# 随机动力学引论

## （习题与解答）

朱位秋 〔美〕蔡国强 著

科学出版社

# 随机动力学引论

## (习题与解答)

朱位秋　〔美〕蔡国强　著



科学出版社
北京

## 内 容 简 介

鉴于理解与掌握随机动力学的困难，迄今相关著作又没有足够的习题，《随机动力学引论》一书提供了相当多数量的习题，本书就是这些习题的解答集. 第 2 至第 4 章是关于随机变量与随机过程的习题解答，对本学科的新手与研究生，透切理解它们是十分重要的. 其后几章是关于随机动力学的基本理论方法的习题解答，较为复杂，但可启发一些新的研究课题. 要说明的是，本书仅提供这些习题的一种解答，别的解答方法，甚至更好的解答方法都是有可能的.

本习题解答可作为《随机动力学引论》一书的辅助参考书. 供阅读该书的各领域的科技人员与高校师生使用，更可以作为使用该书的教师和研究生的必要工具书.

**图书在版编目（CIP）数据**

随机动力学引论：习题与解答/朱位秋，(美) 蔡国强著. —北京：科学出版社，2017. 8

ISBN 978-7-03-053014-1

I. ①随… Ⅱ. ①朱… ②蔡… Ⅲ. ①随机变量—动力学—习题集 Ⅳ. ①O313-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 119037 号

责任编辑：刘信力／责任校对：彭 涛
责任印制：张 伟／封面设计：耕者设计

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年10月第二次印刷 印张：15
字数：300 000

**定价：78.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　　言

本书是《随机动力学引论》一书的习题解答.《随机动力学引论》一书的第 2 至第 4 章提供了随机变量与随机过程的基础知识, 对初入本领域的研究人员和研究生, 在学习这几章时, 作习题对更好地理解概念是很重要的. 第 5 章给出了在时间域和频率域上求线性系统随机响应的若干方法, 是最基本的随机动力学内容, 做这一章的习题对进行随机动力学的研究是必要的. 第 6 至第 9 章是随机动力学的主要内容, 读者可以根据自己的兴趣和研究方向来确定阅读内容, 并做有关习题. 这些习题在做随机动力学研究时, 可能会提供有用的提示和线索.

本书给出的解答主要是针对有解析解的习题. 对需要进一步作数值计算的习题以及需要作模拟的习题, 本书没有给出解答.

本书提供的解答仅供参考, 不一定是唯一的. 可能还有其他解法, 也可能有更好、更简捷的解法.

作　者

2017 年 6 月 20 日

# 目　　录

# 第2章　随机变量

**2.1**　帕累托 (Pareto) 分布的随机变量的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} rA^r x^{-(r+1)}, & x\geqslant A>0,\\ 0, & x<A.\end{cases}$$

式中 $r>0$. 求 $X$ 的 $n$ 阶矩及其存在的条件.

**解**　$$m_n=E[X^n]=rA^r\int_A^{\infty}x^{n-r-1}\mathrm{d}x=\frac{rA^r}{n-r}x^{n-r}\bigg|_{x=A}^{\infty}=\frac{rA^n}{r-n},\quad r>n.$$

虽然 $p(x)$ 总可以归一化, 但 $n$ 阶矩是否存在取决于参数 $r$.

**2.2**　随机变量 $X$ 服从伽马 (Gamma) 分布, 即

$$p_X(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x},\quad x\geqslant 0,\quad \beta>0.$$

证明其均值和方差为

$$\mu_X=\frac{\alpha}{\beta},\quad \sigma_X^2=\frac{\alpha}{\beta^2}.$$

**解**　$$\begin{aligned}\mu_X&=\int_0^{\infty}xp_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\\ &=-\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}\bigg|_{x=0}^{\infty}+\frac{\alpha\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\\ &=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{\infty}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{\infty}p_X(x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\beta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[X^2]&=\int_0^{\infty}x^2p_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\\ &=-\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\beta x}\bigg|_{x=0}^{\infty}+\frac{(\alpha+1)\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\\ &=\frac{(\alpha+1)}{\beta}\int_0^{\infty}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x=\frac{(\alpha+1)}{\beta}\int_0^{\infty}xp_X(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{(\alpha+1)}{\beta}\mu_X=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.\end{aligned}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

**2.3**　求具有下列概率密度函数的随机变量的特征函数.

(1) 狄拉克 $\delta$ 函数分布

$$p(x) = \delta(x-a);$$

(2) 均匀分布

$$p(x) = \frac{1}{2a}, \quad -a \leqslant x \leqslant a, \quad a > 0;$$

(3) 指数分布

$$p(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0, \quad \lambda > 0;$$

(4) 柯西分布

$$p(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}, \quad a > 0.$$

如可能, 从特征函数求均值和均方值.

**解**　应用 (2.4.1) 式和 (2.4.3) 式, 即

$$M(\theta) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} p(x)\mathrm{d}x, \quad m_n = E[X^n] = \frac{1}{\mathrm{i}^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n M(\theta)}{\mathrm{d}\theta^n}\right]_{\theta=0}.$$

(1) $M(\theta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\delta(x-a)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta a}, \quad m_1 = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]_{\theta=0} = a,$

$$m_2 = -\left[\frac{\mathrm{d}^2 M(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\right]_{\theta=0} = a^2.$$

(2) $M(\theta) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a\theta}\sin(a\theta), \quad m_1 = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]_{\theta=0} = 0,$

$$m_2 = -\left[\frac{\mathrm{d}^2 M(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\right]_{\theta=0} = \frac{1}{3}a^2.$$

(3) $M(\theta) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\mathrm{d}x = \lambda\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\cos\theta x + \mathrm{i}\sin\theta x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda(\lambda+\mathrm{i}\theta)}{\lambda^2+\theta^2},$

$$m_1 = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]_{\theta=0} = \frac{1}{\lambda}, \quad m_2 = -\left[\frac{\mathrm{d}^2 M(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\right]_{\theta=0} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

(4) $M(\theta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\mathrm{d}x.$

由于 $M(\theta)$ 是偶函数, 这里考虑 $\theta > 0$ 情形. 下式积分可用留数定理算出,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}[f(z)], \tag{2.3.a}$$

式中 $f(z)$ 是复变函数, 用复变量 $z$ 替换了实变量 $x$ , 求和是在上半平面 $f(z)$ 所有奇点的留数之和. 对于单个奇点 $z=z_i$ , 可得

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)=\lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z). \tag{2.3.b}$$

现考虑如下复变函数

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}}{(z^2+a^2)}. \tag{2.3.c}$$

奇点 $z=a\mathrm{i}$ 在上半平面, 其留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=a\mathrm{i}} f(z)=[(z-a\mathrm{i})f(z)]_{z\to a\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-a\theta}}{2a\mathrm{i}}. \tag{2.3.d}$$

把式 (2.3.d) 代入 (2.3.a), 得

$$M(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{a\theta},\quad \theta>0. \tag{2.3.e}$$

最终

$$M(\theta)=\mathrm{e}^{-a|\theta|}. \tag{2.3.f}$$

$\mathrm{e}^{-a|\theta|}$ 在 $\theta=0$ 处不可微.

**2.4** 令 $X\sim N(\mu,\sigma)$, 试导出 (2.5.4), 即

$$E[X^n]=\mu E[X^{n-1}]+(n-1)\sigma^2E[X^{n-2}],\quad n=2,3,\cdots.$$

**解** $X$ 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.4.a}$$

对以下等式

$$x^n=(x-\mu)x^{n-1}+\mu x^{n-1}, \tag{2.4.b}$$

作集合平均

$$E[X^n]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)x^{n-1}p(x)\mathrm{d}x+\mu\int_{-\infty}^{\infty}x^{n-1}p(x)\mathrm{d}x. \tag{2.4.c}$$

把 (2.4.a) 式代入 (2.4.c) 式, 对 (2.4.c) 式右边第一项作分部积分, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)x^{n-1}p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)x^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} p(x)\mathrm{d}x \\
&= \sigma^2(n-1)E[X^{n-2}]. \qquad (2.4.\mathrm{d})
\end{aligned}
$$

综合考虑 (2.4.c) 式和 (2.4.d) 式, 此问题即得证.

**2.5**　令 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, 证明

$$
E[(X-\mu_X)^n] = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ \cdots \ \cdot(n-1)\sigma_X^n, & n\text{为偶数}, \\ 0, & n\text{为奇数}. \end{cases}
$$

**解**　考虑标准高斯变量 $U \sim N(0,1)$. 它的概率密度为

$$
p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}.
$$

应用分部积分,

$$
\begin{aligned}
E[U^n] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^n \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{n-1} \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (n-1) \int_{-\infty}^{\infty} u^{n-2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = (n-1)E[U^{n-2}].
\end{aligned}
$$

由 (2.5.7) 式知

$$
E[(X-\mu_X)^n] = \sigma_X^n E[U^n] = (n-1)\sigma_X^n E[U^{n-2}].
$$

注意到 $E[U] = 0$ 和 $E[U^2] = 1$, 此问题即得证.

**2.6**　计算随机变量 $X$ 的歪斜系数 $\gamma_1$ 和峰态系数 $\gamma_2$, 其概率密度为

$$
p(x) = C\mathrm{e}^{-x^2 - \alpha x^4}, \quad -\infty < x < \infty,
$$

式中 $C$ 为归一化常数. 画出这两个系数随参数 $\alpha$ 变化的曲线.

**解**　$\mu_X = 0$.

$$
C = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - \alpha x^4)\mathrm{d}x\right]^{-1}.
$$

$$
E[X^n] = C\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-x^2 - \alpha x^4)\mathrm{d}x, \quad n = 2, 3, 4.
$$

$$\gamma_1 = \frac{E[X^3]}{(E[X^2])^{3/2}}, \quad \gamma_2 = \frac{E[X^4]}{(E[X^2])^2}.$$

取 $\alpha$ 为 0 到某一值, 数值计算 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ , 可画出 $\gamma_1 \sim \alpha$ 和 $\gamma_2 \sim \alpha$ 曲线.

**2.7**　求习题 2.2 中定义的随机变量 $X$ 的特征函数, 然后用特征函数计算 $n$ 阶矩.

**解**　$p_X(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, \quad x \geqslant 0, \quad \alpha, \beta > 0.$

$$\begin{aligned} M_X(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} p_X(x) \mathrm{d}x = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - \beta)x} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

令 $z = (\beta - \mathrm{i}\theta)x$, 可得

$$M_X(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta - \mathrm{i}\theta)^\alpha} \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-z} \mathrm{d}z = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - \mathrm{i}\theta)^\alpha}.$$

$$m_n = E[X^n] = \frac{1}{\mathrm{i}^n} \left[ \frac{\mathrm{d}^n M_X(\theta)}{\mathrm{d}\theta^n} \right]_{\theta=0} = \frac{1}{\beta^n} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1).$$

$$\mu_X = m_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad E[X^2] = m_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

两个结果都与题 2.2 所得结果相同.

**2.8**　式 (2.5.13) 给出的泊松分布的概率密度函数可表示为

$$p_X(x) = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \delta(x - n).$$

求它的特征函数, 并从特征函数得到 $n$ 阶矩.

**解**　$M_X(\theta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} p_X(x) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} \delta(x - n) \mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}{n!} = \exp[\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1)].$$

$$m_k = E[X^k] = \frac{1}{\mathrm{i}^k} \left[ \frac{\mathrm{d}^k M_X(\theta)}{\mathrm{d}\theta^k} \right]_{\theta=0} = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n n^k}{n!}.$$

这与 (2.5.14) 式相同.

**2.9**　证明当参数 $\mu$ 趋于无穷时, 式 (2.5.13) 给出的泊松分布趋近高斯分布.

**解**　考虑标准泊松随机变量 $Y=\dfrac{N-\mu}{\sqrt{\mu}}$. $Y$ 的特征函数为

$$
\begin{aligned}
M_Y(\theta) &= E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Y}] = E\left\{\exp\left[\frac{\mathrm{i}\theta(N-\mu)}{\sqrt{\mu}}\right]\right\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\sqrt{\mu}}E\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}\theta N}{\sqrt{\mu}}\right)\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\sqrt{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/\sqrt{\mu}}\frac{\mu^n\mathrm{e}^{-\mu}}{n!} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\sqrt{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/\sqrt{\mu}})^n}{n!}\mathrm{e}^{-\mu} \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\sqrt{\mu}}\exp[\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/\sqrt{\mu}}-1)].
\end{aligned} \tag{2.9.a}
$$

应用 Taylor 展开, 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/\sqrt{\mu}}-1 &= \frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{\mu}}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{\mu}}\right)^3+\cdots \\
&= \frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{\mu}}-\frac{\theta^2}{2\mu}-\frac{\mathrm{i}\theta^3}{6\mu^{3/2}}+\cdots .
\end{aligned} \tag{2.9.b}
$$

将 (2.9.b) 式代入 (2.9.a) 式,

$$
\begin{aligned}
M_Y(\theta) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\sqrt{\mu}}\exp\left[\mu\left(\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{\mu}}-\frac{\theta^2}{2\mu}-\frac{\mathrm{i}\theta^3}{6\mu^{3/2}}+\cdots\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}-\frac{\mathrm{i}\theta^3}{6\sqrt{\mu}}+\cdots\right).
\end{aligned} \tag{2.9.c}
$$

由于 $\mu\to\infty$, $M_Y(\theta)\to\mathrm{e}^{-\theta^2/2}$; 因此, $Y$ 是标准高斯分布变量, $N$ 也是高斯分布的变量, 且均值和方差都为 $\mu$.

**2.10**　随机变量 $X$ 的特征函数为

$$
M_X(\theta)=\frac{1}{1+\theta^2}.
$$

求 $X$ 的概率密度函数, 并计算其 $n$ 阶矩.

**解**　$p_X(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}M_X(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x}\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{\cos\theta x}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}.$

$$
m_n=E[X^n]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n=\text{奇数},\\ \Gamma(n+1)=n!, & n=\text{偶数}.\end{cases}
$$

**2.11**　导出用矩和中心矩表达的 5 阶和 6 阶累积量的公式.

**解**　考虑一零均值随机变量 $Y$. 根据 (2.4.4) 式, 它的特征函数可表示为

$$
M_Y(\theta)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n}{n!}(\mathrm{i}\theta)^n. \tag{2.11.a}
$$

令 $Q=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n}{n!}(\mathrm{i}\theta)^n$, 用如下展开式计算 $\ln M_Y(\theta)$:

$$\ln M_Y(\theta)=\ln(1+Q)=Q-\frac{1}{2}Q^2+\frac{1}{3}Q^3-\frac{1}{4}Q^4+\frac{1}{5}Q^5-\cdots. \tag{2.11.b}$$

保留到 6 阶, 有

$$\begin{aligned}Q=&\frac{1}{2}m_2(\mathrm{i}\theta)^2+\frac{1}{6}m_3(\mathrm{i}\theta)^3+\frac{1}{24}m_4(\mathrm{i}\theta)^4\\&+\frac{1}{120}m_5(\mathrm{i}\theta)^5+\frac{1}{720}m_6(\mathrm{i}\theta)^6+\cdots,\end{aligned} \tag{2.11.c}$$

$$\begin{aligned}Q^2=&\frac{1}{4}m_2^2(\mathrm{i}\theta)^4+\frac{1}{6}m_2m_3(\mathrm{i}\theta)^5+\frac{1}{36}m_3^2(\mathrm{i}\theta)^6\\&+\frac{1}{24}m_2m_4(\mathrm{i}\theta)^6+\cdots,\end{aligned} \tag{2.11.d}$$

$$Q^3=\frac{1}{8}m_2^3(\mathrm{i}\theta)^6+\cdots. \tag{2.11.e}$$

将 (2.11.c) 式 ~ (2.11.e) 式代入 (2.11.b) 式, 得

$$\begin{aligned}\ln M_Y(\theta)=&\frac{1}{2}m_2(\mathrm{i}\theta)^2+\frac{1}{6}m_3(\mathrm{i}\theta)^3\\&+\frac{1}{24}(m_4-3m_2^2)(\mathrm{i}\theta)^4+\frac{1}{120}(m_5-10m_2m_3)(\mathrm{i}\theta)^5\\&+\frac{1}{720}(m_6-15m_2m_4-10m_3^2+30m_2^3)(\mathrm{i}\theta)^6+\cdots.\end{aligned} \tag{2.11.f}$$

比较 (2.11.f) 式与 (2.4.5) 式, 即

$$\ln M_Y(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa_n[Y]}{n!}(\mathrm{i}\theta)^n. \tag{2.11.g}$$

然后用 $E[Y^n]$ 替换 $m_n$, 得

$$\begin{aligned}&\kappa_5[Y]=E[Y^5]-10E[Y^2]E[Y^3],\\&\kappa_6[Y]=E[Y^6]-15E[Y^2]E[Y^4]-10\left(E[Y^3]\right)^2+30\left(E[Y^6]\right)^3.\end{aligned} \tag{2.11.h}$$

又因为 $Y=X-\mu_X$, $\kappa_n[X]=\kappa_n[Y]$, $n=5,6$, 可得

$$\begin{aligned}\kappa_5[X]=&E[(X-\mu_X)^5]-10E[(X-\mu_X)^2]E[(X-\mu_X)^3],\\\kappa_6[X]=&E[(X-\mu_X)^6]-15E[(X-\mu_X)^2]E[(X-\mu_X)^4]\\&-10\left\{E[(X-\mu_X)^3]\right\}^2+30\left\{E[(X-\mu_X)^2]\right\}^3.\end{aligned} \tag{2.11.i}$$

展开两式, 用 $E[X^n]$ 替换 $m_n$, 可得

$$\kappa_5[X]=m_5-10m_2m_3-5m_1m_4+30m_1m_2^2+20m_1^2m_3-60m_1^3m_2+24m_1^5,$$

$$\kappa_6[X] = m_6 - 10m_3^2 + 30m_2^3 - 15m_2m_4 + 120m_1m_2m_3 - 6m_1m_5 - 270m_1^2m_2^2 + 30m_1^2m_4 - 120m_1^3m_3 + 360m_1^4m_2 - 120m_1^6. \tag{2.11.j}$$

**2.12**　$X$ 和 $Y$ 是两个随机变量, 定义如下概念:

$X$ 与 $Y$ 的内积: $< X,Y >= E[XY]$;

$X$ 的模: $\| X \|= \sqrt{< X,X >} = \sqrt{E[X^2]}$;

$X$ 与 $Y$ 的距离: $d(X,Y) =\| X - Y \|$.

证明:

(1) $d(X,Y) \geqslant 0$;

(2) $d(X,Y) = 0$ 当且仅当 $X = Y$;

(3) $d(X,Y) = d(Y,X)$;

(4) $d(X,Y) \leqslant d(X,Z) + d(Z,Y)$.

**解**　(1) $d(X,Y) = \|X - Y\| = \sqrt{E[(X-Y)^2]} \geqslant 0$.

(2) 若 $d(X,Y) = 0$, $d(X,Y) = \|X - Y\| = \sqrt{E[(X-Y)^2]} = 0$, 则 $X = Y$. 相反, 若 $X = Y$, 则 $d(X,Y) = \sqrt{E[(X-X)^2]} = 0$.

(3) $d(X,Y) = \sqrt{E[(X-Y)^2]} = \sqrt{E[(Y-X)^2]} = d(Y,X)$.

(4) 
$$\begin{aligned} d^2(X,Y) &= E[(X-Y)^2] = E\{[(X-Z)+(Z-Y)]^2\} \\ &= E[(X-Z)^2] + 2E[(X-Z)(Z-Y)] + E[(Z-Y)^2] \\ &= d^2(X,Z) + d^2(Z,Y) + 2E[(X-Z)(Z-Y)]. \end{aligned}$$

根据施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned} &E[(X-Z)(Z-Y)] \leqslant E[|(X-Z)(Z-Y)|] \\ \leqslant &\left\{E[(X-Z)^2]E[(Z-Y)^2]\right\}^{1/2} = d(X,Z)d(Z,Y). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} &d^2(X,Y) \leqslant d^2(X,Z) + d^2(Z,Y) + 2d(X,Z)d(Z,Y) \\ = &[d(X,Z) + d(Z,Y)]^2, \end{aligned}$$

$$d(X,Y) \leqslant d(X,Z) + d(Z,Y).$$

**2.13**　两个随机变量 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度为

(1) $p(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2},\quad 1 \leqslant x, y < \infty$;

(2) $p(x,y) = \dfrac{1}{\pi},\quad x^2 + y^2 \leqslant 1$;

(3) $p(x,y) = y^2\mathrm{e}^{-y(1+x)}, \quad x,y \geqslant 0.$

对以上几种情形, 求 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度函数, 并判断 $X$ 和 $Y$ 是否不相关和独立.

**解**　(1) $p_X(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}, \quad p_Y(y) = \frac{1}{y^2}, \quad X,Y$ 相互独立.

(2) $p_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad p_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}.$

$$E[XY] = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

$X,Y$ 不相关, 但不独立.

(3) $p_X(x) = \int_0^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-y(1+x)}\mathrm{d}y = \frac{2}{(1+x)^3}.$

$$p_Y(y) = \int_0^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-y(1+x)}\mathrm{d}x = y\mathrm{e}^{-y}.$$

$$E[XY] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xy^3\mathrm{e}^{-y(1+x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1,$$

$X,Y$ 相关, 因此, 也不独立.

**2.14**　$X$ 和 $Y$ 是两个具有相同概率分布的高斯随机变量, 证明 $(X+Y)$ 与 $(X-Y)$ 是独立的.

**解**　$E[(X+Y)(X-Y)] = E[X^2] - E[Y^2] = 0.$

由于 $X+Y$, $X-Y$ 都是高斯变量, 不相关意味着独立.

**2.15**　$X_1$ 和 $X_2$ 是两个具有零均值的高斯随机变量, 并有如下矩

$$E[X_1^2] = 4, \quad E[X_1X_2] = 2, \quad E[X_2^2] = 9.$$

(1) 求 $X_1$ 与 $X_2$ 的联合概率密度函数与各自的边缘概率密度, 以及 $X_1|X_2$ 的条件概率密度;

(2) 定义变量

$$Y_1 = 2X_1 - X_2, \quad Y_2 = 3X_1 - aX_2,$$

确定 $a$ 取何值时, $Y_1$ 与 $Y_2$ 是独立的.

**解**　(1) $\sigma_{X_1} = 2, \quad \sigma_{X_2} = 3, \quad \rho_{X_1X_2} = \frac{\kappa_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{E[X_1X_2]}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{1}{3}.$

因为 $X_1, X_2$ 是高斯随机变量, 可得

$$p(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2}{8}}, \quad p(x_2) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x_2^2}{18}}.$$

根据 (2.6.28) 式, 得

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{64}(9x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2)\right].$$

应用 (2.6.11) 式, 可计算条件概率密度,

$$\begin{aligned} p_{X_1|X_2}(x_1 | x_2) &= \frac{p_{X_1X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)} \\ &= \frac{3}{8\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{9}{64}x_1^2 - \frac{1}{16}x_1x_2 + \frac{1}{144}x_2^2\right)\right]. \end{aligned}$$

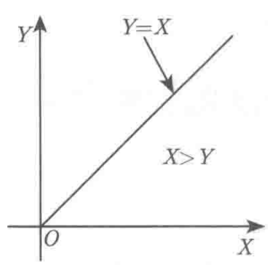
(2) $E[Y_1Y_2] = 6E[X_1^2] - (3+2a)E[X_1X_2] + aE[X_2^2] = 5a + 18.$
令 $E[Y_1Y_2]$ 为零, 可得 $a = -3.6$. 在此情形下, $Y_1$, $Y_2$ 是不相关的, 又因为具有高斯性, 所以它们是独立的.

**2.16**　设随机变量 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度为

$$p_{XY}(x, y) = C\mathrm{e}^{-(x+3y)}, \quad x, y \geqslant 0.$$

试问 $X$ 与 $Y$ 是否独立, 并求 $X > Y$ 的概率.

**解**　如题图 2.16 所示.



题图 2.16

$$C = \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{-1} = 3.$$

$$p_X(x) = 3\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-x}.$$

$$p_Y(y) = 3\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{-3y}.$$

因为 $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$, 所以 $X, Y$ 是独立的.

$$\mathrm{Prob}[X > Y] = 3\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}y = \frac{3}{4}.$$

**2.17**　随机变量 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度为

$$p_{XY}(x, y) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - 4y^2}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

分别求 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度, 并计算它们的协方差和相关系数.

**解** $X, Y$ 是联合高斯分布的, 根据 (2.6.28) 式得

$$\mu_X = 0, \quad \mu_Y = 0, \quad \frac{1}{\sigma_X^2(1-\rho_{XY}^2)} = 1, \quad \frac{1}{\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)} = 4, \quad \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} = \sqrt{3}.$$

上式后面三个方程的解为

$$\sigma_X = 2, \quad \sigma_Y = 1, \quad \rho_{XY} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

同样, 根据 (2.6.28) 式, $C = 1/(2\pi)$. 边缘概率密度为

$$p_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x^2}, \quad p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

协方差为

$$\kappa_{XY} = \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} = \sqrt{3}.$$

**另一种方法**(直接积分):

$$C = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}xy-4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{-1} = \frac{1}{2\pi}.$$

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}xy-4y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x^2}.$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}xy-4y^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

$$\kappa_{XY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}xy-4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}.$$

**2.18** 随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 的联合概率密度函数为

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = C(\Delta^2 - x_1^2 - kx_2^2)^{\delta-\frac{1}{2}}, \quad x_1^2 + kx_2^2 < \Delta^2, \quad \delta > -\frac{1}{2}.$$

求 $X_1$ 的边缘概率密度.

**解** 对于固定的 $x_1$, $x_2$ 的取值范围为 $-\sqrt{(\Delta^2 - x_1^2)/k} < x_2 < \sqrt{(\Delta^2 - x_1^2)/k}$, 则

$$p_{X_1}(x_1) = 2\int_0^{\sqrt{(\Delta^2-x_1^2)/k}} p_{X_1X_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$= 2C \int_0^{\sqrt{(\Delta^2 - x_1^2)/k}} (\Delta^2 - x_1^2 - kx_2^2)^{\delta - \frac{1}{2}} \mathrm{d}x_2$$

$$= 2C \int_0^{\sqrt{(\Delta^2 - x_1^2)/k}} (\Delta^2 - x_1^2)^{\delta - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{kx_2^2}{\Delta^2 - x_1^2}\right)^{\delta - \frac{1}{2}} \mathrm{d}x_2.$$

令 $z = x_2\sqrt{\dfrac{k}{\Delta^2 - x_1^2}}$, 把积分变量 $x_2$ 变换为 $z$, 得

$$p_{X_1}(x_1) = 2C(\Delta^2 - x_1^2)^{\delta - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\Delta^2 - x_1^2}{k}} \int_0^1 (1 - z^2)^{\delta - \frac{1}{2}} \mathrm{d}z = C_1(\Delta^2 - x_1^2)^{\delta}.$$

归一化常数 $C_1$ 可按下式计算

$$C_1 = \left[\int_{-\Delta}^{\Delta} (\Delta^2 - x_1^2)^{\delta} \mathrm{d}x_1\right]^{-1} = \left[\Delta^{2\delta+1} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \delta + 1\right)\right]^{-1}.$$

式中 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 是贝塔函数, 其定义为

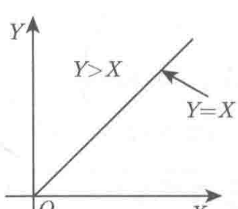
$$\mathrm{B}(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} \mathrm{d}t, \quad u, v > 0.$$

**2.19** 随机变量 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度函数为

$$p_{XY}(x, y) = C\mathrm{e}^{-(x+3y)}, \quad 0 \leqslant x < y < \infty.$$

试问 $X$ 与 $Y$ 是否独立.

**解** 如题图 2.19 所示,




题图 2.19

$$C = \left[\int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_0^{y} \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}x\right]^{-1} = 12.$$

$$p_X(x) = 12 \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}y = 4\mathrm{e}^{-4x}, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

$$p_Y(y) = 12 \int_0^{y} \mathrm{e}^{-(x+3y)} \mathrm{d}x = 12\mathrm{e}^{-3y}(1 - \mathrm{e}^{-y}), \quad 0 \leqslant y < \infty.$$

因为 $p_{XY}(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$, $X$, $Y$ 不相互独立.