俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Smirnov Advanced Mathematics (Volume III(3))

斯米尔诺夫高等数学

（第三卷·第三分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著　　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume Ⅲ(3))

（第三卷·第三分册）

[俄罗斯]斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08 - 2016 - 040 号

内容简介

本书为斯米尔诺夫高等数学第三卷第三分册. 包括多变数函数和方阵函数、线性微分方程、特殊函数三章内容，及附录等部分.

本书适合高等院校数学专业及相关领域人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学. 第三卷. 第三分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著；斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.3

ISBN 978－7－5603－6526－8

Ⅰ.①斯… Ⅱ.①斯… ②斯… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050792 号

书名：Курс высшей математики

作者：В. И. Смирнов

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 21.75 字数 410 千字
版 次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－6526－8
定 价 68.00 元

目录

第4章 多变数函数和方阵函数

81. 正则多变数函数

就基本概念而论，多变数的解析函数论和单变数函数论很相似. 但是进一步发展下去，它就有了一些特异之点. 在这一章里我们只说些基本概念，并且对多变数的幂级数做较详细的研究. 为简单计，我们只看两个自变数的情形. 当自变数多于两个时，所有的定义和证明完全有效.

假设 z_1 和 z_2 是两个复变数，则

$$f(z_1, z_2) \tag{1}$$

是这两个变数的函数. 假设变数 z_1 在一区域 B_1 中变动，变数 z_2 在一区域 B_2 中变动. 如果函数(1)是 z_1 和 z_2 的单值连续函数，并且对于在上述区域中的自变数的任何值，比率

$$\frac{f(z_1+\Delta z_1, z_2)-f(z_1, z_2)}{\Delta z_1} \text{和} \frac{f(z_1, z_2+\Delta z_2)-f(z_1, z_2)}{\Delta z_2}$$

当复改变量 Δz_1 和 Δz_2 趋于零时常有一定的极限，则称函数(1)为 z_1 和 z_2 在区域 B_1 和 B_2 中的正则函数或全纯函数. 这两个比率的极限即函数(1)关于 z_1 和 z_2 的偏导数

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} \text{和} \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}$$

82. 二重积分和柯西公式

假设 l_1 和 l_2 依次为区域 B_1 和 B_2 中的两条线路. 将函数 $f(z_1,z_2)$ 先沿 l_1 作路积分，再沿 l_2 作路积分，即得二重积分

$$I_1=\int_{l_2}\mathrm{d}z_2\int_{l_1}f(z_1,z_2)\mathrm{d}z_1$$

如果交换积分的次序，则可得另一个二重积分

$$I_2=\int_{l_1}\mathrm{d}z_1\int_{l_2}f(z_1,z_2)\mathrm{d}z_2$$

首先，我们证明 I_1 和 I_2 相等. 假设曲线 l_1 的参数方程为

$$z_1(t)=x_1(t)+\mathrm{i}y_1(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

曲线 l_2 的参数方程为

$$z_2(\tau)=x_2(\tau)+\mathrm{i}y_2(\tau)\quad(c\leqslant \tau\leqslant d)$$

以

$$z_1=z_1(t)\ 和\ z_2=z_2(\tau)$$

代入函数 $f(z_1,z_2)$ 中，可以把积分 I_1 变成一个关于两变数 t 和 τ 的二重积分，其中第一次关于 t 的积分以常数 a 和 b 为积分限，第二次关于 τ 的积分以常数 c 和 d 为积分限

$$I_1=\int_c^d[x'_2(\tau)+\mathrm{i}y'_2(\tau)]\mathrm{d}\tau\int_a^b f[z_1(t),z_2(\tau)][x'_1(t)+\mathrm{i}y'_1(t)]\mathrm{d}t$$

这个积分显然就相当于在 (t,τ) 平面上的长方形

$$a\leqslant t\leqslant b;c\leqslant \tau\leqslant d$$

中的二重积分. 故由[Ⅱ,78]可以不改变积分的极限而将次序交换，即 I_1 可改写为

$$I_1=\int_a^b[x'_1(t)+\mathrm{i}y'_1(t)]\mathrm{d}t\int_c^d f[z_1(t),z_2(\tau)][x'_2(\tau)+\mathrm{i}y'_2(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

而这个积分显然就相当于积分 I_2，因此知道 I_1 和 I_2 相等. 它们的共同数值称为函数 $f(z_1,z_2)$ 沿线路 l_1 和 l_2 的二重积分.

我们也可以直接用和的极限来定义二重积分. 以分点

$$z_1^{(0)},z_1^{(1)},z_1^{(2)},\cdots,z_1^{(m)}$$

将曲线 l_1 分成 m 段，又以分点

$$z_2^{(0)},z_2^{(1)},z_2^{(2)},\cdots,z_2^{(n)}$$

将曲线 l_2 分成 n 段. 再作二重和

$$\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}f(\xi_1^{(p)},\xi_2^{(q)})(z_1^{(p+1)}-z_1^{(p)})(z_2^{(q+1)}-z_2^{(q)})$$

其中 $\xi_1^{(p)}$ 是曲线 l_1 上弧 $z_1^{(p)}z_1^{(p+1)}$ 中的一点，$\xi_2^{(q)}$ 是曲线 l_2 上弧 $z_2^{(q)}z_2^{(q+1)}$ 中的一

点. 当两曲线上的分点无限增多,并且诸小段的弧长都趋于零时,上面二重和的极限即二重积分 I_1 或 I_2.

假设 l_1 和 l_2 是两条简单闭线路,其所围之区域为 B_1 和 B_2. 又设函数 $f(z_1, z_2)$ 在闭区域 B_1 和 B_2 中为正则,就是说,这个函数在两个更大一些的,包含 B_1 和 B_2 以及它们的境界线在其内部的区域中为正则. 考察二重积分

$$I=\int_{l_1}\mathrm{d}z'_1\int_{l_2}\frac{f(z'_1,z'_2)}{(z'_1-z_1)(z'_2-z_2)}\mathrm{d}z'_2$$

或

$$I=\int_{l_2}\mathrm{d}z'_2\int_{l_1}\frac{f(z'_1,z'_2)}{(z'_1-z_1)(z'_2-z_2)}\mathrm{d}z'_1$$

其中 z_1 和 z_2 是 B_1 和 B_2 内部的两个定点.

当先沿线路 l_2 积分时,z'_1 可视为一参数,表示 l_1 上一定点. 这时 $f(z'_1, z'_2)$ 是一个复变数 z'_2 的函数,它在闭区域 B_2 中为正则. 故应用通常的柯西公式可得

$$I=2\pi\mathrm{i}\int_{l_1}\frac{f(z'_1,z_2)}{z'_1-z_1}\mathrm{d}z'_1$$

这时 $f(z'_1,z_2)$ 是 z'_1 在闭区域 B_1 中的正则函数. 再用一次柯西公式即得

$$I=-4\pi^2 f(z_1,z_2)$$

因此得到和柯西公式类似的公式

$$f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}\mathrm{d}z'_1\int_{l_2}\frac{f(z'_1,z'_2)}{(z'_1-z_1)(z'_2-z_2)}\mathrm{d}z'_2 \tag{2}$$

变数 z_1 和 z_2 在积分符号之内以参数的形式出现. 关于这些参数微分后,可知 $f(z_1,z_2)$ 有任何阶的导数,并且这些导数可以表示为二重积分的形式

$$\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}=-\frac{p!\ q!}{4\pi^2}\int_{l_1}\mathrm{d}z'_1\int_{l_2}\frac{f(z'_1,z'_2)}{(z'_1-z_1)^{p+1}(z'_2-z_2)^{q+1}}\mathrm{d}z'_2 \tag{3}$$

所有以上的论断和结果很容易推广到含有两个以上的自变数的函数上去.

和单变数函数的情形一样,由柯西公式可以导出模数原理:若函数 $f(z_1, z_2)$ 在闭区域 B_1 和 B_2 中为正则,又当 z'_1 在 l_1 上,z'_2 在 l_2 上时,$|f(z'_1, z'_2)|\leqslant M$,则对闭区域 B_1 和 B_2 中的任意两点 z_1 和 z_2,常有 $|f(z_1,z_2)|\leqslant M$.

完全和单变数函数的情形一样,可证魏尔斯特拉斯定理成立:若级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k(z_1,z_2)$$

的项都是闭区域 B_1 和 B_2 中的正则函数,并且级数在这两区域中一致收敛,则其和为两区域内部的正则函数,且当 z_1 和 z_2 为 B_1 和 B_2 的内点时,级数可以关于 z_1 和 z_2 逐项微分任何次之多. 微分后所得到的级数在 B_1 和 B_2 内部的任意闭区域 B'_1 和 B'_2 中为一致收敛. 所有以上的论断和结果不难推广到含有两个

以上自变数的函数上去.我们以下专门来研究幂级数.

83. 幂级数

含两个自变数 z_1 和 z_2 且以 b_1 和 b_2 为中心的幂级数具有如下的形式

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q \tag{4}$$

其中 p 和 q 互相独立地各自从零开始跑过正整数的全体.级数(4) 是个二重级数.这种级数我们早在[Ⅰ,142] 中已经研究过,那时级数的项都是实数.现在假设由这级数的项的模所成的级数

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} |a_{pq}||z_1-b_1|^p|z_2-b_2|^q \tag{5}$$

也收敛.那么,如[11] 中一般,可知由级数(4) 的项的实数部分和虚数部分所成的级数皆为绝对收敛,并且这两个实二重级数的和不因项的次序的变更而改变.故知当级数(5) 收敛时级数(4) 也收敛,并且不论项的次序如何变更,级数(4) 的和常为一定值.以后我们只看级数(5) 为收敛,即级数(4) 为绝对收敛的情形.

和[13] 中完全一样,不难写出与亚贝尔定理类似的定理来.假设级数(4) 当 $z_1=\alpha_1$ 且 $z_2=\alpha_2$ 时为绝对收敛.由此可知当 $z_1=\alpha_1$ 且 $z_2=\alpha_2$ 时级数(4) 的一般项的模为有界,就是说,存在一个数 M,使对任意的 p 和 q,不等式

$$|a_{pq}||\alpha_1-b_1|^p|\alpha_2-b_2|^q<M$$

常常成立.上式即

$$|a_{pq}|<\frac{M}{|\alpha_1-b_1|^p|\alpha_2-b_2|^q} \tag{6}$$

现在来看两个圆 K_1 和 K_2

$$|z_1-b_1|<|\alpha_1-b_1|;\ |z_2-b_2|<|\alpha_2-b_2| \tag{7}$$

第一个圆包含所有和 b_1 相距较 α_1 和 b_1 相距更近的点 z_1,第二个圆包含所有和 b_2 相距较 α_2 和 b_2 相距更近的点 z_2.

今于 K_1 中任取一点 z_1,K_2 中任取一点 z_2,即

$$|z_1-b_1|=q_1|\alpha_1-b_1|,\ |z_2-b_2|=q_2|\alpha_2-b_2|$$

其中 $0<q_1,q_2<1$.应用(6) 可以估计级数(4) 的一般项

$$|a_{pq}||z_1-b_1|^p|z_2-b_2|^q<Mq_1^pq_2^q \tag{8}$$

但是易见正项二重级数

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} Mq_1^pq_2^q$$

为收敛. 实际上，这个级数可由两个正项级数

$$M(1+q_1+q_1^2+\cdots)\text{和}(1+q_2+q_2^2+\cdots)$$

相乘而得[Ⅰ,138]，故可知其和为

$$\frac{M}{(1-q_1)(1-q_2)}$$

因此，这时级数(5) 收敛，从而级数(4) 为绝对收敛. 由式(8) 还可以知道在任何以 b_1 和 b_2 为中心，半径 ρ_1 和 ρ_2 依次小于 K_1 和 K_2 的半径的圆 K'_1 和 K'_2 中，级数(4) 为一致收敛. 在以上的证明中我们并没有用到级数(4) 在 $z_1=\alpha_1$ 和 $z_2=\alpha_2$ 的绝对收敛性，而只用到不等式

$$|a_{pq}(\alpha_1-b_1)^p(\alpha_2-b_2)^q|\leqslant M$$

即这个级数的一般项当 $z_1=\alpha_1$ 和 $z_2=\alpha_2$ 时为有界.

总括起来，可得下面的结果：若当 $z_1=\alpha_1,z_2=\alpha_2$ 时级数(4) 的项的模都小于同一数 M，则此级数在圆(7) 的内部为绝对收敛，在圆

$$|z_1-b_1|\leqslant(1-\varepsilon)|\alpha_1-b_1|;\ |z_2-b_2|\leqslant(1-\varepsilon)|\alpha_2-b_2|$$

中为一致收敛，其中 ε 是任何一个小的固定正数.

注意：只要当 $z_1=\alpha_1$ 和 $z_2=\alpha_2$ 时级数(4) 在某种顺序之下相加为收敛(不必绝对收敛)，它的一般项就按与原点距离的远近而趋于零，因此它们的绝对值必皆小于同一数 M. 从而级数就在圆(7) 内部绝对收敛.

由以上的结果，和[13] 中完全一样，可以导入级数(4) 的收敛半径这个概念.

不过现在我们有了两个正数 R_1 和 R_2，使当 $|z_1-b_1|<R_1$ 和 $|z_2-b_2|<R_2$ 时级数(4) 绝对收敛，当 $|z_1-b_1|>R_1$ 和 $|z_2-b_2|>R_2$ 时级数(4) 发散.

注意：现在级数(4) 的绝对收敛区域必须由两个收敛半径 R_1 和 R_2 同时决定，而这两半径的大小一般不能各自独立地决定，因为一半径的值常要受另一半径的值的影响. 当 R_1 减小时，R_2 有时可以增大. 换句话说，现在我们只能说联合收敛半径 R_1 和 R_2，或联合收敛圆. 试以下面幂级数为例

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(p+q)!}{p!\ q!}z_1^p z_2^q \tag{9}$$

级数(5) 现在变成为

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(p+q)!}{p!\ q!}|z_1|^p|z_2|^q \tag{10}$$

在这级数中先把那些 $p+q$ 等于同一数 s 的项分别加在一起. 由牛顿二项式公式知道这种项的和是

$$(|z_1|+|z_2|)^s$$

从而式(10) 可以改写为

$$\sum_{s=0}^{+\infty}(|z_1|+|z_2|)^s$$

由此立刻可知当且仅当 $|z_1|+|z_2|<1$ 时这个级数为收敛. 这样,级数(9) 的联合收敛半径 R_1 和 R_2 就由等式 $R_1+R_2=1$ 来决定. 若取 $R_1=\theta, 0<\theta<1$,则有 $R_2=1-\theta$. 再看第二个例子

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} z_1^p z_2^q$$

于此易见 $|z_1|<1$ 和 $|z_2|<1$ 是绝对收敛的充要条件,就是说,现在 $R_1=1, R_2=1$,两收敛半径可以各自独立地决定.

由一致收敛性和魏尔斯特拉斯定理知道级数(4) 在联合收敛圆的内部表示两变数 z_1 和 z_2 的正则函数 $f(z_1,z_2)$. 和[13] 中一样,可知级数(4) 在收敛圆内部可以关于任一变数微分任何次之多,并且这个微分不改变收敛圆.

和[14] 中一样,微分几次以后再令 $z_1=b_1$ 和 $z_2=b_2$,可得级数的系数的表示式

$$a_{pq}=\frac{1}{p!\,q!}\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\right|_{z_1=b_1,z_2=b_2} \tag{11}$$

即级数(4) 是函数 $f(z_1,z_2)$ 的泰勒级数.

若 R_1 和 R_2 是级数(4) 的联合收敛半径,则当 $|z_1-b_1|\leqslant R_1-\varepsilon$ 及 $|z_2-b_2|\leqslant R_2-\varepsilon$ 时,这个级数绝对且一致收敛,其中 ε 是任何一个小的固定正数. 由(3) 及(11) 可得级数的系数的估值如下

$$|a_{pq}|<\frac{M}{(R_1-\varepsilon)^p(R_2-\varepsilon)^q} \tag{12}$$

其中 M 是个正常数,其值显然和 ε 的选取有关.

用式(12) 右边的数替代级数(4) 的系数 a_{pq},则得幂级数

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{M}{R'^p_1R'^q_2}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q \quad (R'_1=R_1-\varepsilon; R'_2=R_2-\varepsilon) \tag{13}$$

通常称为级数(4) 的优级数或强级数. 易见级数(13) 的和等于

$$\frac{M}{\left(1-\dfrac{z_1-b_1}{R'_1}\right)\left(1-\dfrac{z_2-b_2}{R'_2}\right)} \tag{14}$$

这个函数称为级数(4) 的优函数或强函数. 当它依 z_1-b_1 和 z_2-b_2 的幂展开为幂级数时,系数常为正,且大于 $|a_{pq}|$.

[14] 的结果也不难拓广到两个自变数的情形上来. 设有两个以 b_1 和 b_2 为中心的圆 $|z_1-b_1|\leqslant R_1$ 和 $|z_2-b_2|\leqslant R_2$,其圆周为 l_1 和 l_2. 函数 $f(z_1,z_2)$ 在这两闭圆中为正则. 又设 z_1 和 z_2 依次为两圆内部的任意两固定点,则由柯西公式有

$$f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}\mathrm{d}z'_1\int_{l_2}\frac{f(z'_1,z'_2)}{(z'_1-z_1)(z'_2-z_2)}\mathrm{d}z'_2 \tag{15}$$

和[14] 中一样，我们可以将有理分式

$$\frac{1}{(z'_1-z_1)(z'_2-z_2)}$$

依 z_1-b_1 和 z_2-b_2 的幂展开为级数

$$\frac{1}{(z'_1-z_1)(z'_2-z_2)}=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q}{(z'_1-b_1)^{p+1}(z'_2-b_2)^{q+1}}$$

此级数关于圆周 l_1 和 l_2 上的点 z'_1 和 z'_2 为一致收敛. 将上式代入式(15) 右边，然后逐项积分，即得函数 $f(z_1,z_2)$ 在两圆内部的幂级数展开式

$$f(z_1,z_2)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q \tag{16}$$

这级数的系数由下面的公式决定

$$a_{pq}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}\mathrm{d}z'_1\int_{l_2}\frac{f(z'_1,z'_2)}{(z'_1-b_1)^{p+1}(z'_2-b_2)^{q+1}}\mathrm{d}z'_2=\frac{1}{p!\ q!}\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\right|_{z_1=b_1;z_2=b_2} \tag{17}$$

因此得证任何在两圆内部为正则的函数可以在这两圆内部展开为幂级数①.

和[14] 中一样，易见这个展开式是唯一的，因为它的系数必定由式(11) 所决定.

我们可以把级数(4) 中的项按照 z_1-b_1 和 z_2-b_2 的齐次式归并起来，即将它写成下面的形式

$$\sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{p+q=s}a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q \tag{18}$$

其中内部的有限和展布于所有那些满足 $p+q=s$ 的项之上. 公式(18) 将函数 $f(z_1,z_2)$ 在收敛圆内部表示为 z_1-b_1 和 z_2-b_2 的齐次多项式的级数. 现在反过来，假设由 z_1-b_1 和 z_2-b_2 的齐次多项式所组成的级数(18) 在两圆 $|z_1-b_1|\leqslant R_1$ 和 $|z_2-b_2|\leqslant R_2$ 中为一致收敛. 则由魏尔斯特拉斯定理可知，这个级数的和 $f(z_1,z_2)$ 是这两圆中的正则函数.

并且我们还可以将级数(18) 关于任一变数逐项微分任何次之多. 微分以后再令 $z_1=b_1$ 和 $z_2=b_2$，即得系数 a_{pq} 所满足的式(11). 这表明诸系数 a_{pq} 就是函数 $f(z_1,z_2)$ 的泰勒系数，于是我们可以把级数(18) 改写成二重级数(4) 的形

① 前面假设 $f(z_1,z_2)$ 在两闭圆中为正则只是为叙述证明时方便一些，读者易见当 $f(z_1,z_2)$ 只在两圆内部为正则时结果依然成立(译者).

式，这个级数在两圆内部绝对且一致收敛.因此得证：若齐次多项式所成的级数在某两圆内部为一致收敛，则此级数必可改写为具有普通形式的二重幂级数，在两圆内部为绝对收敛.

若将 z_1 和 z_2 分开为实数和虚数部分

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

则在以 (x_1, y_1, x_2, y_2) 为坐标的四维空间中级数(18) 的一致收敛区域有时可以比级数(4) 的一致收敛区域更大一些.

设以级数(9) 为例.这时(18) 取下面的形式

$$\sum_{s=0}^{+\infty} (z_1 + z_2)^s$$

它的一致收敛区域由下面的不等式决定

$$| z_1 + z_2 | < 1$$

亦即

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 < 1 \tag{19}$$

对于级数(9) 前面已证应有 $R_1 + R_2 = 1$，故其收敛区域由不等式

$$| z_1 | + | z_2 | < 1$$

决定，此即

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} < 1$$

或

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} < 1 \tag{20}$$

不等式(19) 所定义的区域比不等式(20) 所定义的更大，即若 x_k 与 y_k 满足(20) 时必定也满足(19)，其逆不成立.实际上，由不等式

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

立刻可知(19) 的左边小于或等于(20) 的左边.

所有以上的论断和结果都可拓广到 n 个变数的幂级数上去，那时我们所得到的幂级数的绝对且均匀收敛区域将是 n 个圆的联合体.

84. 解析延拓

由形式如(4) 的幂级数在其收敛圆内部所定义的两个变数的函数 $f(z_1, z_2)$ 有时可在更大的区域中为正则，于是和单变数函数的情形一样又产生了函数解析延拓的问题.和单变数函数的情形一样，有基本定理成立，依据这个定理若在同一对区域中为正则的两函数在每一区域中的一点 $z_1 = b_1$ 和 $z_2 = b_2$ 有相同的函数值，并且它们任何阶的导数在这两点的数值也都相同，则这两函数在

这一对区域中全同.

现在来研究由幂级数所定义的函数 $f(z_1,z_2)$，假设 $z_1=c_1$ 和 $z_2=c_2$ 是收敛圆中的两点. 应用级数(4) 我们可以决定导数

$$\left.\frac{\partial^{p+q} f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\right|_{z_1=c_1,z_2=c_2}$$

的值，然后再作函数 $f(z_1,z_2)$ 依 z_1-c_1 和 z_2-c_2 的幂展开时的泰勒级数

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a'_{pq}(z_1-c_1)^p(z_2-c_2)^q \tag{21}$$

易见这种幂级数的改造就相当于以

$$(z_1-b_1)^p=[(z_1-c_1)+(c_1-b_1)]^p$$
$$(z_2-b_2)^q=[(z_2-c_2)+(c_2-b_2)]^q$$

代入级数(4)，用二项式公式展开方括号，然后再把所有含 z_1-c_1 和 z_2-c_2 的幂次相同的项归并在一起. 级数(21) 在任何以 c_1 和 c_2 为中心而分别含于级数(4) 的两收敛圆内部的两圆之中显然为收敛，并且它的和等于 $f(z_1,z_2)$. 但有时级数(21) 的收敛圆也可以越出级数(4) 的收敛圆之外. 这时我们就得到函数 $f(z_1,z_2)$ 在更大的区域中的值，即扩大了正则函数 $f(z_1,z_2)$ 的定义域. 在有些场合之下，我们可以一次次地应用上述这种借助于收敛圆的解析延拓来扩大正则函数的存在域以及它的全部可能值，于是也就定义了一个解析函数，这个解析函数是由级数(4) 所决定的元素经解析延拓而得到的. 至于解析延拓和奇异点之间的关系我们不准备在此详细去研究了. 以上所说的一切也适用于自变数多于两个的情形. 只是有一点要注意，就是当 $f(z_1,z_2)$ 作解析延拓时，如果只知道 z_1 和 z_2 所经过的路线 L_1 和 L_2 的话，我们并不能决定这个解析延拓的结果. 更要紧的是要知道 z_1 和 z_2 沿着 L_1 和 L_2 变动时彼此间的关系如何. 关于多变数函数论的一般理论我们就讲到这里为止. 目前函数论在这方面进展甚速. 关于多变数函数论的基本事实在古刹的《数学分析》一书中可以找到更详细的叙述. 至于专门的书籍则有富克斯的《解析多变数函数论》(1948)，其中附载有丰富的文献.

85. 方阵函数，预备知识

现在让我们来研究以一个或几个方阵为变数的函数. 先看一个方阵的函数. 在[Ⅲ$_1$,44] 中我们已经研究过最简单的情形，即一个方阵的多项式和有理函数. 在深入研究更复杂的方阵函数之前，要说几个基本概念. 以后用 n 来记方阵的阶数.

设有方阵的无限序列

$$X_1, X_2, \cdots$$

我们称这序列以方阵 X 为极限，若对任意足号 i 和 k 常有

$$\lim_{m \to +\infty} \{X_m\}_{ik} = \{X\}_{ik} \tag{22}$$

即方阵 X_m 的元素常以 X 中对应的元素为其极限. 这时我们假设无限序列中的方阵都是同阶的.

再引进几个以后要用的新的记号. $\| a \|$ 表示一个方阵，它的每一个元素都等于 a. $| X |$ 表示一个方阵，其元素为方阵 X 的元素的模，即

$$\{| X |\}_{ik} = | \{X\}_{ik} | \tag{23}$$

若一方阵 Y 的元素常为正，且皆大于 $| X |$ 的元素，则以不等式

$$| X | < Y$$

记之. 换言之，这个不等式和下面 n^2 个不等式相抵

$$| \{X\}_{ik} | < \{Y\}_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

再看以方阵为项的无穷级数

$$Z_1 + Z_2 + \cdots$$

若这个级数前面 n 项之和当 n 无限增加时有一定的极限方阵 Z，则称它为收敛. Z 称为这个级数的和，有

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots \tag{24}$$

式(24) 显然相当于下面 n^2 个等式

$$\{Z\}_{ik} = \{Z_1\}_{ik} + \{Z_2\}_{ik} + \cdots \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{25}$$

所有满足条件

$$| X - A | < \| \rho \| \tag{26}$$

的方阵 X 称为方阵 A 的一个邻域，这里 ρ 是个已给正数. 不等式(26) 和下面 n^2 个不等式相抵

$$| \{X - A\}_{ik} | < \rho$$

方阵的幂级数是定义方阵函数的一种基本工具，所以先来研究一下这样的级数.

86. 一个方阵的幂级数

一个方阵的幂级数形式如下

$$a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \cdots \tag{27}$$

其中 a_k 和 α 是已知数. 为简单起见，以后常设 $\alpha = 0$. 于是级数(27) 就有下面的形式

$$a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots \tag{28}$$

由方阵的乘法规则有

$$\{X^2\}_{ik}=\sum_{s=1}^{n}\{X\}_{is}\{X\}_{sk}$$

一般地

$$\{X^m\}_{ik}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\cdots\{X\}_{j_{m-2}j_{m-1}}\{X\}_{j_{m-1}k}$$

上式右边表示各自独立地从1到n,关于$j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}$相加.因此表示级数(28)的和的方阵的元素可以表示成级数的形式

$$a_0\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{+\infty}a_m\sum_{j_1,\cdots,j_m}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\cdots\{X\}_{j_{m-1}k} \tag{29}$$

其中δ_{ik}的意义如下

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0 & (\text{当 } i\neq k \text{ 时})\\ 1 & (\text{当 } i=k \text{ 时})\end{cases} \tag{30}$$

最后一个事实乃是因为级数(28)的常数项是a_0,这里的a_0表示一个对角方阵,其对角线上的元素都等于a_0.式(29)表示级数(28)和n^2个普通的幂级数相抵,每一幂级数中都含有n^2个变数$\{X\}_{ik}$.注意:式(29)中对应于$m=1$的项是$a_1\{X\}_{ik}$,而内部求和符号不存在.

现在再谈级数(28)的收敛问题.先看绝对收敛.为此,除级数(28)外还要看下面的级数

$$|a_0|+|a_1||X|+|a_2||X|^2+\cdots \tag{31}$$

或是和它对应的n^2个级数

$$|a_0|\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}}\{|X|\}_{ij_1}\{|X|\}_{j_1j_2}\cdots\{|X|\}_{j_{m-1}k} \tag{32}$$

如果这些级数收敛,那么级数(29)当然收敛,就是说,级数(31)的收敛性保证级数(28)的收敛性,这时级数(28)称为绝对收敛.由$|X|$的定义知

$$\{|X|\}_{ik}=|\{X\}_{ik}|$$

故式(32)可由式(29)中每一数以其模替代而得.

其次,研究级数(28)为绝对收敛的充分条件.先看一个普通的复变数z的幂级数

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots \tag{33}$$

假设它的收敛半径为$n\rho$,其中n是方阵的阶数,ρ是个正数.如[14]中所已知,对于级数(33)的系数有如下的估值

$$|a_m|\leqslant\frac{M}{(n\rho-\varepsilon)^m} \tag{34}$$

其中ε是任何一个小的固定正数,M是个正数,和ε的选取有关.设b是某一数,

试看方阵 $\| b \|$ 的正整数幂

$$\{ \| b \|^2 \}_{ik} = bb + bb + \cdots + bb = nb^2$$

即

$$\| b \|^2 = \| nb^2 \|$$

一般有

$$\| b \|^m = \| n^{m-1} b^m \| \tag{35}$$

现在假设 $b = \rho_1 > 0$,再取一方阵 X,满足条件

$$| X | < \| \rho_1 \|$$

那么显见有

$$| X |^m < \| \rho_1 \|^m$$

即

$$| X |^m < \| n^{m-1} \rho_1^m \|$$

由(34)有

$$| a_m | | X |^m < \frac{M}{n} \| \left(\frac{n\rho_1}{n\rho - \varepsilon} \right)^m \|$$

若 $\rho_1 < \rho$,则取 ε 很小时可使

$$0 < \frac{n\rho_1}{n\rho - \varepsilon} < 1$$

这时级数(31)显然收敛,从而级数(28)绝对收敛. 若级数(33)的收敛半径等于 $+\infty$,则称这个级数的和为 z 的整函数. 由以上的证明可知这时级数(28)对任何方阵 X 皆为绝对收敛. 因此得到下面的定理:

定理 1 若级数(33)的收敛半径等于 $n\rho$,则对所有在原点的邻域

$$| X | < \| \rho \| \tag{36}$$

中的方阵 X,级数(28)为绝对收敛. 若级数(33)定义一整函数,则级数(28)对任何方阵皆为绝对收敛.

当级数(28)在区域(36)中绝对收敛时,我们称这个级数的和 $f(X)$ 为该区域中的正则函数.

试以方阵的指数函数为例

$$e^X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots \tag{37_1}$$

这时,和它对应的幂级数(33)的收敛半径等于 $+\infty$,故知(37_1)对任何方阵 X 常为绝对收敛,或者说,(37_1)是方阵 X 的整函数.

再看以任一复数 a 为底的指数函数

$$a^X = e^{X\ln a} = 1 + \frac{X\ln a}{1!} + \frac{X^2 \ln^2 a}{2!} + \cdots \tag{37_2}$$

其中 $\ln a$ 取复数 a 的某一固定对数值. 函数(37_2)也是方阵 X 的整函数. 现在证明幂级数展开的唯一性. 设有两个幂级数

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m X^m \text{ 和 } \sum_{m=0}^{+\infty} a'_m X^m$$

皆在邻域(36) 中绝对收敛，且在这个邻域中两级数有相同的和，即

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m X^m = \sum_{m=0}^{+\infty} a'_m X^m$$

现在要证明对于所有的 $m, a'_m = a_m$. 为此，注意对角方阵

$$X = z = [z, z, \cdots, z] \quad (|z| < \rho)$$

满足条件(36). 代入前式得

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m = \sum_{m=0}^{+\infty} a'_m z^m \quad (|z| < \rho)$$

但是我们早知道复变数函数在任一圆中的幂级数展开式是唯一的，故有 $a'_m = a_m$ 对于所有的 m 成立. 于是得下面的定理：

唯一性定理　若两幂级数在邻域(36) 中绝对收敛，且在这个邻域中两级数有相同的和，则这两个级数的全部系数相同.

若再应用公式

$$(SXS^{-1})^k = SX^k S^{-1}$$

则仿[Ⅲ$_1$,44] 对于由幂级数(28) 或(27) 所定义的函数 $f(X)$ 可证下面的等式

$$f(SXS^{-1}) = Sf(X)S^{-1}$$

87. 幂级数的乘法，幂级数的反演

设有两幂级数

$$f_1(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m X^m \text{ 和 } f_2(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m X^m$$

在区域(36) 中绝对收敛. 将这两级数的和相乘，得到另一方阵

$$Y = f_2(X) \cdot f_1(X)$$

这个方阵的元素由下面的式子决定

$$\{Y\}_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \{f_2(X)\}_{is} \{f_1(X)\}_{sk} \tag{38}$$

其中

$$\{f_1(X)\}_{sk} = a_0 \delta_{sk} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sum_{j_1, \cdots, j_{m-1}} \{X\}_{sj_1} \{X\}_{j_1 j_2} \cdots \{X\}_{j_{m-1} k}$$

$$\{f_2(X)\}_{is} = b_0 \delta_{is} + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sum_{j_1, \cdots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \cdots \{X\}_{j_{m-1} s}$$

这些级数都是绝对收敛的，故可逐项相乘，从而方阵 Y 的元素可写为

$$\{Y\}_{ik} = a_0 b_0 \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{+\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0) \cdot$$