HIT

全国优秀数学教师专著系列

The Common and Important Inequalities in Mathematical Olympics

数学奥林匹克中的常见重要不等式

张艳宗　徐银杰　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HIT

全国优秀数学教师专著系列

数学奥林匹克中的常见重要不等式

The Common and Important Inequalities in Mathematical Olympics

张艳宗 徐银杰 编著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书旨在介绍在高中数学奥林匹克竞赛、自主招生考试等中出现的常见重要不等式及其变形、拓展的应用.全书共8章,相互独立,每章精选了国内外数学竞赛中的典型不等式问题为例题,从系统观的视角,深入讲解每个问题,提炼了这些常见重要不等式的使用技巧,帮助读者建立不等式证明的“结构观”方法.

本书集普及性、理论性、实用性于一体,适合中学生、中学数学教师等阅读使用,也是学校开展教师培训与拓展性教学的好素材,同时可供数学爱好者参考.对参加全国高中数学联赛、高校自主招生等考试的考生也会有较大的帮助.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克中的常见重要不等式/张艳宗,徐银杰编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.9

ISBN 978-7-5603-6937-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①张…②徐…　Ⅲ.①不等式—基本知识　Ⅳ.①O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第220848号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张17.25　字数328千字
版　　次　2017年9月第1版　2017年9月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6937-2
定　　价　38.00元

◎ 序

欣闻《数学奥林匹克中的常见重要不等式》即将出版，非常高兴。应元济高级中学卢明校长的要求，为其徒弟张艳宗写个序，我深感荣幸，由于事务缠身直至今日才提笔作序。

我和张艳宗老师接触虽不多，但在《数学通讯》等全国公开发行的刊物上经常看到他撰写的关于不等式研究的文章，给我留下了深刻的印象，后来在调研中得知他是浙江大学数学系杨启帆教授的研究生，数学功底深厚，工作不到八年已在全国公开发行的刊物上发表了二十多篇论文，其钻研精神令人钦佩，值得鼓励，是一位难得的后起之秀。

拜读完《数学奥林匹克中的常见重要不等式》书稿后，我眼前一亮。书稿结构清晰，通俗易懂，可读性很强，在选材上既有大家熟悉的经典的均值不等式、Cauchy－Schwarz 不等式、Hölder 不等式、排序不等式、Chebyshev 不等式、Schur 不等式、Jensen 不等式、J. Wolstenholme一嵌入不等式，又有鲜为人知的 Cauchy 求反术、Jensen 不等式的拓展、C－S 不等式的逆向应用、J. Wolstenholme一嵌入不等式的拓展、半凹半凸定理、切线不等式等最新研究成果，同时利用系统观的视角，精选了国内外数学竞赛中的典型不等式问题作为例题，深入细致地讲解每一个不等式的证明，提炼了这些常见的重要不等式的使用技巧，帮助读者建立起不等式证明的“结构观”方法，行文娓娓道来，使得学生开卷有益、学有所得。与此同时，本书还配备 200 多道习题并都给出详细解答，供读者练习巩固之用。

总之,本书是张艳宗老师对不等式多年研究的结果,是一本集普及性、理论性、实用性于一体的好书,也是学校开展教师培训与拓展性教学的好素材,对参加全国高中数学联赛、高校自主招生等考试的考生也会有较大的帮助。

是为序。

张金良

浙江省教育厅教研室

2017年6月25日

◎ 前言

不等式在数学中占有重要的地位.无论是国际数学奥林匹克竞赛(IMO)、世界各国(地区)数学奥林匹克竞赛，还是国内各大高校自主招生数学考试，与不等式有关的试题频频出现.不等式题多如牛毛，每年都有大量新的不等式出现以供选择，用之命题对于考生而言，背景公平.另外，不等式题有各种难度，具有较强的挑战性，不仅可以很好地区分考生的水平，还可反映考生的数学功底和创新水平.由于不等式问题需要较高的代数变形能力和应用技巧，没有固定的方法，广大学生视之如“虎”，谈之色变.

哈尔滨工业大学出版社、华东师范大学出版社、中国科学技术大学出版社等出版了很多关于初等不等式方面的著作、竞赛辅导书，一些堪称经典.给学生做竞赛辅导时，经常有学生指着辅导书上的解答询问，这个答案是怎么想到的，我怎样也可以想到.我告诫学生课下多看、多练、多悟，经历“悟净”“悟能”“悟空”三个阶段，方有所成.学生表示时间有限，有无捷径可走.学生的想法有些投机，但促使我产生一种想法，整理、编写一本较详细的、帮助学生快速入门不等式的辅导用书，将冰冷的美丽转化为火热的思考，使学生易于接受、消化.

本书定名《数学奥林匹克中的常见重要不等式》，顾名思义，介绍讨论奥数中一些常见且重要的不等式.全书共8章：第1章

均值不等式，第 2 章 Cauchy—Schwarz 不等式，第 3 章 Hölder 不等式，第 4 章排序不等式与 Chebyshev 不等式，第 5 章 Schur 不等式，第 6 章 J. Wolstenholme—嵌入不等式，第 7 章切线不等式，第 8 章 Jensen 不等式. 有心的读者可能提出，切线不等式是证明不等式的一种重要方法，将其单独列为一章显得有些名不符实. 事实上，切线不等式是证明独立和、积型不等式的有力武器，与函数的凹凸性有着密切的联系，故将其放在 Jensen 不等式之前.

为了实现本书所确定的“小目标”，本书在结构上有所安排，每章开头力求讲清每个重要不等式的发生、发展、证明过程. 精选国内外竞赛中的不等式典型问题作为例题，分析问题结构，引导思维，总结规律，并对部分问题进行拓展、引申、注解，希望讲清、讲透问题或方法，让学生树立不等式的“结构观”.

为与时俱进，书中将各重要不等式及应用也适当拓展. 有些结论或方法来自数学期刊、书籍等资料，如 Cauchy 求反术、Jensen 不等式的拓展、半凹半凸定理等，而 C—S 不等式的逆向应用、J. Wolstenholme—嵌入不等式的拓展、以曲代曲等则来自于自己这几年的研究.

本书习题共有 200 多道，所有习题都给出证明过程. 希望读者尤其是参加各类竞赛及自主招生的同学，千万不要贪图安逸，看看便过. 只有亲自动手做做，深入思考，才能真正体会到试题的难度，以及解决问题的策略、技巧和方法，甚至得到更好、更妙的证法. 书中绝大部分习题来自于世界各国(地区)数学奥林匹克试题，或近几年来《数学通讯》(学生刊)、《中等数学》、《数学通报》等杂志中的问题解答栏目，难度可见一斑. 读者可先在相应章节中学习，汲取营养，再尝试独立解题，若还不能求解再参考答案，研究、分析.

在形成本书框架之前，余姚中学徐银杰老师策划并给出了一个基本结构方案，为最后形成本书写作框架奠定了基础. 本书中有些例题美妙的解法就源于徐老师长期的积累和创造性的工作成果. 为了使本书更具可读性，在倾听了卢明老师、宋庆老师等专家意见，结合了学生建议(元济高级中学 2017 届毕业生马鼎立、吴江等同学提出一些好想法)后，对原有结构框架做了改进. 本书数易其稿，逐步完善，历经一年有余，终于瓜熟蒂落，与读者见面.

在本书出版之际，衷心感谢我的硕士研究生导师、浙江大学数学学院杨启帆教授. 杨老风趣幽默的课堂气氛，认真严谨的治学态度，都深深地影响了我. 即使毕业多年，杨老仍关心我的生活、工作、学习. 同时，衷心感谢浙江省元济高级中学卢明老师、胡水林老师、崔宝法老师、王建峰老师、钟董甫老师、曲峰老师等，浙江省余姚中学吴建洪老师、赵红庆老师、王胜战老师、胡建烽老师、沈才立

老师等及宁波大学陈计教授分别对我和徐银杰两位年轻人的关心、支持与鼓励，尤其是元济高级中学校长、浙江省数学特级教师、浙江省首批教授级高级教师卢明老师对我工作以来无微不至的关心与爱护.在本书编写过程中，卢老师不时鼓励、指导，提出了很多富有创见性的意见和建议，大大提高了本书质量.感谢浙江省教育厅教研室教研员、浙江省数学特级教师张金良老师在百忙之中认真阅读了书稿，并为本书作了序.感谢江西南昌大学附属中学宋庆老师一直以来的关心与指导，在本书的编写与出版过程中提供了不少建议.感谢海盐县环境监测站徐佳月老师，武汉科技大学徐树立副教授、蒋君副教授，宁波大学罗文昌副教授、王松静博士，海盐县教师研训中心甘建飞老师的大力支持.感谢哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室杜莹雪女士对本书出版工作的支持与协调，没有杜老师的辛勤工作，本书是不可能提前出版的.

由于我们水平所限，书中必有不足之处，欢迎读者批评或提出宝贵意见，来信均可发送至邮箱 yanzongzhang@126.com（张艳宗）或 903400062@qq.com（徐银杰），以期再版时改进.

张艳宗

2017 年 6 月 25 日

◎ 目录

前备知识

在开始我们初等代数不等式旅途之前，先做一些准备，掌握一些必备知识，这些内容虽然基本，却十分必要.

1. 连加、连乘

$\sum\limits_{\text{cyc}}$、$\prod\limits_{\text{cyc}}$ 分别表示循环和、循环积，以三元为例：

$$\sum_{\text{cyc}} ab = ab + bc + ca$$

$$\prod_{\text{cyc}} ab = ab \cdot bc \cdot ca$$

$$\sum_{\text{cyc}} f(a,b) = f(a,b) + f(b,c) + f(c,a)$$

本书中，若不做特别说明，$\sum\limits_{\text{cyc}}$ 与 $\sum$ 这两个符号所代表的意义相同，都表示循环求和. $\prod\limits_{\text{cyc}}$ 与 $\prod$ 都表示循环求积.

$\sum\limits_{\text{sym}}$、$\prod\limits_{\text{sym}}$ 分别表示对称求和、对称求积，以三元为例：

$$\sum_{\text{sym}} f(a,b) = f(a,b) + f(a,c) + f(b,c) + f(b,a) + f(c,a) + f(c,b)$$

$$\prod_{\text{sym}} f(a,b) = f(a,b) \cdot f(a,c) \cdot f(b,c) \cdot f(b,a) \cdot f(c,a) \cdot f(c,b)$$

2. 上界、下界

设 S 为实数集 $\mathbf{R}$ 中的一个子集. 若存在实数 $M(m)$，使得

对一切 $x \in S$，都有 $x \leqslant M(x \geqslant m)$，则称 S 为有上界(下界)数集，数 $M(m)$ 称为 S 的一个上界(下界)．

若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集．若 S 不是有界集，则称 S 为无界集．

设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若数 M 满足：

(1) 对一切 $x \in S$，有 $x \leqslant M$，即 M 是 S 的上界；

(2) 对任何 $a < M$，都存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > a$，即 M 是 S 的最小上界，称数 M 是 S 的上确界，记作 $M = \sup S$，如 $\sup(0,1) = 1$．

设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若数 m 满足：

(1) 对一切 $x \in S$，有 $x \geqslant m$，即 m 是 S 的下界；

(2) 对任何 $a > m$，都存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 < a$，即 m 是 S 的最大下界，称数 m 是 S 的下确界，记作 $m = \inf S$，如 $\inf \mathbf{N}^* = 1, \inf(0,1) = 0$．

上确界和下确界统称为确界．

3. 齐次性

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 元函数，若对任意非零实数 t，都有

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 k 次齐次函数．特别的，对于常数 0，定义其次数为 $-\infty$．$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$，$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 分别是 0 次、3 次齐次式．

齐次不等式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$．一般可设关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个非零有限次齐次式的值为常数，如设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，$x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ 等，也可设某个变量为常数，如 $x_n = 1$ 等．若题目条件中没有限定 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$，涉及符号问题，需要分类讨论．

4. 对称性

(1) 对称(完全对称)．

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 元函数，若将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的任意两个变量交换位置，所得的代数式和原式恒等，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称(完全对称)的，如 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$，$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ 等．

(2) 轮换对称．

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 元函数，若做置换 $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \cdots, x_n \to x_1$，得到的代数式和原式恒等，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是轮换对称的，如 $ab^2 +$

bc^2+ca^2, $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$ 等.

显然,完全对称一定是轮换对称,反之不一定.

本书中若不做特殊说明,对称指的是完全对称.

(3) 齐次轮换对称.

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 轮换对称,且各项次数相等,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是齐次轮换对称.

(4) 对称式和轮换对称式性质.

关于对称式和轮换对称式具有以下性质:

性质 1 任何对称式都可以用它的基本对称式来表示.

性质 2 对称式的和、差、积、商也是对称式.

性质 3 轮换对称式的和、差、积、商也是轮换对称式.

性质 4 齐次轮换对称式的和、差、积、商也是齐次轮换对称式.

性质 5 一个 m 次对称式乘以一个 n 次对称式,其积必为一个 $m+n$ 次对称式.

这些性质对于代数变形有较大的帮助,方便计算、因式分解等,如:

例 1 计算 $(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

分析 上式中的两个因式都关于 x,y,z 对称,所得代数式一定是对称式,从而只要将第一个因式的第一个字母乘以第二个因式,然后按照对称规律写出其余项即可.

解 由于 $x(xy+yz+zx)=x^2(y+z)+xyz$,则

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+3xyz$$

说明 对于次数较高或较复杂的对称式,也可利用待定系数法求解,如计算 $(x+y+z)^3$.

由于 $(x+y+z)^3$ 是关于 x,y,z 的三元齐次对称式,其结果也是三元齐次对称式,只要写出这个对称式所含的同型项,再利用待定系数法确定这些同型项的系数即可.

设 $(x+y+z)^3=a\sum\limits_{\text{sym}}x^3+b\sum\limits_{\text{sym}}x^2y+cxyz$,此式对于任意实数 x,y,z 都成立,可利用待定系数法,适当选取三组 x,y,z 的值,求解 a,b,c.

令 $x=0,y=0,z=1$,得

$$a=1$$

令 $x=0,y=1,z=1$,得

$$2a+2b=8$$

令 $x=1,y=1,z=1$,得

$$3a+6b+c=27$$

联立以上方程,解得 $a=1,b=3,c=6$,即

$$(x+y+z)^3=\sum_{\text{sym}}x^3+3\sum_{\text{sym}}x^2y+6xyz$$

例 2 (2017 年科索沃十年级数学奥林匹克试题) 因式分解

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

分析 上式是关于 x,y,z 的三元齐次(三次) 轮换对称式,因式分解也应是 x,y,z 的轮换对称式.

注意到当 $x=y$ 时,$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$,即原代数式含有因式 $x-y$,将其轮换则有因式$(x-y)(y-z)(z-x)$,此是关于 x,y,z 的三元齐次(三次) 轮换对称式,从而只要确定系数 k,使得

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

令 $x=-1,y=0,z=1,-2=2k$,解得 $k=-1$,即

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$$

说明 为析出给定整式形式的轮换对称式的因式,可先利用观察法,以其中一个变量为主元,尝试得出其中一个一次因式(如关于 a,b,c 的一次式,通常是 $a,a\pm b,a\pm b\pm c$ 等),再利用对称性得出其他因式,最后根据次数和对称性质设出剩余因式,利用待定系数法求解剩余因式和系数.

(5) 对称不等式及轮换对称不等式.

对于对称(完全对称) 不等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$$

可不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$(或 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$),若此时不等式成立,由对称性可知原不等式成立.原因在于对于任意排序的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,经过有限次交换,最终一定可以得到$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$(或 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$),且其与原不等式等价.

对于轮换对称不等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$$

可不妨设 $x_1=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$(或 $x_1=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$),若此时不等式成立,则原不等式成立,但不能设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$.

第1章 均值不等式

1.1 二元、三元均值不等式

高中阶段，我们学习过一个非常重要，也非常灵活的不等式：

基本不等式 若 $a,b>0$，则

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \tag{1.1.1}$$

当且仅当 $a=b$ 时取等.

此二元不等式形式优美、结构对称、算法简单，不等式左右两边分别涉及“加法”和“乘法”运算；其次，不等式两边涉及算术平均数 $\frac{a+b}{2}$(Arithmetic Mean，缩写为 AM) 和几何平均数 $\sqrt{ab}$ (Geometric Mean，缩写为 GM) 这两个基本均值，故其也称为 AM－GM 不等式；另外，此不等式还揭示了两个基本数列——正项等差数列和等比数列中项之间的大小关系，即两正数的等差中项不小于等比中项. 此不等式来源于一个基本的结论：对于任意实数 x，恒有 $x^2 \geqslant 0$. 特别地，当 $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 时，即为式(1.1.1). 简单的算法、基本均值、基本数列构成了基本不等式.

基本不等式之所以基本，还在于其容易推广，易“生成”其他均值不等式.

在式(1.1.1) 中，若用 a^2,b^2 分别替换 a,b，即有：

若 $a,b>0$,则

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab \tag{1.1.2}$$

当且仅当 $a=b$ 时取等.

说明 式(1.1.2) 称为重要不等式,当 a,b 是实数时也是成立的,且其被发现先于基本不等式.式(1.1.2) 中增加 $a,b>0$ 是为了便于下面的推广.

在(1.1.2) 两边同时加上$\frac{a^2+b^2}{2}$,化简整理可得$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,两边同时开方即有:

若 $a,b>0$,则

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2} \tag{1.1.3}$$

当且仅当 $a=b$ 时取等.

在式(1.1.1) 中,若用$\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ 分别替换 a,b,即可得到$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{ab}}$,将其整理即有:

若 $a,b>0$,则

$$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \tag{1.1.4}$$

当且仅当 $a=b$ 时取等.

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 称为平方平均值(Quadratic Mean,缩写为 QM),$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$(即$\frac{2ab}{a+b}$)称为调和平均值(Harmonic Mean,缩写为 HM).

从式(1.1.1) 出发,通过代数变形,生成如下均值不等式链

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{1.1.5}$$

式(1.1.5) 揭示了两个正数的调和平均值、几何平均值、算术平均值、平方平均值之间的大小关系,在最值问题中有着广泛的应用.

若将式(1.1.5) 推广到三元情形,即有:

若 $a,b,c>0$,则

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \quad (1.1.6)$$

式(1.1.6) 的证明比较简单,涉及恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$,有兴趣的读者可参考式(1.1.5) 的来历及思路自行证明.

均值不等式揭示了几个正数的调和平均值、几何平均值、算术平均值、平方平均值之间的大小关系. 在应用均值不等式时,注意各均值的代数结构特征,即倒数和(调和平均值)、积(几何平均值)、和(算术平均值)、平方和(平方平均值),合理选择均值不等式. 在应用均值不等式时,一般利用重组、变形、拆分等方法配凑系数(或因式),另外还要注意等号是否能够取到.

例 1.1.1 已知 a,b 是正实数,且 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$,求 $y=a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值.

分析 已知和为定值,求积的最大值,考虑使用AM-GM不等式,将代数式 $a\sqrt{1+b^2}$ 配凑出含有项 a^2 及$\frac{b^2}{2}$ 的相关因式,又 b^2+1 作为整体出现,其可变形为 $2\cdot\frac{b^2+1}{2}$,使得 $a^2+\frac{b^2+1}{2}$ 为定值.

解 由于 $a,b>0,a^2+\frac{b^2}{2}=1$,则

$$y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2\left(\frac{b^2}{2}+\frac{1}{2}\right)} \leqslant \sqrt{2}\cdot\frac{a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

当且仅当 $a^2=\frac{b^2}{2}+\frac{1}{2},a^2+\frac{b^2}{2}=1$,即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2},b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等.

说明 应用均值不等式求解最值问题,一般先根据题目条件及结构选择合适的均值不等式,由定值及均值不等式的结构调整系数(因式) 配凑定值,求解最值.

例 1.1.2 (2010 年四川高考文科第 11 题) 设 $a>b>0$,求 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值.

分析 所给代数式结构较复杂,常规思路是将其通分化简,求 $a^2+\frac{1}{b(a-b)}$ 的最值. 此时 $a^2,\frac{1}{b(a-b)}$ 这两项的积及倒数和都不是定值,但注意到