数理统计及其应用

苏岩 著

科学出版社

数理统计及其应用

苏 岩 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书内容包括概率论知识、统计学的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、主成分分析、因子分析、蒙特卡罗方法和统计漫谈等, 各章附有适量习题. 在基础知识方面, 第 1 章介绍概率论重要概念与公式, 第 2 章至第 5 章介绍数理统计的基本概念、基本原理和基本方法, 第 6 章是多元分析选讲, 第 7 章是随机模拟初步. 在统计发展方面, 统计漫谈介绍垂直密度表示、正态分布与统计应用、贝叶斯统计的发展、经典统计学的创立、统计推断与科学发现等内容. 在统计应用方面, 书中介绍系统可靠性指标的贝叶斯估计、经验 Logistic 回归模型及其在生物学中的应用、股票的主成分分析与因子分析等.

本书可作为数学、统计学和其他理工科专业的教材使用, 也可用作相关院校教师、实际工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数理统计及其应用/苏岩著. —北京: 科学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-03-055837-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①苏… Ⅲ. ①数理统计 Ⅳ. ①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 301024 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 1 月第一次印刷 印张: 16 1/2
字数: 320 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

数理统计是统计学的基础理论. 数理统计广泛应用于理、工、农、医、经济、管理以及人文社会科学等领域, 统计软件使统计计算易于实现. 在网络时代, 数理统计成为理工科各专业必备的基础课程.

全书共 7 章. 第 1 章概率论知识是数理统计的基础. 第 2 章讲授统计学的基本概念与抽样分布定理, 它们是后续章节的基础知识. 第 3 章是参数估计, 第 4 章是假设检验, 这两章的内容是统计推断的主要内容. 第 5 章讨论回归分析, 本章内容体现统计推断在线性模型中的综合应用. 第 6 章叙述主成分分析与因子分析, 并结合多元数据做实证分析. 第 7 章是蒙特卡罗方法, 随机模拟在统计理论和应用之间起到桥梁的作用. 本书注重教材内容的系统性与严谨性, 突出统计思想的阐述, 强调数理统计的具体应用. 在取材和写作上, 本书力图做到以下几点.

(1) 着重于介绍数理统计的基本概念、基本原理和基本方法. 对书中一些主要结论以注释的形式予以直观性解释. 注重举例的多样性, 选配了适量习题. 在本书前 5 章中, 列出了各章的重要概念与公式, 用以阐明各章主要内容与基本要求.

(2) 以阐述有限样本的经典统计推断为主. 本书的前 5 章内容适用于理、工科的本科生教学, 前 5 章最后一节为统计漫谈, 用以进一步阐明统计概念、统计理论及应用进展, 供老师选讲或读者选读.

(3) 简明介绍贝叶斯估计、Logistic 回归模型、大样本统计推断、p 值检验、Bootstrap 方法、椭球对称分布、球面均匀分布统计特征等内容, 用以拓展统计知识. 本书后两章及书中带 $*$ 的部分内容适合硕士研究生教学.

本书第 1~5 章内容在华北电力大学信息与计算科学专业试用了两届, 第 6 章和第 7 章内容曾在华北电力大学应用统计硕士课程中使用. 在授课过程中, 作者对书稿做了适当的修改.

作者衷心感谢对本书予以指导和帮助的专家学者, 非常感谢同学们的投入与反馈. 科学出版社对本书的出版给予了大力支持, 在此表示诚挚的谢意.

由于作者水平有限, 书中不足与疏漏之处在所难免, 恳请广大读者批评指正.

苏岩

2017 年 6 月

目　　录

前言
第 1 章　概率论知识 …… 1
1.1　随机事件与概率 …… 1
1.2　随机变量及其分布函数 …… 6
1.3　数字特征与特征函数 …… 13
1.4　极限定理 …… 22
*1.5　统计漫谈：垂直密度表示 …… 29
习题 1 …… 34
参考文献 …… 37
第 2 章　统计学的基本概念 …… 38
2.1　基本概念 …… 38
2.1.1　总体、样本 …… 38
2.1.2　统计量 …… 38
2.2　抽样分布 …… 41
2.2.1　统计三大分布 …… 41
2.2.2　抽样分布定理 …… 45
2.2.3　顺序统计量的分布 …… 51
*2.3　统计漫谈：正态分布与统计应用 …… 54
2.3.1　正态分布与中心极限定理 …… 54
2.3.2　Brown 运动与 Donsker 不变原理 …… 55
2.3.3　小样本统计与大样本统计 …… 57
2.3.4　结论 …… 58
习题 2 …… 59
参考文献 …… 61
第 3 章　参数估计 …… 62
3.1　参数的点估计 …… 62
3.1.1　矩估计与极大似然估计 …… 62
3.1.2　贝叶斯估计 …… 72
3.2　点估计的评选标准 …… 77
3.3　Cramer-Rao 不等式 …… 83

3.4　区间估计 ···· 87
3.4.1　正态总体参数的置信区间 ···· 88
3.4.2　一般总体下总体参数的置信区间 ···· 94
*3.5　系统可靠性指标的贝叶斯估计 ···· 96
*3.6　统计漫谈：贝叶斯统计的发展 ···· 102
习题 3 ···· 106
参考文献 ···· 110
第 4 章　假设检验 ···· 111
4.1　基本概念 ···· 111
4.2　正态总体参数的假设检验 ···· 114
4.2.1　单个正态总体未知参数的假设检验 ···· 114
4.2.2　两个正态总体未知参数的假设检验 ···· 117
4.3　一般总体下参数的假设检验 ···· 121
4.4　功效函数与 N-P 引理 ···· 128
4.5　拟合优度检验 ···· 132
4.6　独立性检验与齐一性检验 ···· 136
*4.7　统计漫谈：经典统计学的创立 ···· 141
习题 4 ···· 143
参考文献 ···· 146
第 5 章　回归分析 ···· 148
5.1　多元线性回归模型 ···· 148
5.2　最小二乘估计 ···· 149
5.3　显著性检验 ···· 156
5.4　预测问题 ···· 159
5.5　Logistic 回归模型 ···· 162
*5.6　经验 Logistic 回归模型 ···· 166
5.7　单因子方差分析 ···· 170
5.8　双因子方差分析 ···· 173
*5.9　统计漫谈：统计推断与科学发现 ···· 180
5.9.1　遗传学规律的统计探索 ···· 181
5.9.2　统计推断的实践需求 ···· 183
习题 5 ···· 185
参考文献 ···· 188
第 6 章　主成分分析与因子分析 ···· 189
6.1　主成分分析 ···· 189

6.1.1 总体主成分 ······ 189
6.1.2 样本主成分 ······ 193
6.1.3 主成分的几何意义 ······ 195
6.2 因子分析 ······ 197
6.2.1 因子模型 ······ 197
6.2.2 因子模型的参数估计 ······ 200
6.2.3 因子旋转与因子得分 ······ 203
*6.3 椭球对称分布 ······ 207
习题 6 ······ 215
参考文献 ······ 215
第 7 章 蒙特卡罗方法 ······ 216
7.1 随机数的生成 ······ 216
7.2 积分的概率计算方法 ······ 225
7.3 蒙特卡罗推断 ······ 233
7.3.1 Bootstrap 方法 ······ 234
7.3.2 蒙特卡罗模拟 ······ 237
习题 7 ······ 239
参考文献 ······ 242
附表 ······ 243
附表 1 标准正态分布表 ······ 243
附表 2 t 分布表 ······ 244
附表 3 χ^2 分布表 ······ 245
附表 4 F 分布表 ······ 247

第 1 章 概率论知识

概率论是统计学的基础. 为了顺利进入到统计知识部分, 本章将介绍概率论的一些重要定义和定理. 对于读者熟知的基本结论, 我们将只做叙述而不进行证明.

1.1 随机事件与概率

1. 样本空间

随机试验的任一基本结果称为一个基本事件, 随机试验的所有基本事件构成的集合称为样本空间. 称随机试验的基本事件为样本点, 样本空间就是所有样本点构成的集合. 例如, 投掷一粒骰子, 可能出现 6 种结果. 记 "掷出 i 点" 的事件为 A_i, 则诸 A_i 为基本事件. 若以样本点 ω_i 表示事件 $A_i, i=1,2,\cdots,6$, 则该投掷试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

2. 随机事件

随机事件是样本空间的子集, 简称为事件, 一般用大写字母 A,B,C 等表示事件. 称只包含一个样本点的随机事件为基本事件, 称包含两个或多于两个样本点的随机事件为复合事件, 称样本空间 Ω 为必然事件. 称不包含样本点的事件为不可能事件, 用 $\varnothing$ 表示. 在随机试验中, 当且仅当事件 A 中的一个样本点出现时, 称事件 A 发生了.

以投掷一粒骰子为例, $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$ 表示掷出奇数点的事件, $B=\{\omega_3\}$ 为基本事件, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$ 为必然事件. 若在一次投掷中, 点 5 出现了, 则称事件 A 发生了.

3. 事件的关系与运算

设 A,B,C 表示事件.

(1) 事件的包含: 若 $A\subset B$, 则称事件 B 包含事件 A, 即当事件 A 发生时, 事件 B 必发生.

(2) 事件的相等: 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

(3) 事件的并: 称事件 $\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的并, 记为 $A\cup B$. 当且仅当 A,B 中至少有一个事件发生时, 事件 $A\cup B$ 发生.

(4) 事件的交：称事件 $\{\omega|\omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的交, 记为 $A \cap B$, 简记为 AB. 当且仅当 A, B 同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生.

(5) 事件的差：称事件 $\{\omega|\omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$ 为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A - B$. 当且仅当 A 发生而 B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.

(6) 事件的互斥：若 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 是互斥的. 互斥事件在一次试验中不能同时发生.

(7) 事件的对立：若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是对立的. 对立事件 A 与 B 在一次试验中必有一个发生, 且仅有一个发生. 记 A 的对立事件为 $\overline{A}$, 则有 $\overline{A} = \Omega - A$. 对立事件必为互斥事件, 反之不然.

可以验证事件的运算满足交换律、结合律和分配律. 可以验证事件的运算满足德 • 摩根定律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\cup_i A_i} = \cap_i \overline{A}_i, \quad \overline{\cap_i A_i} = \cup_i \overline{A}_i.$$

4. 概率的性质

概率是事件发生的可能性大小的一种数量指标, 事件的概率为 0~1 的一个数. 给随机试验的任一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$. 若集合函数 $P(\cdot)$ 满足非负性、规范性与可列可加性, 则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率. 此为概率的公理化定义.

事件的概率具有下述性质.

(1) 对任意事件 A, 有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, 且有 $P(\Omega) = 1$ 和 $P(\varnothing) = 0$.

(2) 对任意事件 A, B, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 特别地, 当 A 与 B 互斥时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(3) 若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$, 且有 $P(B) = P(A) + P(B - A)$.

(4) 对任意事件 A, 有 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

(5) 设 $B_1, B_2, \cdots$ 为两两互斥事件, 即

$$B_i B_j = \varnothing, \quad i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots,$$

则有

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots) = P(B_1) + P(B_2) + \cdots.$$

5. 条件概率

(1) 给定事件 B 下, 事件 A 发生的条件概率为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

其中, $P(B) > 0$.

(2) 乘法公式: 设 $P(A)>0$, 则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

(3) 全概率公式: 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分. A 为任意事件, 则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

(4) 贝叶斯公式: 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分. A 为任意事件, 且 $P(A)>0$, 则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}.$$

(5) 事件的独立: 若 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 是独立的.

(6) 一般加法公式: 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个事件. 则

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

在全概率公式中, 事件 A 的发生是伴随着 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的发生而发生的. 若把事件 A 看作 "结果", 把 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 看作导致 "结果" 的 "原因", 则可把全概率公式看作由 "原因推结果".

贝叶斯公式是求在事件 A 发生的条件下, 事件 B_i 的发生的概率. 故可把贝叶斯公式看作由 "结果推原因", 即当事件 A 发生时, 事件 B_i 对事件 A 的发生所做的 "贡献".

假设 $P(B)>0$, 事件 A 与事件 B 相互独立的另一充要条件是 $P(A|B)=P(A)$. 事件 B 的发生不影响事件 A 的概率.

例 1.1.1 设 n 件产品中含有 m 件次品, 今从中任取两件产品, 在其中一件是次品的条件下, 求另一件也是次品的概率.

解 在 n 件产品中任取两件, 以 B_1 表示其中至少有一件次品, B_2 表示两件都是次品. 则 $B_2\subset B_1$, 且有

$$\begin{aligned}P(B_1)&=1-P(\overline{B_1})\\&=1-\binom{n-m}{2}\Big/\binom{n}{2}\\&=1-\frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m(2n-m-1)}{n(n-1)}, \\
P(B_2) &= \binom{m}{2} \Big/ \binom{n}{2} \\
&= \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.
\end{aligned}
$$

故所求概率为

$$
\begin{aligned}
P(B_2|B_1) &= \frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)} = \frac{P(B_2)}{P(B_1)} \\
&= \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \Big/ \frac{m(2n-m-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{m-1}{2n-m-1}.
\end{aligned}
$$

例 1.1.2　设 $0 < P(C) < 1$. 若 $P(A|C) \geqslant P(B|C)$ 且有 $P(A|\overline{C}) \geqslant P(B|\overline{C})$, 证明 $P(A) \geqslant P(B)$.

证明　因为 $P(A|C) > P(B|C)$, 所以

$$
\frac{P(AC)}{P(C)} \geqslant \frac{P(BC)}{P(C)} \Rightarrow P(AC) \geqslant P(BC).
$$

同理, 由 $P(A|\overline{C}) > P(B|\overline{C})$, 得

$$
P(A\overline{C}) \geqslant P(B\overline{C}).
$$

故

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap (C \cup \overline{C})) \\
&= P(AC \cup A\overline{C}) \\
&= P(AC) + P(A\overline{C}) \\
&\geqslant P(BC) + P(B\overline{C}) = P(B).
\end{aligned}
$$

例 1.1.3　设 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 且

$$
P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1.
$$

证明事件 A 与 B 相互独立.

证明　$P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 \Leftrightarrow P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B})$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P(A|B) = P(A|\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} \\
&\Leftrightarrow P(\overline{B})P(AB) = P(B)P(A\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow [1-P(B)]P(AB) = P(B)[P(A) - P(AB)] \\
&\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B).
\end{aligned}
$$

故知事件 A 与 B 相互独立.

例 1.1.4 某人欲寄 n 封信, 将 n 个通信地址随意写在 n 个信封上, 试求没有一封信碰对地址的概率.

解 以 B 表示“没有一封信碰对地址”, A 表示“至少有一封信碰对地址”, A_i 表示“第 i 封信碰对地址”, 则有

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad P(B)=1-P(A).$$

由一般加法公式知

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} P(A_iA_j)\\ &+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \end{aligned}$$

因为

$$P(A_i)=\frac{1}{n}, P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)},\cdots,P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!},$$

所以

$$\begin{aligned} P(A)=&\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)}\\ &+\binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}\\ =&1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B)=&1-P(A)\\ =&\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

易知

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{e}^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0<\theta<1.$$

当 $x=-1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{e}}=&1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{(n+1)!}\\ =&1-\left[1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right]+(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{(n+1)!}\\ =&1-P(A)+R_n. \end{aligned}$$

故知

$$P(A)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}+R_n, \quad P(B)=\frac{1}{\mathrm{e}}-R_n.$$

误差项 R_n 的绝对值满足

$$|R_n| = \left|(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{(n+1)!}\right| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

当 $n=7$ 时, $|R_n| < 0.00003$, 其误差不超过万分之一. 此时有

$$P(A) \approx 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.6321, \quad P(B) \approx \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.3679.$$

1.2　随机变量及其分布函数

随机变量及其分布函数概念的引入, 使我们对随机现象的研究转化为对函数的研究. 由此, 可将微积分与代数知识应用于概率论与统计分析.

1. 随机变量

设 $X = X(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的单值实函数, $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$. 若对任意实数 $x \in \mathbf{R}$, $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ 均为事件, 则称 X 为一个随机变量.

设 A 为任一事件, 记示性函数

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

则有 $P(A) = P(I_A(\omega) = 1)$. 由此, 可将对事件 A 发生概率的研究转化为对相应随机变量 $I_A(\omega)$ 的研究.

若随机变量 X 的取值为有限个或可列个不同的值, 则称 X 为离散型随机变量. 常见的离散型随机变量有 0-1 分布、二项分布及泊松分布. 连续型随机变量的特点是其取值充满某个区间. 常见的连续型随机变量有均匀分布、指数分布及正态分布. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.

2. 分布函数

设 X 为一个随机变量, 则对任意 $x \in \mathbf{R}$, 事件 $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ 的概率依赖于 x 值, 记为 $F(x)$. 称

$$F(x) = P(X(\omega) \leqslant x), \quad x \in \mathbf{R}$$

为随机变量 X 的分布函数. 分布函数是单调非降的, 其取值落在 0 与 1 之间, 且有

$$F(x) \to 1,\ x \to \infty; \quad F(x) \to 0,\ x \to -\infty.$$

设 $a < b$, 则 $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$. 随机变量 X 的概率分布与 X 的分布函数 $F(x)$ 具有一一对应关系. 因此, 可以通过分布函数 $F(x)$, 确定随机变量 X 取值的概率特性.

定理 1.2.1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$. 则

$$P(X=x)=F(x)-F(x-),\quad x\in\mathbf{R},$$

其中, $F(x-)=\lim\limits_{t\to x^-}F(t)$.

证明 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有

$$\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n},x\right].$$

记 $A_n=\left(x-\dfrac{1}{n},x\right]$, 易知 $A_1\supset A_2\supset\cdots$. 由概率连续性知

$$\begin{aligned}P(X=x)&=P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}<X\leqslant x\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}P\left(x-\frac{1}{n}<X\leqslant x\right)\\&=\lim_{n\to\infty}[F(x)-F(x-1/n)]\\&=F(x)-F(x-).\end{aligned}$$

例 1.2.1 设 $X\sim b(0,1)$, 求 X 的分布函数.

解 X 的概率分布为 $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$. 设 $X\in\mathbf{R}$, 则有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-p, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

例 1.2.2 设随机变量 X 的分布函数由式 (1.2.2) 给出, 则有

$$P(X=0)=F(0)-F(0-)=(1-p)-0=1-p,$$

$$P(X=1)=F(1)-F(1-)=1-(1-p)=p.$$

3. 概率密度

设 X 为连续型随机变量, $F(x)$ 为 X 的分布函数. 则必存在非负函数 $f(x)$, 使得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.\tag{1.2.3}$$

称式 (1.2.3) 中的 $f(x)$ 为连续型随机变量 X 的概率密度. 若 x 为 $f(x)$ 的连续点, 则有

$$F^{'}(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

设 $a<b$, 则有

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 1.2.3　设 $X\sim U(0,1)$, 求 X 的分布函数.

解　X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{1.2.4}$$

设 $X\in\mathbf{R}$, 则有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases} \tag{1.2.5}$$

例 1.2.4 (指数分布)　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{1.2.6}$$

$\lambda>0$ 为参数. 称 X 服从参数为 λ 的指数分布. X 的分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases} \tag{1.2.7}$$

指数分布可用来描述某些电子元件或系统的使用寿命. 称单位时间间隔内元件失效的条件概率为平均失效率, 即

$$\gamma(x)=\frac{P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x|X>x)}{\Delta x}.$$

设寿命 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则有

$$\begin{aligned}\gamma(x)&=\frac{P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)}{P(X>x)\Delta x}\\ &=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\frac{1}{1-F(x)}\\ &\to\frac{F^{'}(x)}{1-F(x)}=\lambda,\quad \Delta x\to 0.\end{aligned}$$

称 λ 为瞬时失效率.

定理 1.2.2 (泊松定理) 设

$$X_n \sim b(n,p_n), \quad 0<p_n<1,\ n=1,2,\cdots.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$, 则对任意非负整数 k, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=k)=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{1.2.8}$$

泊松分布可用来描述稀有事件发生的概率. 对于较大的 n 及较小的 p_n, 由泊松定理, 可用泊松分布近似二项分布.

4. 多元随机变量及其联合分布函数

在具体应用中, 常遇到多个变量的观测数据. 例如打靶射击弹着点的位置需用其横坐标和纵坐标两个变量表示. 人们做体检时, 多个检查指标之间具有概率相依性. 人的身高 X 和体重 Y 这两个变量间存在一定的概率相关性, 故需对 (X,Y) 做整体性考虑. 称 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的整体 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 元随机变量 (随机向量). 由于多元随机变量与二元随机变量具有相同的概率性质, 下面主要讨论二元随机变量.

若 (X,Y) 只取有限数值对或可列无限多数值对, 则称 (X,Y) 为离散型随机变量. (X,Y) 为连续型随机变量的特点是 (X,Y) 的取值可充满某个区域. 可通过联合概率密度给出连续型随机变量的严格定义.

设 (X,Y) 为二元随机变量, 称

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y), \quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

为 (X,Y) 联合分布函数, 简称分布函数.

定义 1.2.1 设二元随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$. 若存在非负的二元函数 $f(x,y)$, 使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

则称 (X,Y) 为连续型随机变量, 称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度, 简称概率密度.

概率密度 $f(x,y)$ 具有下述性质.

(1) $f(x,y)\geqslant 0$, $F(\infty,\infty)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

(3) 设 D 为平面区域, 则点 (X,Y) 落入 D 的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其几何意义是 $P\{(X,Y)\in D\}$ 为立于区域 D 的以 $f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积.

5. 边缘分布

定义 1.2.2 设二元随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$. 记

$$F_X(x)=F(x,\infty),\quad F_Y(y)=F(\infty,y).$$

分别称 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 为分量 X 和 Y 的边缘分布函数.

定义 1.2.3 设离散型二元随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$P(X=x_i)=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots.$$

分别称 $\{p_{i\cdot}\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{p_{\cdot j}\}_{j=1}^{\infty}$ 为分量 X 和 Y 的边缘概率分布.

定义 1.2.4 设二元随机变量 (X,Y) 为连续型随机变量, $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度. 记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

分别称 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 为分量 X 和 Y 的边缘概率密度.

6. 条件分布

定义 1.2.5 设 (X,Y) 为离散型二元随机变量, $P(Y=y_j)>0$. 称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件概率分布.

同样, 设 $P(X=x_i)>0$. 称

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件概率分布.