犹豫模糊元素中所有元素关于其均值的偏差度刻画了这些元素的一致性或相容性程度. 为了更好地描述该问题, Chen et al. (2013a) 定义了偏差度的概念:

定义 1.3(Chen et al., 2013a) 给定一个犹豫模糊元素 h, 其偏差度 $\bar{\sigma}(h)$ 定义