YANJIUSHENGSNUXUESHITIJIEDA

研究生数学试题解答

上　册

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

武汉工学院电子工程系

前　言

这本“研究生数学试题解答”包含有基本概念，基本理论和基本运算技巧方面的大量题目；还有各种综合题，证明题及应用题，其内容分为工科高等数学，理科线性代数及高等代数，复变函数，常微分方程及偏微分方程，数学分析等五个方面，对准备报考理工科研究生的同志有一定的参考价值；对理工科在校学生，电视大学学生及广大的自学同志，本书可起到一定的辅导作用；对广大工程技术人员也能从本书中得到提高数学水平的益处。

本书由武汉工学院胡大志、王益姝同志供稿，钱伟鑫同志绘制全部图形，并邀请吉林大学李成章等同志审阅了全部初稿。

武汉工学院电子工程系领导及有关部门对本书的编写发行工作给予了大力支持与帮助。

由于我们水平不高，时间仓促，错误之处，请读者指正。

最后向提供试题的院校和单位致谢。

编　者

1981年11月

目　录

一、高等数学

1、山东大学

一、（20分）

1、 $y = arctge^x - ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，求$\frac{dy}{dx}$。

解：

$$y = arctge^x - \frac{1}{2}lne^{2x} + \frac{1}{2}ln(e^{2x}+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2x}}e^{2x}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+1}$$

$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - 1 + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^x - 1}{1+e^{2x}}.$$

2、求积分 $\int tg^4 x dx$。

解：

$$\int tg^4 x dx = \int tg^2 x(sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int tg^2 x\, dtgx - \int tg^2 x dx$$

$$= \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x + C.$$

3、积分$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x+1}dx + 2xydy$。这里曲线$\overset{\frown}{AB}$是 沿$y = x^2$由$A$（0，0）到$B$（1，1）的那一段。

解：

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x+1}dx + 2xydy = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx + 2x^3\cdot 2xdx$$

$$= \int_0^1 (x - 1 + \frac{1}{x+1} + 4x^4)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 - x + ln(x+1) + \frac{4}{5} x^5 \right] \Big|_0^1$$

$$= ln\,2 + \frac{3}{10}.$$

4、求$\frac{du}{dt}$，这里$u(t) = \int_{3t}^{t^3} f(x)dx$。

解：

$$\frac{du}{dt} = f(t^3)\cdot 3t^2 - f(3t)\cdot 3 = 3t^2 f(t^3) - 3f(3t).$$

二、（20分）

1、 $u(xy, \frac{y}{x})$，求du。

解： 设 $z = xy$, $t = \frac{y}{x}$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} y + \frac{\partial u}{\partial t}\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} x + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{1}{x},$$

$$du = \left(y\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx + \left(x\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial t} \right) dy.$$

2、 $u(xy, \frac{y}{x})$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

解： 由上题知有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$+ \left(-\frac{y}{x^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \cdot y + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{y^2}{x^4}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{2y}{x^3}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t}\right)+\frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{2y}{x^3}.$$

3、求积分$\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$，这里$D$是由$y=x^2$与$y^2=x$所围成的。

解：

$$\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2y\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(x^3-x^6)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{14}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{3}{56}.$$

4、求区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant x$，$x+y\leqslant z\leqslant e^{x+y}$的体积。

解：

$$V=\iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_{x+y}^{e^{x+y}}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x(e^{x+y}-x-y)\,dy$$

$$=\int_0^1\left(e^{2x}-e^x-\frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-e^x-\frac{1}{2}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2-e$$

$$=\frac{1}{2}e(e-1).$$

三、（10分）求球面$x^2+y^2+z^2=R^2$上，$R-h\leqslant z\leqslant R$，$0\leqslant h<R$的那一部分曲面的重心。

解：设曲面的面密度为 ρ，则重心坐标为（0，0，$\bar{z}$）

$$\bar{z}=\frac{\rho\iint\limits_{S} z\,dS}{\rho\iint\limits_{S} dS}$$

其中S为曲面

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad R-h\leqslant z\leqslant R,$$

S在xoy平面的投影区域为

$$D:\ x^2+y^2\leqslant 2Rh-h^2$$

$$\iint\limits_{S} z\,dS=\iint\limits_{D} R\,dx\,dy=R\cdot\pi(2Rh-h^2)=\pi R(2Rh-h^2)$$

$$\iint\limits_{S} dS=\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$$

$$=2\pi\cdot\left(-\frac{R}{2}\right)\cdot 2\sqrt{R^2-r^2}\,\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h^2}}$$

$$=2\pi Rh$$

则

$$\bar{z}=\frac{2R-h}{2}$$

所求部分的重心为$\left(0,\ 0,\ \dfrac{2R-h}{2}\right)$。

四、（10分）试在一半径为R的半园内作一面积为最大的矩形。

解：设半园为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，其内接矩形为$ABCD$，其中 $B(x,0)$，$C(x,\sqrt{R^2-x^2})$，此矩形面积为

$$S=2x\sqrt{R^2-x^2}$$

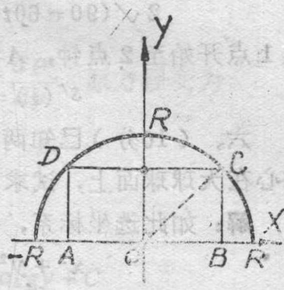

图 1

则

$$S'=2\sqrt{R^2-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{2(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

当 $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$时，$S'=0$。则面积最大的内接矩形为连结

$A\left(-\frac{R}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$B\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$C\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\ \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$，

$D\left(-\frac{R}{\sqrt{2}},\ \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$四点的矩形。

五、（10分）已知两辆汽车在相互垂直的大道上匀速行驶，设汽车A和汽车B的时速分别为40公里/小时和60公里/小时，已知汽车A在1点钟时经过P点向北驶去，汽车B在2点半时由西向东驶过P点，问在2点时汽车A与B间的直线距离对时间的变化率是多少？

解：在1点钟时A与B东西相距$60\times1.5=90$公里，经过t时刻A达A'处，B达B'处，这时A'与B'直线距离为

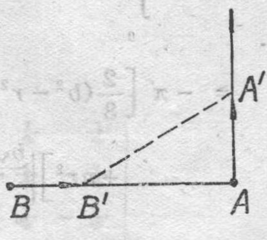

图 2

$$=\sqrt{(90-60t)^2+(40t)^2}$$

则

$$s'=\frac{2(90-60t)(-60)+2(40t)40}{2\sqrt{(90-60t)^2+(40t)^2}}$$

从1点开始至2点钟，A与B间直线距离对时间的变化率为

$$s'(1)=-4\text{公里/小时。}$$

六、（10分）已知两球半径分别为a和$b(a>b)$，且小球球心在大球球面上，试求小球在大球内那一部分的体积。

解：如此选坐标系，使小球为

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

大球为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

两球的交线在xoy平面的投影为

$$x^2+y^2=\left(\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}\right)^2$$

取柱坐标计算体积

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}}rdr\int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}}(\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{a^2-r^2}-a)rdr$$

$$=-\pi\left[\frac{2}{3}(b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+ar^2\right]\Bigg|_0^{\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}}$$

$$=\frac{2}{3}\pi(a^3+b^3)-\pi\left[\frac{(2a^2-b^2)^3+b^6}{12a^3}+\frac{4a^2b^2-b^4}{4a}\right]$$

七、（10分）求微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y-1}{y^2+1}(\frac{dy}{dx})^2$的通解。

解：令 $P=\frac{dy}{dx}$，则$\frac{d^2y}{dx^2}=P\frac{dP}{dy}$，原方程变为

$$\frac{dP}{dy}=\frac{2y-1}{y^2+1}P.$$

分离变量再积分得

$$\ln P=\ln(y^2+1)-\operatorname{arctg}y+C$$

由此得

$$(y^2+1)\frac{dx}{dy}=C_1e^{\operatorname{arctg}y}$$

解得

$$x=C_1e^{\operatorname{arctg}y}+C_2.$$

八、（10分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ 的逆A^{-1}。

解：注意，矩阵A的四个列（行）向量是两两正交的，于是有

$$A^2=4I,\qquad A\cdot\frac{1}{4}A=I$$

故得

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

2、山东工学院

一、计算下列各题（每题4分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

解：

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$

解： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=e$

3、$\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

解： 原式 $=\int\frac{e^x+1-1}{1+e^x}de^x=e^x-ln(1+e^x)+C$

4、$\int xf''(x)dx$

解： 原式 $=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C$

5、求方程 $x^2ydx=(1-y^2+x^2-x^2y^2)dy$ 的通解。

解： 将原方程变成

$$x^2ydx=(1+x^2)(1-y^2)dy$$

分离变量

$$\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{1-y^2}{y}dy$$

解得

$$-arctgx = lny - \frac{1}{2}y^2 + C$$

二、（10分）设$u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$，其中$\varphi$与$\psi$是任意两次可微函数，试证$u$满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi' + x\varphi'' + y\psi''$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi' + \psi + y\psi'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi'' + 2\psi' + y\psi''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi' + x\varphi'' + \psi' + y\psi''$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= 2\varphi' + x\varphi'' + y\psi'' - 2\varphi' - 2x\varphi'' - 2\psi' -$$

$$- 2y\psi'' + x\varphi'' + 2\psi' + y\psi''$$

$$= 0$$

三、（10分）敌人汽车从河北岸的A点以1里/分的速度向正北逃窜；同时我军摩托车从河南岸的B点向东追击，速度为4里/分（见图），问我军何时开始射击最好（相距最近时射击最好）？

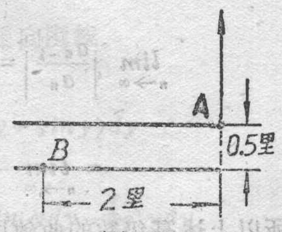

图3

解：设t时刻敌我直线距离为

$$s = \sqrt{(2-4t)^2 + (0.5+t)^2}$$

则

$$s' = \frac{2(2-4t)(-4)+2(0.5+t)}{2\sqrt{(2-4t^2)+(0.5+t)^2}}$$

$$= \frac{17t-7.5}{\sqrt{(2-4t)^2+(0.5+t)^2}}$$

当$t = \frac{7.5}{17} = \frac{15}{34}$时，$s' = 0$。这里$S$取最小值，则当$t = \frac{15}{34}$分时开始射击为最好。

四、（10分）展开$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$为$x$的幂级数，并推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$$

解：由e^x的展开可得

$$\frac{e^x-1}{x} = 1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\frac{x^n}{(n+1)!}+\cdots$$

于是 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2!}+\frac{2x}{3!}+\frac{3x^2}{4!}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}+\cdots$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{n!}}{\frac{n}{(n+1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n} = +\infty$$

所以上述幂级数的收敛区间为（$-\infty$，$+\infty$）。

而

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

取$x=1$，可得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}.$$

五、（10分）有一母线平行于z轴的三棱柱，它的底是平面xoy上以$A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(-1,0)$为顶点的三角形．试求此三棱柱介于平面xoy与旋转抛物面$z=x^2+y^2$之间的那部分体积．

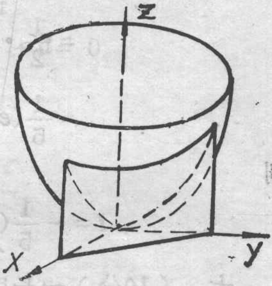

图 4

：AB的方程为

$$x+y=1$$

AC的方程为

$$y-x=1$$

所求体积为

$$V=\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y}dx\int_0^{x^2+y^2}dz=\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{2}{3}(1-y)^3+2y^2-2y^3\right]dy=\frac{1}{3}$$

六、（10分）利用格林公式计算积分

$$\oint_C e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)dy$$

其中c为域$0<x<\pi$，$0<y<siux$之正向围线．

解：将积分分成两部分

$$I=\oint_C e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)dy$$

$$=\oint_C e^x(1-\cos y)dx+e^x\sin y\,dy-\oint_C e^x y\,dy$$

对于第一个积分，因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x}(1-\cos y)\right]=e^{x}\sin y=\frac{\partial}{\partial x}(e^{x}\sin y)$$

所以其值为 0；对于第二个积分

$$\oint_{C} e^{x}y\,dy=\int_{\pi}^{0}e^{x}\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}e^{x}\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x}}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)\Big|_{\pi}^{0}$$

$$=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$$

则

$$I=-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1).$$

七、（10分）一长度为l的均匀链条放置在一水平而无摩擦力的桌面上，使得链条在桌边悬挂下来的长度为d，问链条全部滑离桌面需要多长时间？

解：设链条的线密度为 ρ，于t时刻垂下的长度为x，则

$$\rho l\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=\rho x g \qquad \text{即} \qquad \frac{d^{2}x}{dt^{2}}-\frac{g}{l}x=0$$

方程的通解为

$$x=C_{1}e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}+C_{2}e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}$$

由初始条件

$$x(0)=d \qquad x'(0)=0$$

可得

$$C_{1}+C_{2}=d, \qquad C_{1}-C_{2}=0$$