高等数学
习题全解指导

严永仙　李未材　朱婉珍　章迪平　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等数学

习题全解指导

严永仙　李未材　朱婉珍　章迪平　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》习题全解指导/ 严永仙等编. —杭州：浙江大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-308-16616-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①严… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 316037 号

《高等数学》习题全解指导

严永仙　李未材　朱婉珍　章迪平　编

责任编辑　徐　霞
责任校对　陈静毅　陈　宇
封面设计　续设计
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州林智广告有限公司
印　　刷　嘉兴华源印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　20.75
字　　数　558 千
版 印 次　2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-16616-4
定　　价　46.00 元

浙江大学出版社发行中心邮购电话：（0571）88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

前　　言

本书是与陶祥兴、朱婉珍主编的《高等数学》(高等教育出版社 2012 年版)相配套的学习辅导书。本书对教材具有相对的独立性,可为高等院校理工科(非数学类)本科学生以及准备报考硕士研究生的读者复习高等数学提供解题指导,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

本书习题体例新颖、分层设计、强化训练。以加强学生数学素养和应用能力为目标,习题分为 A、B、C 三类,A 为基本题,B 为提高题,C 为应用题,为读者提供理论与方法的强化训练、应用能力的综合训练、拓展阅读的研究性学习。

本书由浙江科技学院数学老师编写而成,主要参编人员为:严永仙、李未材、朱婉珍、章迪平、陶志雄、沈建伟、李蔚、郑肖锋、孙莉萍、周小燕、申国伦、武敏、施英、马鹏飞、楼琼、郑涛涛、李小梅、吴迪、施云、陈晓霞、姚腾腾。全书由严永仙(第 4、5、10 章)、李未材(第 2、3、9 章)、朱婉珍(第 1、6、8 章)、章迪平(第 7、11 章)最终统稿与校审。

书中存在的问题,敬请专家、教师和读者指正。

编　者

2017 年 8 月

Contents 目　录

第 1 章　函数、极限与连续

§ 习题 1.1　曲线的极坐标方程与参数方程

1. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程,并指出方程表示怎样的曲线.

(1) $\rho = 2\cos\theta$.　　　　(2) $\rho = 2a(2-\cos\theta)$,其中常数 $a \geqslant 0$.

(3) $\rho = \sqrt{2}\sin\theta$.　　　　(4) $\rho = 2a(1+\sin\theta)$,其中常数 $a \geqslant 0$.

解: (1) 设 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$,且 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho = 2\cos\theta$ 可化为

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{即}(x-1)^2+y^2=1.$$

故方程表示以(1,0)为圆心,1 为半径的圆周.

(2) 设 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$,且 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho = 2a(2-\cos\theta)$ 可化为

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\left(2-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad \text{即 } x^2+y^2 = 2a(2\sqrt{x^2+y^2}-x).$$

故方程表示心形线.

(3) 设 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$,且 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho = \sqrt{2}\sin\theta$ 可化为

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{即 } x^2+y^2-\sqrt{2}y=0.$$

故方程表示以 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为圆心,$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆周.

(4) 设 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$,且 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho = 2a(1+\sin\theta)$ 可化为

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad \text{即 } x^2+y^2 = 2a(\sqrt{x^2+y^2}+y).$$

故方程表示心形线.

2. 试引进合适的参数,将下列方程化为参数方程.

(1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$(星形线).　　　　(2) $(x-a)^2+y^2=a^2$.

(3) $x^2+(y-a)^2=a^2$.

解: (1) 方程变形为$(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=(a^{\frac{1}{3}})^2$,令 $x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos t, y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin t$,则参数方程为

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t,\ t \in [0,2\pi).$$

(2) 令 $x-a = a\cos t, y = a\sin t$,则参数方程为

$$x = a(1+\cos t), y = a\sin t,\ t \in [0,2\pi).$$

(3) 令 $x = a\cos t, y-a = a\sin t$,则参数方程为

$$x = a\cos t, y = a(1+\sin t),\ t \in [0,2\pi).$$

3. 将下列方程化为极坐标方程.

(1) $x^2+y^2=a^2$,其中常数 $a \geqslant 0$. (2) $y = kx$,其中 k 为常数.

解: (1) 设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho^2=a^2$. 因为 $\rho>0$,所以极坐标方程为 $\rho=a$.

(2) 设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho\sin\theta=k\rho\cos\theta$,故所求的极坐标方程为

$$\tan\theta = k, \quad \text{或 } \theta = \arctan k \text{ 及 } \theta = \pi + \arctan k.$$

§习题 1.2 函数

(A)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$. (2) $y=\sec\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(3) $y=\lg(x+3)$. (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$.

(5) $y=\arccos\dfrac{1-x}{3}$. (6) $y=\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$.

(7) $y=\sqrt{3-x}+\tan\dfrac{1}{x}$. (8) $y=\begin{cases} x^2, & -2<x\leqslant 0, \\ 2^x, & 0<x\leqslant 3. \end{cases}$

解: (1) 利用幂函数的定义得:$4-x^2\geqslant 0$,即 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 所以函数的定义域为 $[-2,2]$.

(2) 利用正割函数的定义得:$x+\dfrac{\pi}{4}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,即 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$. 所以函数的定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) 利用对数函数的定义得:$x+3>0$,即 $x>-3$. 所以函数的定义域为 $(-3,\infty)$.

(4) 利用幂函数的定义得:$a^2-x^2>0$,即 $-a<x<a$. 所以函数的定义域为 $(-a,a)$.

(5) 利用反余弦函数的定义得:$-1\leqslant\dfrac{1-x}{3}\leqslant 1$,所以函数的定义域为 $[-2,4]$.

(6) 利用函数的定义得:$x+2\geqslant 0$ 且 $1-x^2\neq 0$,即 $x\geqslant -2, x\neq\pm 1$. 所以函数的定义域为 $\{x \mid x\geqslant -2, x\neq\pm 1\}$.

(7) 利用函数的定义得:$3-x\geqslant 0$,且 $\dfrac{1}{x}\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}, x\neq 0$. 即 $x\leqslant 3$,且 $x\neq$

$\frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbf{Z}$. 所以函数的定义域为$\{x \mid x \leqslant 3, x \neq \frac{2}{(2k+1)\pi}, x \neq 0, k \in \mathbf{Z}\}$.

(8) 要使这个分段函数有意义，则定义域为$(-2,3]$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

(1) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$；　　(2) $f(x) = \csc^2 x - \cot^2 x, g(x) = 1$.

解：(1) 不同. 因为定义域不同：$f(x)$ 有意义要求 $x \neq 0$，$g(x)$ 有意义则要求 $x > 0$.

(2) 不同. 因为定义域不同：$f(x)$ 的定义域为 $\csc x$ 和 $\cot x$ 各自定义域的交集，是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集，而 $g(x)$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$.

3. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $y = x^4 - 2x^2$.　　(2) $y = x - x^2$.

(3) $y = x\sec x$.　　(4) $y = \sin x - \cos x$.

(5) $y = \frac{x\sin x}{2+\cos x}$.　　(6) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

(7) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.　　(8) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.

解：(1) 设 $f(x) = x^4 - 2x^2$，则 $f(-x) = f(x)$，且 $x \in \mathbf{R}$，故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 设 $f(x) = x - x^2$，则 $f(-x) = -x - x^2$，且 $x \in \mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(3) 设 $f(x) = x\sec x$，则 $f(-x) = -f(x)$，且 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(4) 设 $f(x) = \sin x - \cos x$，则 $f(-x) = -\sin x - \cos x$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(5) 设 $f(x) = \frac{x\sin x}{2+\cos x}$，则 $f(-x) = f(x)$，且 $x \in \mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(6) 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$，则 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = -\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\right)$ $= -f(x)$，且 $x \in \mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(7) 设 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$，则 $f(-x) = -f(x)$，且 $x \in \mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(8) 设 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$，则 $f(-x) = -f(x)$，且 $x \in \mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

4. 判断下列函数的单调性.

(1) $y = 5x - 8$.　　(2) $y = 3^{x-1}$.

(3) $y = 2x + \ln x$.　　(4) $y = 2 + \frac{8}{x}$.

解：(1) 在定义域 $\mathbf{R}$ 内任取 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，于是

$$f(x_1) - f(x_2) = 5x_1 - 8 - 5x_2 + 8 = 5(x_1 - x_2) < 0,$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$，说明在其定义域 $\mathbf{R}$ 上 $f(x)$ 是单调增函数.

(2) 在定义域 $\mathbf{R}$ 内任取 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，于是

$$f(x_1) - f(x_2) = 3^{x_1-1} - 3^{x_2-1} = 3^{x_1-1}(1 - 3^{x_2-x_1}) < 0,$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$，说明在其定义域 $\mathbf{R}$ 上 $f(x)$ 是单调增函数.

(3) 在定义域$(0, +\infty)$ 内任取 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，于是

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + \ln x_1 - 2x_2 - \ln x_2 = 2(x_1 - x_2) + \ln\frac{x_1}{x_2} < 0,$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，说明 $f(x)$ 在定义域上是单调增函数.

(4) 在 $(-\infty,0)$ 内任取 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=8\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}<0,$$

所以 $f(x_1)>f(x_2)$，说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减函数. 同理可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减函数.

5. 判断下列函数的有界性.

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.　　(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}\quad(x\neq 0)$.　　(3) $y=x\cos x$.

解: (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，易知在 $\mathbf{R}$ 内有 $|x|<1+x^2$，从而 $|f(x)|<1$，所以 $f(x)$ 有界.

(2) 函数的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$，易知在该定义域内有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 有界.

(3) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，易知在 $\mathbf{R}$ 内 x 为无界函数，$|\cos x|\leqslant 1$ 为有界函数且不恒为零，所以其乘积无界，即原函数 $y=x\cos x$ 无界.

6. 求下列周期函数的最小正周期.

(1) $y=\cos^2 x$.　　(2) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

(3) $y=\sqrt{|\tan x|}$.

解: (1) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，所以函数的最小正周期为 π.

(2) 因为 $\sin x,\sin 2x,\sin 3x$ 的最小正周期分别是 $2\pi,\pi,\dfrac{2\pi}{3}$，所以函数的最小正周期为 2π.

(3) 因为 $\tan x$ 的最小正周期为 π，所以函数的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

注：求三角函数的最小正周期的方法有：

(1) 定义法与图像法.

(2) 公式法：函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$ 和 $f(x)=A\cos(\omega x+\phi)\ (A\neq 0,\omega>0)$ 的最小正周期都为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$；函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\phi)$ 和 $f(x)=A\cot(\omega x+\phi)\ (A\neq 0,\omega>0)$ 的最小正周期都为 $\dfrac{\pi}{\omega}$.

(3) 最小公倍数法：求和函数的最小正周期，首先求出各个三角函数的最小正周期，然后再求其最小公倍数，即为和函数的最小正周期.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0)$.　　(2) $y=\tan e^x\quad\left(-\infty<x<\ln\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(3) $y=1+\ln(x+1)\quad(x>-1)$.　　(4) $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & x>4.\end{cases}$

解: (1) 原函数值域为 $[0,1]$，且由原函数得 $y^2=1-x^2$，则 $x=-\sqrt{1-y^2}$，所以反函数为

$$y=-\sqrt{1-x^2},x\in[0,1].$$

(2) 原函数值域为 $(0,+\infty)$，且由原函数得 $\arctan y=\mathrm{e}^x$，则 $x=\ln\arctan y$，所以反函数为

$$y=\ln\arctan x,x\in(0,+\infty).$$

(3) 原函数值域为 $(1,+\infty)$，且由原函数得 $y-1=\ln(x+1)$，则 $x=\mathrm{e}^{y-1}-1$，所以反函数为

$$y=\mathrm{e}^{x-1}-1,x\in(1,+\infty).$$

(4) 由 $y=x,x<1$ 得 $x=y$，由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4$ 得 $x=\sqrt{y}$，由 $y=2^x,x>4$ 得 $x=\log_2 y$，所以反函数为

$$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$$

8. 在下列各题中，将 y 表示为 x 的函数，并求对应于自变量值 x_1 和 x_2 的函数值 y.

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{4},x_2=\dfrac{\pi}{2}$.　　(2) $y=\mathrm{e}^u,u=x^2,x_1=1,x_2=2$.

(3) $y=u^2,u=\arcsin x,x_1=1,x_2=0$.

解：(1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{2},y_2=1$.

(2) $y=\mathrm{e}^{x^2},y_1=\mathrm{e},y_2=\mathrm{e}^4$.

(3) $y=\arcsin^2 x,y_1=\dfrac{\pi^2}{4},y_2=0$.

9. 指出下列函数可以由哪些函数复合而成.

(1) $y=\sqrt{3x-1}$.　　(2) $y=\arctan\sqrt[3]{1+x}$.

(3) $y=(1+\ln x)^5$.　　(4) $y=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x^2}}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$.　　(6) $y=\arcsin[\lg(2x+1)]$.

解：(1) $y=\sqrt{u},u=3x-1$，其中 $x\in\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

(2) $y=\arctan u,u=\sqrt[3]{v},v=1+x$，其中 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=u^5,u=1+\ln x$，其中 $x\in(0,+\infty)$.

(4) $y=\mathrm{e}^u,u=\mathrm{e}^v,v=-x^2$，其中 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(5) $y=\mathrm{e}^u,u=\tan v,v=\dfrac{x}{2}$，其中 $\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(6) $y=\arcsin u,u=\lg v,v=2x+1$，其中 $x\in\left[-\dfrac{9}{20},\dfrac{9}{2}\right]$.

10. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解：因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

11. 已知 $f(x)=x^3-x,\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$.

解：$f[\varphi(x)]=\sin^3 2x-\sin 2x$，　$\varphi[f(x)]=\sin 2(x^3-x)$.

12. 指出下列函数中哪些是初等函数，哪些不是初等函数.

(1) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}+x^2}{1+x+\sin\sqrt{x}}$.　　(2) $y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(3) $y=\sqrt{x}+\ln\left(2-\frac{1}{2}\cos x\right)$.　　　　(4) $y=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in \mathbf{R}/Q.\end{cases}$

解: (1) 是. 因为原函数符合初等函数的定义.

(2) 是. 因为原函数可化为 $y=\sqrt{x^2}$,符合初等函数的定义.

(3) 是. 因为原函数符合初等函数的定义.

(4) 不是. 因为原函数不能由一个解析式表示,不符合初等函数的定义.

13. 讨论当 $a=2$ 和 $a=-2$ 时,$y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数;如果是复合函数,求其定义域.

解: 当 $a=2$ 时,$y=\lg(a-\sin x)$ 是由 $y=\lg u, u=2-\sin x$ 复合而成的复合函数. 因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$,函数 $u=2-\sin x$ 的值域为 $D=[1,3]\subset U$,其中 $U=(0,+\infty)$ 为 $y=\lg u$ 的定义域. 所以原复合函数的定义域为实数集 $\mathbf{R}$.

当 $a=-2$ 时,$y=\lg(a-\sin x)$ 不是复合函数. 因为函数 $u=-2-\sin x$ 的值域为 $D=[-3,-1]$,而 $D\cap U=\varnothing$.

14. 作下列函数的图形.

(1) $y=3\cdot 2^x$.　　　　(2) $y=2^{-x}$.

(3) $y=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　　　(4) $y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ -2x+1, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

解: 根据函数的定义域, 取合适的五点,并用描点法作图(见图 1.1).

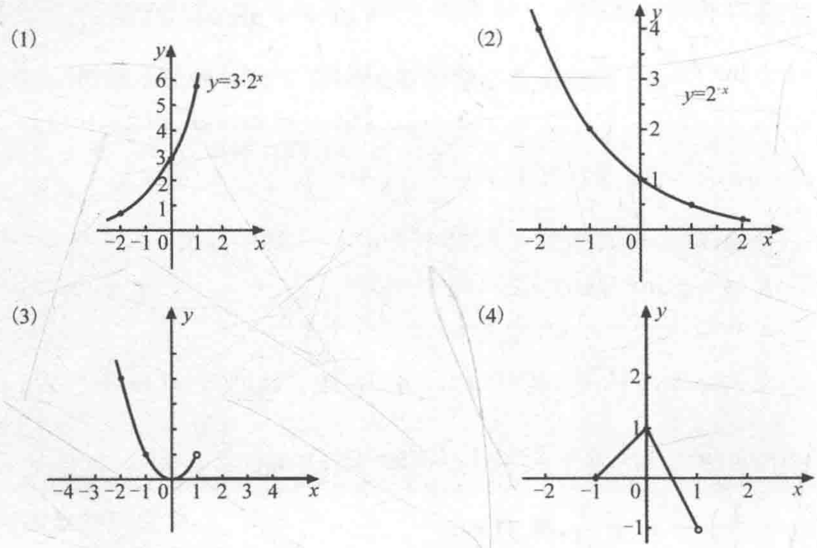

图 1.1

15. 先作出 $y=x$ 及 $y=\sin x$ 的图形,再由两个函数的图形叠加出 $y=\sin x+x$ 的图形.

解: 根据函数的定义域,取合适的五点,并用描点法作图(见图 1.2).

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x+x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}-1$	0	$\frac{\pi}{2}+1$	π	$\frac{3\pi}{2}-1$	2π

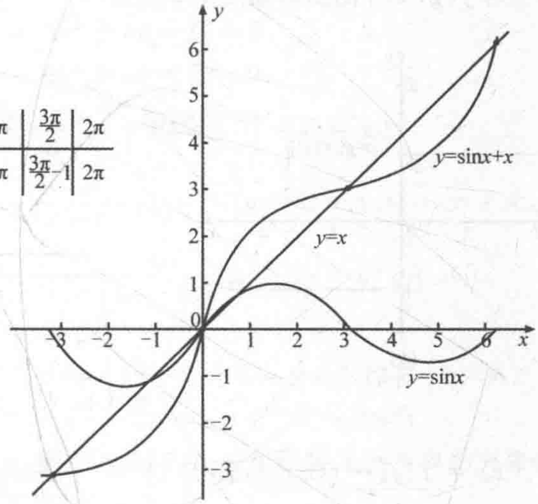

图 1.2

(B)

1. 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求下列各函数的定义域.

(1) $f(\cos x)$.　　　　(2) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

解:(1) 令 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$,解得函数的定义域为 $D=\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2) 令 $0\leqslant x+a\leqslant 1$,且 $0\leqslant x-a\leqslant 1$,得此不等式组的解集为

$$D=\{x\mid -a\leqslant x\leqslant 1-a,a\leqslant x\leqslant 1+a\}.$$

所以当 $1-a<a$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,函数的定义域为空集;

当 $1-a\geqslant a$ 时,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,函数的定义域为$[a,1-a]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -e^x, & x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\ln x$,求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式.

解:因为 $\varphi(x)=\begin{cases}\ln x\geqslant 0, & x\geqslant 1,\\ \ln x<0, & 0<x<1,\end{cases}$ 所以 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1,\\ -x, & 0<x<1.\end{cases}$

3. 设 $f(x)=e^x,g(x)=\begin{cases}-1, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|<1,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 和 $f[g(x)]$,并画出这两个函数的图形.

解:$g[f(x)]=\begin{cases}-1, & |e^x|>1\\ 0, & |e^x|=1,\\ 1, & |e^x|<1\end{cases}$ 即 $g[f(x)]=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x<0;\end{cases}$

$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{-1}, & |x|>1,\\ 1, & |x|=1,\\ e, & |x|<1.\end{cases}$$

$g[f(x)]$ 与 $f[g(x)]$ 的图形如图 1.3 所示.

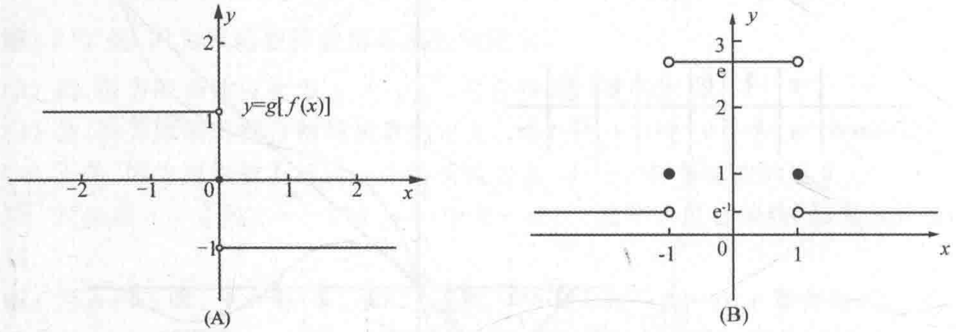

图 1.3

4. 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n个}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

解:$f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_2(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,$f_3(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+2\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$,

作归纳假设:$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$,$k=1,2,3,\cdots,n-1$,根据定义 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$,有

$$f_{k+1}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+k\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

所以总有

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解:由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 得 $|f(x)|\leqslant 1$,且 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$

所以

$$f[f(x)]=1.$$

6. 若 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义 $(l>0)$,并且 $f(x)$ 是奇函数. 证明:若 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加,则 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内也单调增加.

证:已知 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义,且 $f(x)=-f(-x)$.

若对任意的 $x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $-l<x_1<x_2<0$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则存在 $l>-x_1>-x_2>0$,有

$$-f(-x_1)=f(x_1)<f(x_2)=-f(-x_2),\quad 即\ f(-x_1)>f(-x_2).$$

故 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内也单调增加.

7. 若 $f(x)$ 是二次有理整式函数,且 $f(a)=f(b)=0\quad(a\neq b)$,$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=m$,求 $f(x)$.

解：二次多项式的一般形式为 $f(x)=Ax^2+Bx+C$，由 $f(a)=f(b)=0\quad(a\neq b)$ 可知

$$f(a)=Aa^2+Ba+C=0,$$
$$f(b)=Ab^2+Bb+C=0,$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\left(\frac{a+b}{2}\right)+C=m.$$

由以上三个线性方程可解得 $A=-\dfrac{4m}{(a-b)^2},B=-(a+b)\cdot A,C=ab\cdot A$.

从而，二次多项式的一般形式为 $f(x)=-\dfrac{4m}{(a-b)^2}[x^2-(a+b)x+ab]$.

8. 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解：$f(x+2)=2^{x^2+4x}-x=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$，令 $t=x+2$，即有 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$. 所以

$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4.$$

9. 若函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，证明：函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证：(必要性) 已知 $f(x)$ 在数集 X 上有界，即对任意 $x\in X$，存在正数 M，满足 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，可见 $f(x)$ 在数集 X 既有上界又有下界.

(充分性) 已知 $f(x)$ 在数集 X 上既有上界又有下界，即对任意 $x\in X$，存在正数 M 和 N，满足 $f(x)\leqslant M$，且 $-N\leqslant f(x)$. 取 $m=\max\{M,N\}$，于是 $|f(x)|\leqslant m$ 成立，即 $f(x)$ 在数集 X 上有界.

10. 设存在两个实数 $a,b(a<b)$，使对任意 x，$f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$ 及 $f(b-x)=f(b+x)$，证明：$f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的函数.

证：对任意 x，有 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$，于是

$$\begin{aligned}f[x+2(b-a)]&=f(x+b-a+b-a)=f[b+(x+b-a-a)]\\&=f[b-(x+b-a-a)]=f(-x+a+a)\\&=f[a+(a-x)]=f[a-(a-x)]=f(x).\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的周期为 $T=2(b-a)$.

§习题 1.3　简单函数模型

(A)

1. 已知自变量 t 和因变量 x 的值如表 1.1 所示，假设 x 和 t 之间的关系为线性函数关系，试写出 x 关于 t 的函数表达式.

表 1.1

t	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
x	27.8	29.2	30.6	32.0	33.4

解：设因变量 x 和自变量 t 的线性函数的关系为

$$x = at + b.$$

选取表中任意的 2 组数对 $(t,x)=(5.2,27.8)$，$(t,x)=(5.4.30.6)$，分别代入上式得 $a=14$，$b=-45$，即因变量 x 和自变量 t 的线性函数的关系为

$$x = 14t - 45.$$

再以表中的另 3 组数对代入，均满足此函数关系.

故 $x = 14t - 45$ 即为新求的函数表达式.

2. 设华氏温度(℉)与摄氏温度(℃)是线性关系，已知 212℉ 和 100℃ 均表示水的沸点温度，32℉ 和 0℃ 均表示水的冰点温度，则：

(1) 写出华氏温度与摄氏温度的函数关系，并画出函数图形.

(2) 30℃ 相当于华氏几度？

解：(1) 设华氏温度(F)与摄氏温度(t)是线性关系为

$$F = at + b.$$

将 $F=212$，$t=100$；$F=32$，$t=0$ 分别代入得：$a=1.8$，$b=32$，即华氏温度(F)与摄氏温度(t)是线性关系为 $$F = 1.8t + 32.$$

函数图形如图 1.4 所示.

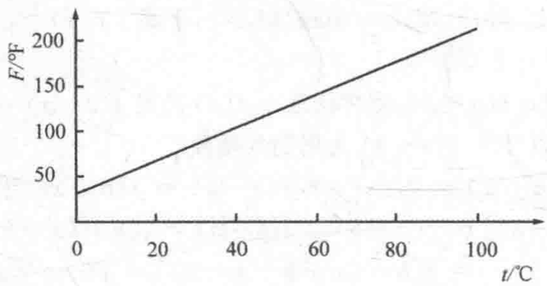

图 1.4

(2) 将 $t=30$ 代入华氏温度(℉)与摄氏温度(℃)的线性关系式得华氏温度 $F=86$.

3. 求表 1.2 和表 1.3 中的函数的可能表达式：

(1) **表 1.2**

t	0	1	2	3
x	4.30	6.02	8.43	11.80

(2) **表 1.3**

t	0	1	2	3
y	5.50	4.40	3.52	2.82

解：(1) 观察表 1.2 中的数据，设因变量 x 和自变量 t 的函数关系为

$$x = a(1+b)^t,$$

任选表中的两组数对 $(t,x)=(0,4.3)$，$(t,x)=(1,6.02)$，分别代入上述函数得：$a=4.3$，

