高等代数课程创新型教材

高等代数选讲

张丽华　姚 波　黄 影/主编

Selection of Advanced Algebra

$$P^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_k\in P,k=1,2,\cdots,n\}$$

$$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\forall\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in P^n$$

科学出版社

高等代数课程创新型教材

高等代数选讲

张丽华　姚　波　黄　影　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是数学与应用数学专业选修课教材，全书共九章和两个附录。九章分别是多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间，每章包括知识点归纳与要点解析、典型例题、精选习题三部分内容。两个附录分别为精选习题提示及参考答案、大学生数学竞赛试题及参考答案。

本书可以作为数学专业学生的专业选修课教材、报考研究生的参考书，也可供其他理工科专业学生学习和报考研究生时使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数选讲 / 张丽华，姚波，黄影主编. —北京：科学出版社，2018.3
高等代数课程创新型教材
ISBN 978-7-03-041743-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②姚… ③黄… Ⅲ. ①高等代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 034900 号

责任编辑：张 震 姜 红 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：师艳茹 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
石家庄继文印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 3 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2018 年 3 月第一次印刷 印张：18 1/4
字数：433 000

定价：49.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

编委会成员

主　编

张丽华　姚　波　黄　影

副主编

何　新　　　　　李　巍

李　丽　　　　　王　楠

前　言

高等代数是数学专业三大必修专业基础课之一，是后续专业课如近世代数、常微分方程、最优化方法、泛函分析等的先修课，是考取数学及相关专业硕士研究生的必考科目之一。这门课程的鲜明特点是概念与定理较多，且多数较抽象，因此比较难学，再者受学时限制，有些重要内容在高等代数课程中未讲授，所以需要接着开设高等代数选讲这门课程以拓广学生的知识面，使学生对高等代数的理论知识掌握得更系统、更扎实、更完备，增强学生的抽象思维和逻辑思维能力，提高学生的高等代数解题能力和应用技巧，这些对学生学习后续专业课程及考研都非常有益。

本教材包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间。每一章的第一节为知识点归纳与要点解析，第二节为典型例题，第三节为精选习题。附录包括精选习题提示及参考答案、大学生数学竞赛试题及参考答案。

本教材的创新点如下：

（1）知识点覆盖全面，题型丰富。每一章的典型例题与知识点剖析相结合，分类列举，重难点突出。

（2）内容由浅入深，便于理解。题型包括基础题、中等题、较难题、考研真题等，适合不同程度的学习者。

（3）大学生数学竞赛试题（高等代数）部分可供数学爱好者和参加竞赛者备考时使用。

本教材的第一章和第二章由何新编写，第三章由李丽编写，第四章由李巍编写，第五章和第六章由黄影编写，第七章和第八章由张丽华编写，第九章由姚波编写，大学生数学竞赛试题及参考答案部分由王楠整理，全书由张丽华、黄影统一整理。

本教材曾以讲义的形式在沈阳师范大学数学与系统科学学院高等代数选讲课程中给学生讲授过，学生反映非常好，希望本教材的出版能为更多学生提供参考。本教材的出版得到“沈阳师范大学支柱性和标志性专业特色项目”的资助，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中有不足和疏漏之处在所难免，请广大读者批评指正。

作　者

2017 年 8 月于沈阳

目　　录

第一章　多　项　式

第一节　知识点归纳与要点解析

一、多项式的定义与运算

（一）多项式的定义

设 P 是一个数域，x 为一个文字。形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{1.1}$$

式（1.1）中的 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$，n 是非负整数，称为系数在数域 P 中的一个一元多项式，简称数域 P 上的一元多项式。在式（1.1）中，a_ix^i 称为 $f(x)$ 的第 i 次项，a_i 称为 $f(x)$ 的第 i 次项系数。当 $a_n\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 的次数为 n，记为 $\partial\left(f(x)\right)=n$，称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的首项，a_n 为 $f(x)$ 的首项系数；当 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ 且 $a_0\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 为零次多项式，即 $\partial\left(f(x)\right)=0$；系数全为零的多项式，称为零多项式。

注　零多项式是唯一不定义次数的多项式。

（二）多项式的相等

数域 P 上的两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项。

注　①证明两个多项式相等除了利用定义外，还可以在两个多项式首项系数相等的情况下，证明它们相互整除。②由多项式相等的定义可知，在一个多项式中，系数为零的项可以省略不写，当然有时为了讨论问题方便，也可以添加一些系数为零的项。③由多项式相等的定义还可知零多项式就是数 0，于是数域 P 中的数都是数域 P 上的一元多项式：P 中的非零数都是零次多项式，而数 0 是零多项式。④将首项系数为 1 的多项式简称为首 1 多项式。

（三）多项式的加法与乘法

设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$ 是数域 P 上两个多项式。不妨设 $n\geqslant m$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和表示成

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i+b_i\right)x^i \tag{1.2}$$

而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积表示成

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s \tag{1.3}$$

式（1.2）、式（1.3）中的 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$。

注　①多项式的加法和乘法与整数的加法和乘法满足相同的运算规律。②将数域 P 上

的一元多项式的全体，称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$。

（四）次数定理

设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$。

性质 1　当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时，$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$。

性质 2　若 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则 $f(x)g(x)\neq 0$，且 $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$。

二、多项式的整除

（一）带余除法定理

设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，且 $g(x)\neq 0$，则存在唯一的多项式 $q(x)$，$r(x)\in P[x]$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{1.4}$$

成立，在式（1.4）中 $r(x)=0$ 或 $\partial\left(r(x)\right)<\partial\left(g(x)\right)$。将式（1.4）中 $q(x)$ 和 $r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式和余式。

注　带余除法是多项式分类的工具，是辗转相除法的基础，也是求最大公因式的基础。

（二）多项式的整除

1. 整除的定义

设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，若存在 $q(x)\in P[x]$，使得 $f(x)=q(x)g(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$。此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式。否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$。

2. 整除的判定方法

方法 1　定义法。

方法 2　设 $g(x)\neq 0$，利用带余除法，即 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 0。

方法 3　验根法。设 c 为 $g(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上的任一根，证明 c 也必为 $f(x)$ 的根，且 c 在 $g(x)$ 中的重数不超过 c 在 $f(x)$ 中的重数。

3. 整除的性质

性质 1　$f(x)\mid g(x)$ 且 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当存在 $0\neq c\in P$，使得 $f(x)=cg(x)$。

性质 2　若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$。

性质 3　若 $g(x)\mid f_i(x)$，则 $g(x)\left|\sum\limits_{i=1}^{r}u_i(x)f_i(x)\right.$，$\forall u_i(x)\in P[x]$，$i=1,2,\cdots,r$。

三、最大公因式

（一）最大公因式的定义

设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，若 $P[x]$ 中的多项式 $d(x)$ 满足：$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；$f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

注　①如果 $f(x)=g(x)=0$，那么它们有唯一的最大公因式就是 0。②如果 $f(x)$ 与 $g(x)$

不全为零，那么它们有无数个最大公因式，这些最大公因式都不等于零，但它们彼此只差一个非零常数倍，即若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则 $d(x)\neq 0$，且集合 $\{cd(x)|c\in P, c\neq 0\}$ 给出了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有最大公因式。因此，此时若能求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，就可以求出它们所有的最大公因式，注意到集合 $\{cd(x)|c\in P, c\neq 0\}$ 中首 1 多项式只有一个，将其记为 $(f(x),g(x))$，我们只需求出 $(f(x),g(x))$ 即可。

（二）最大公因式的性质

性质 1 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

注 性质 1 的逆命题不成立，即若 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，未必有 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，例如：设 $f(x)=x+1, g(x)=-1, d(x)=x$，那么

$$d(x)=1f(x)+1g(x)$$

而 $d(x)$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的因式，所以不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。

如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式当且仅当存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

性质 2 对数域 P 中任意不等于零的数 k,l，有 $(f(x), g(x))=(kf(x), lg(x))$。

性质 3 设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$。

注 对任意 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，有

$$f(x)=(-u(x))g(x)+(f(x)+u(x)g(x)) \tag{1.5}$$

$$g(x)=(-v(x))f(x)+(v(x)f(x)+g(x)) \tag{1.6}$$

由式（1.5）、式（1.6）及性质 3 得

$$(f(x), g(x))=(f(x)+u(x)g(x), g(x))=(f(x),v(x)f(x)+g(x)) \tag{1.7}$$

由式（1.7）再结合性质 2 得

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=(f(x)+g(x),\ g(x))=(f(x)+g(x),-2g(x))\\&=(f(x)+g(x),\ f(x)-g(x))\end{aligned}$$

性质 4 $(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$，其中 $h(x)$ 为首 1 多项式。

注 由性质 4 可得

$$(f_1(x),g_1(x))(f_2(x),g_2(x))=(f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x), f_2(x)g_1(x), g_1(x)g_2(x))$$

（三）最大公因式的求法

(1) 利用最大公因式的定义及性质求多项式的最大公因式，此方法适用于在理论上证明某个多项式是某两个多项式的最大公因式。

(2) 对于给定具体系数的两个多项式，一般利用辗转相除法求最大公因式。

（四）多项式的互素

1. 多项式互素的定义

设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，若 $(f(x),g(x))=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。

2. 多项式互素的判定方法

方法 1　定义法。

方法 2　$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素当且仅当存在 $u(x)$， $v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

方法 3　在复数域上，两个非零多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无公共根当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。

方法 4　反证法。

3. 多项式互素的性质

性质 1　$(f(x),g(x))=1$ 且 $(h(x),g(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)h(x),g(x))=1$。

性质 2　若 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f^m(x),g^m(x))=1$，且 $(f(x^m),g(x^m))=1$。

性质 3　$(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

性质 4　若 $f(x)|g(x)h(x)$ 且 $(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)|h(x)$。

性质 5　若 $f(x)|g(x)$， $h(x)|g(x)$ 且 $(f(x),h(x))=1$，则 $f(x)h(x)|g(x)$。

四、多项式的因式分解

（一）不可约多项式

1. 不可约多项式的定义

数域 P 上次数大于等于 1 的多项式 $p(x)$ 称为数域 P 上的不可约多项式，如果它不能表示成数域 P 上两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积。

注　①数域 P 上的一次多项式都是数域 P 上的不可约多项式。②不可约多项式与所考虑的数域有关，例如 x^2-3 在有理数域上不可约，但在实数域上可约。

2. 不可约多项式的性质

设 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式。

性质 1　$cp(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，其中 $c\neq 0$， $c\in P$。

性质 2　对数域 P 上的任一多项式 $f(x)$，必有 $(p(x),f(x))=1$ 或者 $p(x)|f(x)$。

性质 3　设 $f(x)$， $g(x)\in P[x]$，若 $p(x)|f(x)g(x)$，则必有 $p(x)|f(x)$ 或者 $p(x)|g(x)$。

性质 4　若 $p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)(s\geqslant 2)$，则 $p(x)$ 至少可整除这些多项式中的一个。

（二）重因式

1. 重因式的定义

设 $f(x)\in P[x]$， $p(x)\in P[x]$ 是不可约多项式， k 为非负整数，若 $p^k(x)|f(x)$，且 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式。$k=1$ 时，称 $p(x)$ 为单因式；$k>1$ 时，称 $p(x)$ 为重因式；$k=0$ 时， $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式。

注　因为重因式本身一定是不可约因式，所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关。

2. 重因式的性质

设 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式。

性质 1　$p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式，则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。特别地，$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式。

性质 2　$p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式当且仅当它是 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。

性质 3　$p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式，即 $p(x)\big|\big(f(x), f'(x)\big)$。

性质 4　多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $\big(f(x), f'(x)\big)=1$。

性质 5　设 $f(x)$ 是数域 P 上次数大于等于 1 的多项式，则 $h(x)=\dfrac{f(x)}{\big(f(x), f'(x)\big)}$ 是一个没有重因式的多项式，但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式。即设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x) \tag{1.8}$$

式（1.8）中的 $s, r_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 都是正整数，$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_s(x)$ 是数域 P 上互不相同的首 1 不可约多项式，a 是 $f(x)$ 的首项系数，则

$$h(x)=\frac{f(x)}{\big(f(x), f'(x)\big)}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) \tag{1.9}$$

注　对比式（1.8）与式（1.9）可知，式（1.9）中的 $h(x)$ 具有如下性质。① $h(x)$ 无重因式。② $h(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式。③ $\partial(h(x))\leqslant\partial(f(x))$，特别当 $\big(f(x), f'(x)\big)\neq 1$ 时，$\partial(h(x))<\partial(f(x))$。因此，欲求 $f(x)$ 的不可约因式，只需求 $h(x)$ 的不可约因式。当 $\big(f(x), f'(x)\big)\neq 1$，即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素时，$h(x)$ 的次数比 $f(x)$ 的次数低，且 $\big(f(x), f'(x)\big)$ 的次数越高，$h(x)$ 的次数就越低，因而 $h(x)$ 的分解就比 $f(x)$ 的分解容易，$h(x)$ 的不可约因式相对地易求得。若求出了 $h(x)$ 的不可约因式，那么这些不可约因式在 $f(x)$ 中的重数很容易确定，这只需用带余除法，用这些不可约因式去除 $\big(f(x), f'(x)\big)$ 即可。这种方法称为分离重因式法，可用来解决当 $\big(f(x), f'(x)\big)\neq 1$ 时的某些多项式 $f(x)$ 的因式分解问题。

（三）多项式函数

1. 相关概念

1）多项式函数的定义

设数 $\alpha\in P$，而

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x] \tag{1.10}$$

将式（1.10）里 $f(x)$ 表示式中的 x 用 α 代替得到 P 中的数

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0 \tag{1.11}$$

称式（1.11）中的数为当 $x=\alpha$ 时 $f(x)$ 的值，记为

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0 \tag{1.12}$$

于是，对每个数$\alpha \in P$，由多项式$f(x)$确定数域P中唯一的数$f(\alpha)$与之对应，因此由$P[x]$中的多项式$f(x)$定义了一个P到P的映射：

$$\alpha \mapsto f(\alpha),\ \forall \alpha \in P \tag{1.13}$$

称映射式（1.13）为由$P[x]$中的多项式$f(x)$定义的数域P上的一个多项式函数，将其仍用$f(x)$表示。

2）多项式函数相等

设$f(x)$，$g(x) \in P[x]$，那么$f(x)$与$g(x)$定义的数域P上的多项式函数相等指的是对任意的$\alpha \in P$，有$f(\alpha)=g(\alpha)$成立。

3）多项式的根

设$f(x) \in P[x]$，数$\alpha \in P$。若$f(\alpha)=0$，则称α为$f(x)$的一个根或者零点。若$x-\alpha$是$f(x)$的k重因式，则称α为$f(x)$的k重根；当$k=1$时，称α为$f(x)$的单根；当$k>1$时，称α为$f(x)$的重根。

4）拉格朗日插值多项式

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是数域P中n个不同的数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$是数域P中n个不全为零的数，则存在唯一的一个次数小于n的多项式$L(x) \in P[x]$，使得

$$L(a_i)=b_i\,, i=1,2,\cdots,n \tag{1.14}$$

若令$l_i(x)=\dfrac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}(i=1,\cdots,n)$，则有

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i l_i(x) \tag{1.15}$$

称式（1.15）中的多项式$L(x)$为拉格朗日插值多项式（或插值多项式）。显然$L(x)$是满足条件式（1.14）的次数最低的多项式。

2. 相关结论

（1）余数定理：设$f(x) \in P[x]$，$\alpha \in P$，用一次多项式$x-\alpha$去除$f(x)$所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值$f(\alpha)$。

（2）因式定理：设$f(x) \in P[x]$，$\alpha \in P$，则$x-\alpha \mid f(x)$的充分必要条件是$f(\alpha)=0$。

（3）$P[x]$中$n(\geqslant 0)$次多项式在数域P中的根不可能多于n个（重根按重数计算）。

（4）设$f(x)$，$g(x) \in P[x]$，且$f(x)$，$g(x)$的次数都不超过n，若对于数域P中$n+1$个不同的数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$有$f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$成立，则$f(x)=g(x)$。

（5）设$f(x)$，$g(x) \in P[x]$，则$f(x)=g(x)$当且仅当$f(x)$与$g(x)$定义的数域P上的多项式函数相等，即$f(x)=g(x)$当且仅当对任意$\alpha \in P$，有$f(\alpha)=g(\alpha)$成立。

（四）复数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 复数域上多项式的因式分解定理

复系数$n(\geqslant 1)$次多项式在复数域上都可唯一地分解成一次因式的乘积。换句话说，复数域上任一次数大于1的多项式都是可约的。

2. 复数域上多项式的标准分解式

复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_s)^{r_s} \tag{1.16}$$

式（1.16）中的 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数，$r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数且 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$。

3. 代数基本定理

每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中至少有一根。n 次复系数多项式在复数域中恰有 n 个复根（重根按重数计算）。

（五） 实数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 实系数多项式的因式分解定理

实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式在实数域上都可唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积。换句话说，实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上不可约的充分必要条件是 $\partial\left(f(x)\right)=1$ 或 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $b^2-4ac<0$。

2. 实系数多项式的标准分解式

实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\cdots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{k_t} \tag{1.17}$$

式（1.17）中的 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是互异实数。p_i，q_i $(i=1,2,\cdots,t)$ 是互异实数对，且满足 $p_i^2-4q_i<0$ $(i=1,2,\cdots,t)$。$l_1,l_2,\cdots,l_s,k_1,k_2,\cdots,k_t$ 都是正整数，使得 $l_1+l_2+\cdots+l_s+2k_1+2k_2+\cdots+2k_t=n$。

3. 实系数多项式的根

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbf{C}[x]$，$\overline{a_i}\,(i=0,1,\cdots,n)$ 为 a_i 的共轭复数，记

$$\overline{f(x)}=\overline{a}_nx^n+\overline{a}_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\overline{a}_0$$

于是，当 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbf{R}[x]$ 时，有 $\overline{f(x)}=f(x)$，因此，若 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个非实的复数根，则它的共轭复数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，再由实系数多项式因式分解定理知 α 与 $\overline{\alpha}$ 有同一重数。即实系数多项式的虚根成对出现。于是若实系数多项式 $f(x)$ 的次数为大于 0 的奇数，则 $f(x)$ 必有实根。

（六）有理数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 本原多项式

（1）本原多项式的定义：若一个非零的整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素，则称 $f(x)$ 是一个本原多项式。

（2）相关性质。

性质 1 设 $f(x)$ 是任一非零有理系数多项式，则存在有理数 r 及本原多项式 $h(x)$，使

$f(x)=rh(x)$，且这种表示法除了差一个正负号外是唯一的。即若

$$f(x)=rh(x)=sg(x) \tag{1.18}$$

式（1.18）中的 $h(x)$，$g(x)$ 都是本原多项式，$r,s\in\mathbf{Q}$，则必有 $r=\pm s$，$h(x)=\pm g(x)$。

性质 2（高斯引理） 两个本原多项式的乘积还是本原多项式。

性质 3 若一个次数大于 1 的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积。即整系数多项式在有理数域上可约当且仅当它在整数环上可约。

性质 4 设 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 为本原多项式，若 $f(x)=g(x)h(x)$，$h(x)$ 是有理系数多项式，则 $h(x)$ 一定是整系数多项式。

性质 5 设 $f(x)$ 是整系数多项式，$\alpha=\frac{r}{s}$（r 和 $s\neq 0$ 是互素的整数）是它的一个有理根，那么 $f(x)=\left(x-\frac{r}{s}\right)u(x)$，$u(x)$ 是整系数多项式。

2. 艾森斯坦判别法

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式，若存在素数 p，使 $p|a_i\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$；$p\nmid a_n$；$p^2\nmid a_0$，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

注 艾森斯坦判别条件仅是判别一个整系数多项式在有理数域上不可约的充分条件。

3. 有理根的判定

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\alpha=\frac{r}{s}$（r 和 $s\neq 0$ 是互素的整数）是它的一个有理根，则

（1）必有 $s|a_n$，$r|a_0$。特别地，若 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$，则 $f(x)$ 的有理根都是整数根，而且都是 a_0 的因子。

（2）如果 $f(1)\neq 0, f(-1)\neq 0$，$\alpha\neq\pm 1$，那么由性质 5 知必有 $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ 都是整数，于是若 $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ 中有一个不是整数，则 $\alpha=\frac{r}{s}$ 一定不是 $f(x)$ 的根。

第二节 典 型 例 题

知识点 1：次数性质

例 1.1 （杭州师范大学，2011 年）设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实系数多项式且 $x^3f^2(x)=x^2g^4(x)+x^4h^6(x)$，求证：$f(x)=g(x)=h(x)=0$。

证明： 先证 $g(x)$ 和 $h(x)$ 全为零多项式。假设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 不全为零多项式。

情形 1 如果 $g(x)$，$h(x)$ 中之一为零多项式，比较 $x^3f^2(x)=x^2g^4(x)+x^4h^6(x)$ 两边的多项式的次数得奇数=偶数，矛盾。因此假设不成立。

情形 2 如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 均不为零多项式，由于 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实系数多项式，而 $x^2g^4(x)$ 与 $x^4h^6(x)$ 的首项系数都大于零，知 $x^2g^4(x)+x^4h^6(x)\neq 0$。

由 $x^3f^2(x)=x^2g^4(x)+x^4h^6(x)$，所以 $x^3f^2(x)\neq 0$，由此推导出 $f(x)\neq 0$，比较 $x^3f^2(x)=x^2g^4(x)+x^4h^6(x)$ 两边的多项式的次数得奇数=偶数，矛盾。

综上分析得出 $g(x)=h(x)=0$，从而 $f(x)=0$。

知识点 2：带余除法

例 1.2 求一个次数最低的实系数多项式 $f(x)$，使其被 x^2+1 除余式为 $x+1$，被 x^3+x^2+1 除余式为 x^2-1。

解： 由已知条件可知，存在 $g(x),h(x)\in\mathbf{R}[x]$。使得

$$f(x)=\left(x^2+1\right)g(x)+(x+1)=\left(x^3+x^2+1\right)h(x)+\left(x^2-1\right) \tag{1.19}$$

由式（1.19）知 $f(x)$ 的次数≥2。

为了使 $f(x)$ 次数最低，令式（1.19）中的 $h(x)=ax+b\in\mathbf{R}[x]$，并将 $x=\mathrm{i}$ 代入式（1.19）中，得 $-(a-3)+\mathrm{i}(b+1)=0$，推出 $a=3,\ b=-1$。于是

$$f(x)=\left(x^3+x^2+1\right)(3x-1)+\left(x^2-1\right)=3x^4+2x^3+3x-2$$

知识点 3：整除

例 1.3 设 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x)$。

（1）证明：若 $f_1(x)\mid g_1(x)$，且 $f_1(x)\neq 0$，则必有 $g_2(x)\mid f_2(x)$。

（2）若 $g_1(x)\mid f_1(x)$，是否 $g_2(x)\mid f_2(x)$？

（1）**证明：** 因为 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)\mid g_1(x)$，故存在多项式 $h(x)$，$h_1(x)$，使得

$$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)h(x),\quad g_1(x)=f_1(x)h_1(x)$$

于是有

$$f_1(x)f_2(x)=f_1(x)h_1(x)g_2(x)h(x)$$

由 $f_1(x)\neq 0$，得 $f_2(x)=g_2(x)h(x)h_1(x)$。故 $g_2(x)\mid f_2(x)$。

（2）**解：** 不一定。例如：

$$g_1(x)=x-2,\quad g_2(x)=x^2-1,\quad f_1(x)=(x-1)(x-2),\quad f_2(x)=(x+1)(x+2)$$

虽然 $g_1(x)g_2(x)=(x-2)\left(x^2-1\right)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)$，且 $g_1(x)\mid f_1(x)$，但 $g_2(x)\nmid f_2(x)$。

知识点 4：最大公因式

例 1.4 已知 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,\ g(x)=x^3+x^2-x-1$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。

解： 利用辗转相除法。

$-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x
	$x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-1$	$-2x^2-3x-1$	$\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{3}$
	$-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	
	$-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		0	

用等式表示为

$$f(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1)$$

$$g(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(-2x^2-3x-1)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$-2x^2-3x-1=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)+(-x-1)$$

$$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(-x-1)+0$$

则 $\big(f(x),g(x)\big)=x+1$。

注　在用辗转相除法求两个具体多项式的最大公因式时，为了避免出现分数，可以将被除式或除式乘上适当的非零数以简化计算，其理论依据见最大公因式的性质 2 和性质 3。但是如果想将最大公因式表示成两个多项式的组合，那么只能像例 1.4 那样做。

例 1.5　（上海大学，2004 年）$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式。假设 x^4+x^2+1 整除 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$。试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式。

解： 由题设知

$$f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)=h(x)(x^4+x^2+1) \tag{1.20}$$

又

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1=(x^3-1)(x^3+1) \tag{1.21}$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1) \tag{1.22}$$

由式（1.21）与式（1.22）知 x^2+x+1 的两个根 $\omega_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\omega_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$（它们都是 1 的立方根）与 x^2-x+1 的两个根 $\omega_3=\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 和 $\omega_4=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$（它们都是 -1 的立方根）都是 x^4+x^2+1 的根，因此 x^4+x^2+1 的 4 个根是 1 和 -1 的非实数的立方根。于是，取 1 的两个非实数立方根 ω_1 和 ω_2 分别代入式（1.20）得

$$\begin{cases} f_1(1)+\omega_1 f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\omega_2 f_2(1)=0 \end{cases} \tag{1.23}$$

解线性方程组（1.23）得 $f_1(1)=f_2(1)=0$，即 $x-1$ 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式。