



“十二五”国家重点图书出版规划项目
航空航天精品系列

ADVANCED DYNAMICS

高等动力学

● 编著 赵 婕 于开平



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



“十二五”国家重点图书出版规划项目
航空航天精品系列

ADVANCED DYNAMICS

高等动力学

● 编著 赵婕 于开平



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

高等动力学研究离散系统的宏观机械运动,使用牛顿力学基本原理分析系统的动力学行为,包括分析力学基础、刚体动力学、陀螺力学、多体动力学、运动稳定性理论等。

本书主要介绍分析力学、刚体动力学和运动稳定性等动力学基础学科的基本理论及其在航空航天工程中的一些重要应用,包括使用分析力学经典基本动力学方程及其新近发展的新型动力学方程对柔性航天器进行动力学建模、刚柔耦合系统中的运动稳定性研究方法等,并给出了若干柔性航天器动力学建模及运动稳定性分析的实例。

本书可作为高等院校力学类、航空航天、机械和动力专业本科生和研究生的分析力学、高等动力学课程教材,也可供有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等动力学/赵婕,于开平编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.7

ISBN 978-7-5603-6187-1

I. ①高… II. ①赵… ②于… III. ①动力学 IV. ①O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 216728 号

策划编辑 杜 燕

责任编辑 张 瑞

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.25 字数 240 千字

版 次 2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6187-1

定 价 26.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

近代航空航天事业的发展使得力学、控制及机械设计等学科的联系越来越紧密,航天器结构的复杂性要求各学科的研究人员必须掌握其他相关学科的主要内容,了解其研究思路及设计需求,从而更好地完善自身。这种交叉融合已经受到了各学科专家学者的高度重视,比如黄琳院士就指出过,稳定性理论源于力学,控制学科的进一步发展必须要贴近力学。事实上,无论是平衡位置的稳定性问题,还是动力系统在控制作用下的镇定化问题,从力学角度分析理解控制方程,将其中的控制赋予明确的物理意义,都将加深对控制问题的理解,有助于开阔思路,更好地解决问题。

力学及控制类学科在机械设计制造中的重要性一直以来都受到了充分的肯定,值得一提的是随着我国载人航天事业的发展,空间站的结构控制以及空间机械臂的设计制造使得机械设计及控制类专业迫切要求深入理解复杂结构系统动力学建模的基本力学原理。在最近几年的教学中,控制及机械类专业学生对动力学建模基本原理深入掌握的需求表现得尤为明显,如何适应新的科技发展要求,将经典学科的内容与现代工业需求进一步结合,在本科生及研究生教学中贯彻以学生为主体的教育方针,是需要我们严肃思考的问题。为培养学生使用经典学科的经典理论解决新问题的能力,一本与时俱进、结合学科研究前沿的教材显然是必需的。基于这种想法,几年来在实际教学中我们试验撰写了适应新型需求的讲义。我们的基本思路为,尽量将经典力学体系化,同时注重从力学的角度将控制作用赋予明确的物理意义,特别强调明确运动微分方程中各项的力学意义对系统运动特性确定的贡献。对于力学专业的学生,使学生了解控制需求,从而辅助系统模型的建立;对于机械、控制专业的学生,使他们明确具体系统参数对应的物理模型,了解具有实际物理意义后对控制设计的辅助作用。

应当指出,在动力学与控制方向上,结束理论力学的学习之后,面临着复杂结构的动力学问题的研究是比较困难的。不同于理论力学中具有明确物理意义的矢量分析,此类复杂系统的动力学分析中需要使用大量数学手段,而且这些数学运算与实际物理意义的对应关系并不明确。对此,本书建立了系统化的描述方式,以演绎的方式进行理论推导,注重经典力学的体系化,形成了具有一定特点的公理化体系。同时,从力学基本概念的角度对系统运动微分方程中的各数学项进行理解,讨论其物理意义,这对深入了解系统、进而更好地完成系统设计具有积极的意义。

综上所述,本书的主要特点有如下三个方面:

- (1)合理安排结构,注重经典力学体系化;
- (2)立足力学与控制学科的融合,强调数学描述与物理意义的对应;

(3)结合航天器复杂结构动力学分析,明确力学基本概念在系统特性中分析的作用。

本书主要内容来源于作者在哈尔滨工业大学力学专业本科生分析力学课程与面向力学、机械、航天等学科的研究生高等动力学课程的讲义,在成书过程中参考了许多国内外专家的相关著作,在此对这些学者表示崇高的敬意及诚挚的谢意!对帮助本书校订、编辑的工作人员表示感谢!

受作者水平限制,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请广大读者提出宝贵意见。

作者

2017年5月

目 录

绪论	1
第 1 章 分析力学基础	3
1.1 基本概念	3
1.2 基本原理·动力学普遍方程	11
1.3 基本动力学量	15
1.4 功与势能	16
1.5 动力学基本定理	18
1.6 哈密顿变分原理	19
习题	20
第 2 章 完整系统动力学微分方程	22
2.1 拉格朗日方程(第二类)	22
2.2 哈密顿正则方程	32
2.3 劳斯方程(完整系统)	36
习题	38
第 3 章 非完整系统动力学微分方程	41
3.1 拉格朗日乘子法·拉格朗日第一类方程与劳斯方程	42
3.2 阿贝尔方程	45
3.3 凯恩方程	47
习题	49
第 4 章 刚体动力学	51
4.1 刚体运动学·基本定义与定理	51
4.2 刚体的基本动力学量	70
4.3 刚体的定点运动	79
4.4 刚体的一般运动	90
4.5 刚体复合运动的应用举例	93
习题	102
第 5 章 运动稳定性基础	105
5.1 基本概念	106
5.2 扰动运动微分方程	109
5.3 李雅普诺夫一次近似理论	114

5.4 李雅普诺夫直接法(第二法)	117
习题	129
第 6 章 力学系统中力的结构对运动稳定性的影响	132
6.1 力的分类	132
6.2 不同类型的力在扰动运动方程中的描述	139
6.3 稳定性系数	141
6.4 陀螺力和耗散力对有势系统平衡稳定性的影响	142
6.5 仅在陀螺力和耗散力作用下的平衡稳定性	146
6.6 约束阻尼力对平衡稳定性的影响	149
习题	153
参考文献	155

绪 论

随着工业化的进展,机械系统的结构复杂程度越来越高,促进了动力学学科的全方面发展,主要研究牛顿力学的基本原理和以牛顿力学为基础的机械系统运动中的动力学问题。具体的研究对象为质点、质点系、刚体和多体(多刚体、多柔体)系统,包括牛顿矢量力学、分析力学、刚体动力学、陀螺力学、运动稳定性理论、振动理论、多体系统动力学等分支学科。

动力学的形成以1687年牛顿发表具有划时代意义的《自然哲学之数学原理》为标志,这本书中给出了日后成为力学基础的三大基本定律,并以严整的公理化体系结构为随后发展的力学各学科在理论构建上树立了可遵循的范例。牛顿力学的主要研究对象为质点,也称为质点动力学,通过矢量分析的方式解决了结构较为简单的系统动力学问题。18世纪工业飞速发展,大量前所未有的复杂机械系统投入生产使用,牛顿矢量力学用于建立此种规模的系统动力学方程极为烦琐,需要寻找更为有效的分析方法。1788年,拉格朗日在其经典著作《分析力学》中,以质点系为研究对象,选择广义坐标描述系统运动,取代矢量分析转而研究标量形式的功和能。将质点系的受力分析转化为对特定动力学函数的求导计算,极大地简化了约束质点系问题的建模,成为与牛顿力学并驾齐驱的基础学科。当动力系统中刚硬物体相对其质心的运动不可忽视时,需要采用刚体模型。刚体是动力学研究的基本对象之一,合理描述其运动是必须解决的首要问题。刚体可视为特殊的质点系,由无穷多的质点组成,其基本特点为运动过程中任意两点之间的距离始终保持不变。不同于有限质点系,刚体的运动无法由其内部各点的位置坐标确定,如何解决这一问题 是刚体运动学的核心。刚体动力学的奠基人欧拉创造性地提出了刚体的运动学描述方法,以基点位置坐标和绕基点转动的三个角度坐标确定刚体运动,从而使系统的数学描述成为可能。牛顿矢量力学、拉格朗日分析力学与欧拉刚体力学一脉相承,完整地解决了质点、质点系和刚体的动力学问题,通常合称其为经典力学。

完成系统的动力学建模之后,经典力学的另一主要研究内容即为方程解的分析,如首次积分的讨论等。应当说明,系统动力学方程的求解事实上是极为困难的,即使是平面单摆这样简单的情形,其动力学方程也是非线性的二阶微分方程,定点运动刚体的解更是讨论了近百年。事实上,在很多情况下,我们对系统动力学方程的全部解的具体形式并不特别关心,而仅关注某些特定的解及其实现问题。比如在铅垂面内运动的单摆存在上、下两个平衡位置,上面的平衡位置在实际上是不可能实现的。这些讨论解的存在及实现的问题归结为运动稳定性的问题。从牛顿时代起人们就已经开始了稳定性问题的研究,1892年李雅普诺夫在他的博士学位论文《运动稳定性一般问题》中首次给出了稳定性的严格数学定义及判别定理,成为稳定性研究的理论依据。运动稳定性理论广泛应用于国民生产的各领域中,特别是在工程中有着极为重要的意义。运动稳定性问题来源于力学,也是动

力学的重要研究方向之一。

随着现代工业发展,在航空航天、机械制造、机器人、车辆等领域出现了大量复杂的工程结构,其主要特点为系统包含多个物体,且各部件做大范围运动的同时还可能伴有柔性变形,此类系统称为多体系统。多体系统建模时通常将其抽象为质点、刚体和变形体的不同形式的组合,动力学研究仍然是以经典力学的基本概念、原理及分析方法为基础,并辅以现代数学及计算方法提供的各种手段。由于系统的复杂性,对其进行具体分析时必须考虑到不同系统的特征,经过众多研究者的努力,已经发展出许多实用有效的方法,形成了专门的学科分支。与工程技术及自然科学其他学科相结合,形成更为适用的动力学研究方法是动力学与控制学科的发展方向。

本书面向具有理论力学基本知识,需要进一步加强复杂系统动力学分析能力的相关专业的本科生、研究生,主要包括分析力学基础、刚体动力学与运动稳定性理论基础。3部分基本思路为继承牛顿力学的理论体系,基于基本概念与基本原理逐层展开,并辅以航天工程中若干重要实例解释说明基础理论的应用方式。力求主线清晰、结构严整,便于核心知识的了解与掌握。其中,第1、2章为分析力学基础,第3章介绍非完整系统动力学,第4章研究刚体动力学,第5、6章为运动稳定性理论。3部分均可独立成篇,可根据不同需求进行选择。

第 1 章 分析力学基础

本书所研究的内容隶属于动力学学科范畴,即研究宏观离散系统的机械运动。随着工业的发展,机械系统日益复杂化,动力学的研究范围也顺应实际需求,从最为基本的质点动力学问题逐步面向质点系、刚体,直至多体系统的动力学问题。动力学的基础是牛顿力学,其学科划分有多种方法,其中,基于研究对象的不同可分为质点动力学、质点系动力学、刚体动力学、多刚体系统动力学及多柔体系统动力学等。近代力学的奠基人牛顿本人完美地解决了质点动力学问题,并给出了作为力学基础的三大基本原理。但是对于结构复杂的机械系统,使用牛顿力学的矢量分析显得非常烦琐,近代数学的飞速发展,为解决结构更为复杂的系统动力学问题提供了必需的理论基础和必要的分析手段。1788 年拉格朗日发表了经典著作《分析力学》,选择标量形式的广义坐标代替矢径,以虚位移原理和达朗贝尔原理为基础,用能量与功的分析取代力与力矩的分析,形成与牛顿力学并驾齐驱的力学体系,成为力学的基础学科之一。分析力学方法最初是针对质点系问题提出的,因此有时也称为质点系动力学。随着其在各学科领域获得了成功应用,这门学科展示出了强大的生命力与适应性,特别是近代微分几何的观点使得分析力学成为现代物理的基石,同时分析力学中提炼出的基本问题也极大地推动了数学科学的理论研究。可以说,分析力学是动力学领域内继牛顿力学之后的又一经典体系,是现代动力学分析的基础,其基本概念与思维方法已渗入到现代数学、物理、力学等各相关基础研究与工程应用领域中。

作为经典力学的基础理论学科,分析力学继承了牛顿力学的严整体系,也是以牛顿基本原理为基础的公理化体系。本章介绍分析力学的基本概念,包括约束、广义坐标、虚位移等以及作为基本原理的动力学普遍方程。

§ 1.1 基本概念

1-1.1 约束及其分类

1.1.1.1 约束

动力学中将质点系视为质点的集合来研究。质点系的约束是指对系统内各质点运动的一种限制,这种限制可以用约束方程来表示。约束是存在于确定质点位置和速度之间的关系的描述,并且在系统运动的过程中这些关系总是成立的。约束对系统运动的限制不因受力而改变。

那些彼此之间距离始终保持不变的质点的集合可认为是由连接这些点的无质量的不可拉伸杆提供约束,在动力学中这是绝对刚体的模型。若质点系不存在约束,则称为自由的,太阳系即为自由的(太阳及行星可视为质点),弹性体、压缩性液体同样是自由的。

1.1.1.2 约束的分类

将质点在惯性笛卡尔坐标系中进行描述,在 $OXYZ$ 坐标系中,质点 M_i 的矢径 $\mathbf{OM}_i$ 由向量 $\mathbf{r}_i$ 表示,下标 i 表示质点的标号,取值为 $1, \dots, N$, N 为质点系中质点的个数。

(1) 完整和非完整约束。

最简单也是最重要的一类约束分类方法为:完整约束和非完整约束分类,这种分类方法取决于约束是否只对质点的位置(坐标)进行限制。若约束方程仅对系统位置(质点坐标)加以限制,则称为完整约束或几何约束(位置约束)。其约束方程为

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad (k=1, \dots, r) \quad (1.1.1)$$

式中 r ——约束方程的个数,且 $r \leq 3N$,所有约束都是完整的系统称为完整系统。

【例 1.1】 图 1.1.1 所示球面摆的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - L^2 = 0 \quad (\text{为完整约束})$$

如果约束方程包括速度的分量,即 $f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}, t) = 0$,则称约束为微分约束。如果微分约束可写成质点坐标与时间的函数(就像完整约束的情况),则称微分约束是可积的。不可积的微分约束称为非完整约束。非完整约束(有时也称为运动约束)表示系统各质点的速度之间的关系,并且不能转化为位置之间的联系。

【例 1.2】 图 1.1.2 所示为光滑水平线上做纯滚动的圆盘,其约束方程为 $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$,不失一般性,当 $x(0) = 0, \theta(0) = 0$ 时, $x - R\theta = 0$ 。

非完整约束的经典例子即为空间曲面上做纯滚动的刚体,其在滚动点处无相对滑动。大多数能实际遇到的非完整约束问题,其约束方程为质点速度的一次代数方程,可写作:

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} \dot{x}_i + A_{k0} = 0 \quad (k=1, \dots, s) \quad (1.1.2)$$

也可将各项乘以 dt ,化作

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} dx_i + A_{k0} dt = 0 \quad (k=1, \dots, s) \quad (1.1.3)$$

其中 $A_{ki} = A_{ki}(x_i, t) \quad (i=0, 1, \dots, 3N)$

事实上,对完整约束方程(1.1.1) 计算全微分,可得与式(1.1.3) 相类似的形式:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \quad (k=1, \dots, r) \quad (1.1.4)$$

可见微分形式的约束条件(1.1.3) 也可以同时表示完整约束,称其为一阶线性微分约束。

若系统内同时存在 r 个完整约束和 s 个非完整约束,则可统一表示为

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} dx_i + A_{k0} dt = 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.5)$$

其中 r 个完整约束的系数对应为

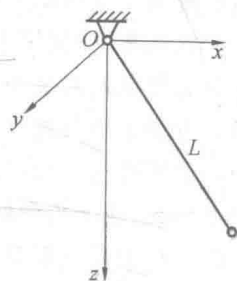


图 1.1.1

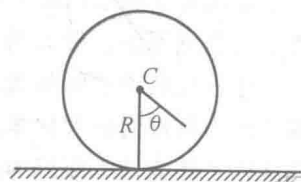


图 1.1.2

$$A_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad A_{k0} = \frac{\partial f_k}{\partial t} \quad (k=1, \dots, r; i=1, \dots, 3N) \quad (1.1.6)$$

(2) 定常和非定常约束。

按照约束方程中是否显含时间 t 可将约束分为定常约束和非定常约束。

定常约束表示为

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}) = 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.7)$$

非定常约束表示为

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}; t) = 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.8)$$

【例 1.3】 图 1.1.3 为安装在可移动小车上的球面摆, 其运动方程为

$$[x - x_0(t)]^2 + [y - y_0(t)]^2 + [z - z_0(t)]^2 - L^2 = 0$$

可以看出, 定常约束的约束曲面固定不变, 非定常约束的约束曲面随时间而改变。

(3) 单侧约束和双侧约束。

按照约束方程是否为不等式, 可将约束分为单侧约束和双侧约束。当约束方程为等式时, 形成的约束为双侧约束。本书中所涉及的均为双侧约束。

单侧约束方程表示为

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}; t) \leq 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.9)$$

双侧约束方程表示为

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}; t) = 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.10)$$

事实上, 双侧约束方程(1.1.10)形成了空间中的超曲面。双侧约束要求状态空间中的点不能离开约束曲面, 单侧约束允许状态空间中的点在约束曲面的一侧运动, 但不能进入另一侧。

【例 1.4】 图 1.1.4 在球壳内运动的小球受到的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0$$

1.1.2 广义坐标、多余坐标及准坐标

1.1.2.1 广义坐标和自由度

确定质点位形的独立参数(长度或角度)称为广义坐标, 记作 q_j ($j=1, 2, \dots, l$)。同一个系统其广义坐标的选取可以是不同的, 具体根据实际需求进行选择。系统内各点的笛卡尔坐标与广义坐标之间的关系是运动学描述的核心内容, 广义坐标单值确定各质点的笛卡尔坐标为

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_l, t) \quad (i=1, \dots, 3N) \quad (1.1.11)$$

系统的广义坐标个数由质点数和约束数决定。设 N 个质点组成的系统受到 r 个完整约束的限制, 则描述质点位形的 $3N$ 个笛卡尔坐标中只有 $3N-r$ 个独立变量, 此组独立变量的个数称为自由度。完整系统的广义坐标数 l 与自由度 $f=3N-r$ 相等。若系统除

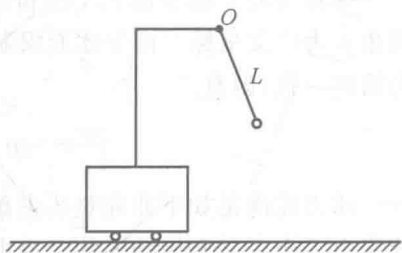


图 1.1.3

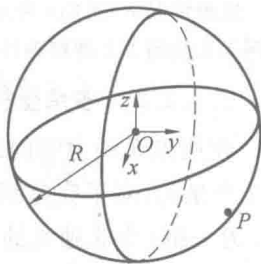


图 1.1.4

r 个完整约束以外,还受到 s 个非完整约束的限制,则系统的自由度为 $f=3N-r-s$ 。由于非完整约束方程不可积分,确定系统位形的广义坐标仍为 $l=3N-r$ 个,大于系统的自由度 f 。广义坐标对时间 t 的导数称为广义速度。

由式(1.1.11)及(1.1.2)可得出限制广义速度的 s 个非完整约束方程:

$$\sum_{j=1}^l B_{kj} \dot{q}_j + B_{k0} = 0 \quad (k=1, \dots, s) \quad (1.1.12)$$

式中

$$B_{kj} = \sum_{i=1}^{3N} A_{ki} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, B_{k0} = A_{k0} + \sum_{i=1}^{3N} A_{ki} \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (k=1, \dots, s; j=1, \dots, l) \quad (1.1.13)$$

【例 1.5】 图 1.1.5 所示冰刀在水平面上滑动。

选择质心 C 的坐标 x_C, y_C 和雪橇对称轴 AB 相对 x 轴的倾角 θ 为广义坐标。由于冰面限制点 C 的速度方向与 AB 方向始终一致,即有

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \tan \theta$$

冰刀需满足如下非完整约束条件: $\tan \theta \dot{x}_C - \dot{y}_C = 0$, 此系统为由 3 个广义坐标描述的二自由度非完整系统。

关于微分约束可积分条件的简要说明。

微分约束(1.1.5)可积分为几何约束,如下式成立:

$$\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_{ki}}{\partial t} = \frac{\partial A_{k0}}{\partial x_i} \quad i=1, \dots, 3N; j=1, \dots, l \quad (1)$$

特别地,若考虑约束定常时的情况,此时可积分条件为

$$\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i} \quad i=1, \dots, 3N; j=1, \dots, l \quad (2)$$

事实上,对于下列坐标和时间的函数 $f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t)$, 当 $A_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, A_{k0} = \frac{\partial f_k}{\partial t}$ 时,此时式(1.1.5)表示全微分 $df_k = 0$, 即 f_k 为常数 C_k , 关系式为

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t) - C_k = 0 \quad (3)$$

这种情况下,式(3)为完整约束方程。注意到条件(1)为充分的,但不是可积分的必要条件。试对例 1.5 及例 1.2 理解条件(1)。

1.1.2.2 多余坐标

在质点系动力学问题分析中为了更为简便地描述系统的状态,有时会选用超过必要的 l 个坐标(对于完整系统, l 为自由度数)的参数坐标 $q_1, \dots, q_l, \dots, q_{l+s}$ 。这里 $q_{l+1}, \dots, q_{l+s}$ 为一组 s 个非独立的坐标,称其为多余坐标。显然,这 $l+s$ 个参数中存在着 s 个关系式(其中可能显含时间):

$$f_k(q_1, \dots, q_l, q_{l+1}, \dots, q_{l+s}; t) = 0 \quad (k=1, \dots, s) \quad (1.1.14)$$

若将此方程对时间 t 求导,可得形式与式(1.1.5)相同的一阶线性微分约束方程,其中的系数 A_{ki}, A_{k0} 由式(1.1.6)定义。注意到,完整约束方程(1.1.14)求导后使得非完整系统和含多余坐标的完整系统在形式上统一起来,区别仅在于后者的约束方程为可积分的情形。因此得出结论,需要使用非完整系统的处理方法来解决含多余坐标的完整系

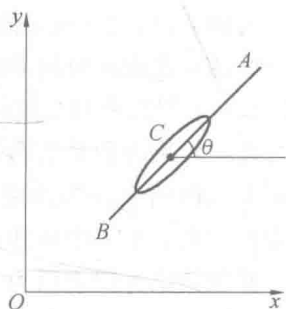


图 1.1.5

统。

由式(1.1.14)可知,多余坐标 $q_{l+1}, \dots, q_{l+s}$ 可以由 $q_1, \dots, q_l$ 及时间 t 确定:

$$q_{l+\mu} = q_{l+\mu}(q_1, \dots, q_l; t) \quad (\mu = 1, \dots, s) \quad (1.1.15)$$

包含多余坐标的广义坐标 $q_1, \dots, q_l, q_{l+1}, \dots, q_{l+s}$ 表示的笛卡尔坐标为

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{l+s}; t) \quad (i = 1, \dots, 3N) \quad (1.1.16)$$

将多余坐标(1.1.15)的值代入式(1.1.16)中就得到了形如式(1.1.10)的形式,但有时这个形式要远远复杂于式(1.1.16),例如下例中的平面四连杆机构。

【例 1.6】 平面四连杆机构如图 1.1.6 所示,为单自由度系统。但在推导中需要三个角度坐标 ψ, θ, φ 才能使系统中任意一点的笛卡尔坐标形式变得比较简单。

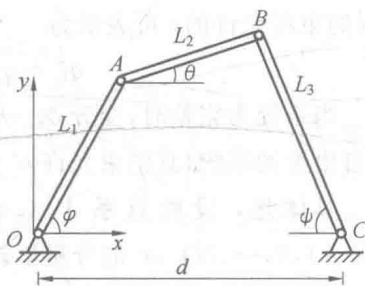


图 1.1.6

约束方程(1.1.14)很容易确定:

$$f_1: L_1 \cos \varphi + L_2 \cos \theta + L_3 \cos \psi - d = 0$$

$$f_2: L_1 \sin \varphi + L_2 \sin \theta - L_3 \sin \psi = 0$$

1.1.3 准(伪)坐标和准(伪)速度

设系统的位形由 l 个独立的参数 $q_1, \dots, q_l$ 给出,其速度描述有时并不直接使用广义速度 $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$,而是使用它们的某些线性组合形式,即

$$u_\nu = a_{\nu 0} + a_{\nu 1} \dot{q}_1 + a_{\nu 2} \dot{q}_2 + \dots + a_{\nu n} \dot{q}_n \quad (\nu = 1, \dots, f) \quad (1.1.17)$$

其中系数 $a_{\nu i} (i = 0, 1, \dots, n)$ 为广义坐标 q_i 和时间 t 的函数。

量 u_ν 称为准速度,在刚体的运动分析中,引入准速度可以避免复杂的推导,是极其方便的。通常,准速度不能积分,即式(1.1.17)中的 u_ν 不能写成坐标的全微分的形式。但为了简化公式及文字叙述,引入如下的准坐标,约定:

$$\frac{d\pi_\nu}{dt} = u_\nu = \dot{\pi}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, f) \quad (1.1.18)$$

其中小零(代替表示导数意义的点, π_ν 上方的)表示谈及的是说明意义,而非量 π_ν 关于时间的导数。当然,如果表达式(1.1.17)可积分,那么相当于引入了关系式:

$$\pi_\nu = \pi_\nu(q_1, \dots, q_l) \quad (\nu = 1, \dots, f) \quad (1.1.19)$$

则给出的仅是由旧的广义坐标 $q_1, \dots, q_l$ 到新的广义坐标 $\pi_1, \dots, \pi_f$ 的变换。

1.1.4 虚位移、虚速度及虚加速度

1.1.4.1 虚位移

广义坐标 $q_1, \dots, q_l$ 是在给出的初始条件下描述系统运动的时间的函数。这个时间的函数集合为

$$q_1(t), \dots, q_l(t) \quad (1.1.20)$$

确定了系统实际发生的运动。广义坐标的微分 dq_i , 即其在真实运动中的无限小的位移与

时间区间 dt 成比例, 即

$$dq_j = \dot{q}_j dt \quad (1.1.21)$$

事实上, 在力学问题的分析中引入另一种类型的无限小量是十分有益的。抛开运动, 我们提出问题, 在当前时刻, 系统的约束允许怎样的位形集合。如果仅限于分析无限接近真实路径的位形, 并用 $\delta q_1, \dots, \delta q_l$ 表示广义坐标的无限小位移, 则称其为虚位移, 这个集合(约束所允许的)可表示为

$$q_1^* = q_1(t) + \delta q_1, \dots, q_l^* = q_l(t) + \delta q_l \quad (1.1.22)$$

当系统为完整时, 变分 $\delta q_k (k=1, \dots, l)$ 是完全任意的。我们可以说, 在时刻 t 具有 n 个自由度的系统, 其约束允许 ∞^n 个位移。

具体地, 设质点系 $P_i (i=1, \dots, N)$ 中各质点相对固定参考点 O 的矢径为 $\mathbf{r}_i (i=1, 2, \dots, N)$, $\mathbf{r}_i$ 的分量形式写作 $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ 。若系统中存在 r 个完整约束和 s 个非完整约束, 则各质点在无限小时间间隔 dt 内所产生的无限小位移 $d\mathbf{r}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 或 $dx_i (i=1, 2, \dots, 3N)$ 必须满足约束方程:

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} dx_i + A_{k0} dt = 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.23)$$

质点系仅需满足约束条件的运动称为可能运动, 在给定的时间间隔内质点系的可能运动中满足约束方程(1.1.23)的无限小位移 $d\mathbf{r}_i$ 称为质点系的可能位移。当约束为定常约束时, 方程(1.1.23)中的 A_{k0} 为零, 可简化为

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} dx_i = 0 \quad (k=1, \dots, r+s) \quad (1.1.24)$$

质点系真实发生的微小位移称为实位移, 它是无数可能位移中的一个。实位移是在一定的时间过程中发生的, 如果时间间隔为零, 则实位移也为零。实位移既要满足动力学基本规律和运动的初始条件, 也要满足系统的约束方程(1.1.23)或(1.1.24)。

虚位移是分析力学的一个重要基本概念, 与上述可能位移及实位移有着本质的区别。在给定的时间和位形上, 约束允许的条件下, 质点系发生的无限小位移称为虚位移。虚位移与时间的变化无关, 它表示的是固定时刻约束所允许的质点的微小位移。当约束定常时, 虚位移就是可能位移。对于非定常约束, 质点的虚位移为约束瞬时凝固时, 其所允许发生的无限小位移。在虚位移的表达式中 δ 具有等时变分的意义, 即各质点的虚位移可表示为矢径或坐标的变分, $\delta \mathbf{r}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 或 $\delta x_i (i=1, 2, \dots, 3N)$ 。令式(1.1.23)中的 $dt=0$, 将 dx_i 换作 δx_i , 则虚位移应满足下列条件:

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} \delta x_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r+s) \quad (1.1.25)$$

对照式(1.1.24)可见, 当约束定常时, 虚位移与可能的位移完全相同, 但对于非定常约束, 一般情况下约束条件(1.1.25)不同于式(1.1.23); 因此虚位移不一定等同于可能位移。

下面对虚位移的定义进行进一步的解释。设质点系在同一时刻, 同一位置有两组可能位移 $d\mathbf{x}_i^*$ 和 $d\mathbf{x}_i^{**} (i=1, \dots, 3N)$, 它们分别满足约束条件(1.1.23), 即有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3N} A_{ki} dx_i^* + A_{k0} dt = 0 \\ \sum_{i=1}^{3N} A_{ki} dx_i^{**} + A_{k0} dt = 0 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, r+s) \quad (1.1.26)$$

将以上两式相减, 令

$$\delta x_i = dx_i^* - dx_i^{**} \quad (i=1, \dots, N) \quad (1.1.27)$$

即可得约束方程(1.1.25)。由此, 也可将虚位移视为质点系在同一瞬时, 同一位形上, 在相同的时间间隔内两组可能位移 dx_i^* 和 dx_i^{**} 之差。如果一质点系由 N 个质点组成, 其上作用 r 个完整约束, s 个非完整约束, 则由约束条件(1.1.25), 虚位移 δx_i 中只有 $3N - r - s$ 个独立变量, 因此也可将系统的独立虚位移数目(变分数)作为系统的自由度的定义。

对于斜面固定和做平移两种情形, 来分析沿斜面运动质点的可能位移和虚位移。当斜面固定时, 质点的可能位移和虚位移相同(图 1.1.7(a)), 斜面做平移时质点的可能位移应考虑斜面牵连运动的影响, 而质点的虚位移等于约束凝固时的可能位移, 与斜面固定时的可能位移完全相同(图 1.1.7(b))。虚位移反映了约束给定时刻的性质。

实际上, 在定常约束的情况下, 可能位移、实位移与虚位移的约束方程形式相同, 可以将虚位移视为可能发生却尚未发生的可能位移, 实位移是众多虚位移, 即可能位移中的一个。

在非定常约束的情况下, 可能位移、实位移与虚位移的约束方程不再相同, 不能将虚位移视为是可能位移, 实位移与虚位移也不再具有关联性。

1.1.4.2 虚速度

质点系的可能速度是其在可能运动中的速度, 这里为与可能位移对应的速度, 即约束允许的运动速度。将式(1.1.23)中的质点的无限小位移 dx_i 除以完成此位移所需的无限小的时间间隔 dt , 即得到质点的速度 $\dot{x}_i$ 应满足的约束条件为

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} \dot{x}_i + A_{k0} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, r+s) \quad (1.1.28)$$

质点系的真实运动中的速度称为实速度, 各质点的实速度既要满足动力学基本定律和运动的初始条件, 又要满足约束方程(1.1.28)。不难得出结论, 实速度是可能速度中的一个。

类比于虚位移的定义, 可将质点系的虚速度定义为约束瞬间“凝固”, 质点系保持原有位形不变时, 约束所允许发生的可能速度。这里, 无须力或运动初始条件以及任何时间变化。将虚速度记作 $\Delta \dot{\mathbf{r}}_i$ ($i=1, \dots, N$) 或 $\Delta \dot{x}_i$ ($i=1, 2, \dots, 3N$), 称为速度的变更, 这里符

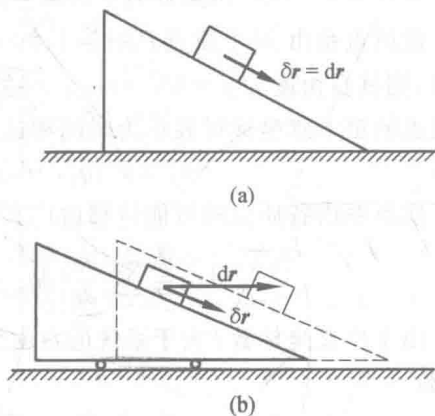


图 1.1.7

号 Δ 表示有限变更,即表明速度可以是有限量,与符号 δ 表示的无限小变分相区别。同样,类似于虚位移的数学解释,虚速度也可定义为在同一时刻,同一位置两组可能速度 $\dot{x}_i^*$ 和 $\dot{x}_i^{**}$ ($i=1,2,\dots,3N$) 之差,即

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i^* - \dot{x}_i^{**} \quad (i=1,2,\dots,3N) \quad (1.1.29)$$

将 $\dot{x}_i^*$ 和 $\dot{x}_i^{**}$ 代入式(1.1.2)并相减,即导出与虚位移约束条件(1.1.25)相同的约束虚速度的条件

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ki} \Delta \dot{x}_i = 0 \quad (k=1,2,\dots,r+s) \quad (1.1.30)$$

在定常约束情况下,质点系的虚速度可视为可能速度。实速度是众多虚速度,即可能速度中的一个。在非定常约束情况下,约束条件(1.1.30)不同于式(1.1.2),因此虚速度不能视为可能速度,实速度也与虚速度不再具有相关性。

1.1.4.3 用广义坐标表示的虚位移和虚速度

设质点系由 N 个质点 P_i ($i=1,2,\dots,N$) 组成,其上作用 r 个完整约束和 s 个非完整约束,则其自由度为 $f=3N-r-s$ 。适当选取 $l=3N-r$ 个广义坐标 q_j ($j=1,2,\dots,l$),各质点的笛卡尔坐标可表示为时间和这组广义坐标的函数,即

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_l, t) \quad (i=1,2,\dots,3N) \quad (1.1.31)$$

质点系内各质点的可能位移由广义坐标的微分 dq_j ($j=1,2,\dots,l$) 表示为

$$dx_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad (i=1,2,\dots,3N) \quad (1.1.32)$$

由于广义坐标数 l 大于系统的自由度数 f , dq_j 不是独立变量,受到约束方程(1.1.12)限制:

$$\sum_{j=1}^l B_{kj} dq_j + B_{k0} dt = 0 \quad (k=1,2,\dots,s) \quad (1.1.33)$$

设质点系在同一时刻、同一位置有两组广义坐标微分 dq_j^* 和 dq_j^{**} ($j=1,2,\dots,l$),分别对应于两组可能位移,即

$$\begin{cases} dx_i^* = \sum_{j=1}^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j^* + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \\ dx_i^{**} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j^{**} + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,3N) \quad (1.1.34)$$

将以上两式相减,由式(1.1.17)将 $dx_i^* - dx_i^{**}$ 以虚位移 δx_i 代替,引入 δq_j ($j=1,\dots,l$) 为广义坐标的等时变分,即同一时刻、同一位置两组广义坐标微分之差为

$$\delta q_j = dq_j^* - dq_j^{**} \quad (j=1,2,\dots,l) \quad (1.1.35)$$

将 dq_j^* 和 dq_j^{**} 代入约束方程(1.1.23)并相减,导出广义坐标变分应满足的约束方程:

$$\sum_{j=1}^l B_{kj} \delta q_j = 0 \quad (k=1,\dots,s) \quad (1.1.36)$$

将式(1.1.22)各项除以 dt ,重复以上推导,可导出用广义速度表示的虚速度为