普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

应用概率统计
学习指导

（第二版）

马利霞　张硕　宋占杰　编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

应用概率统计学习指导

（第二版）

马利霞　张　硕　宋占杰　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《应用概率统计(高层次类)》(第三版)(科学出版社，宋占杰等)的配套辅导用书，内容包括概率论和数理统计两部分，共 9 章，分别为事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等.

本书可供高等院校理工科本科生学习应用概率统计课程或者概率论与数理统计课程的参考书，也可作为硕士研究生入学考试的复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计学习指导/马利霞，张硕，宋占杰编. —2 版. —北京：科学出版社, 2018. 1

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

ISBN 978-7-03-055456-7

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①马… ②张… ③宋… Ⅲ. ①概率统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 282956 号

责任编辑：王 静／责任校对：彭珍珍

责任印制：霍 兵／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

三河市书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2018 年 1 月第 二 版 印张: 11 3/4

2018 年 1 月第三次印刷 字数: 237 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

在客观世界, 随机现象远多于确定性现象, 因此加强随机数学的训练在提高大学生能力和素质方面占重要地位. 天津大学概率统计课程的系列教材多年来都是为这一目的设计和编写的, 历次修订, 都始终秉承这一主旨.

几十年来天津大学几代概率统计任课教师经验的积累和集体智慧的结晶是概率统计课程不断完善的重要源泉. 首先应该感谢马逢时教授, 马先生凝聚天津大学历年教学成果, 1988 年组织概率统计任课教师编写了本书的第一稿. 正式出版后立刻得到国内同行的认可并被多所兄弟院校选定为教材, 成为 20 世纪 80 年代末、90 年代初代表性概率统计教材之一. 随着本世纪初硕士、博士研究生的扩招, 为加强和充实工科大学概率统计课程, 由刘嘉焜教授和王家生副教授、张玉环副教授等教师在原版基础上进行大幅度修订, 重新编写适应天津大学高层次类的本科概率统计教材, 主要是针对求是学部、电信学院和自动化学院等对概率统计要求较高, 将来准备进一步深造的本科生. 该教材连续成为全国为数不多的“十五”和“十一五”国家级规划教材.

经过十余年总结完善, 在此基础上, 2017 年 1 月宋占杰、胡飞、孙晓晨、关静编写的《应用概率统计 (高层次类)》出版. 本书是与之配套的习题解析. 出版本书的目的是帮助读者解决“做题难”的困扰. 因为概率统计和高等数学思维方式有所区别, 历年来有许多学生反映: 高等数学课堂上听懂了, 课后习题就有思路做, 但概率统计课堂上听懂了, 课后习题常常感到无从下手. 这是由确定性数学和随机数学的思维方式决定的. 随机数学技巧性强, 并相对独立, 使学生学习产生了困惑, 很有必要给出一些难题的解析, 帮助学生自学.

本书由马利霞, 张硕编写, 宋占杰教授修改审定. 本书的出版, 得到了天津大学教务处和数学学院领导及相关工作人员的热忱帮助, 也得到了天津大学 2015 年度校级精品教材建设项目的支持, 兄弟院校的同行也十分关注本书的出版, 在此一并致以衷心的感谢.

由于编者水平有限，疏漏和不当之处恳请同行与读者指正.

联系邮箱：zhanjiesong@tju.edu.cn.

编　者

2017 年 5 月于天津

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　事件及其概率

1. 将下列事件用事件 A,B,C 表示出来.

(i) 3 个事件中至少有一个发生;

(ii) 3 个事件中只有 A 发生;

(iii) 3 个事件中恰好有 2 个发生;

(iv) 3 个事件中至少有 2 个发生;

(v) 3 个事件中至少有一个不发生;

(vi) 3 个事件中不多于 1 个发生.

解　(i) A,B,C 三个事件中至少有一个发生表示为 $A\cup B\cup C$;

(ii) 3 个事件中只有 A 发生, 即指 A 发生同时 B,C 都不发生, 故应为 $A\overline{B}\,\overline{C}$, 或可表示为 $A-B-C$;

(iii) 3 个事件中恰好有两个发生即指 $(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$;

(iv) 3 个事件中至少有 2 个发生可表示为 $(AB)\cup(BC)\cup(CA)$, 也可写成 $(ABC)\cup(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$;

(v) 3 个事件中至少有一个不发生可表示为 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$, 或利用对偶律写成 $\overline{ABC}$, 即 A,B,C 同时发生的对立事件就是至少有一个不发生;

(vi) 3 个事件中不多于 1 个发生表示 A,B,C 都不发生或 A,B,C 中恰有一个发生, 故可表示为 $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)$, 或可把 3 个事件中不多于 1 个发生看成 (iv) 中至少有 2 个发生的对立事件, 故也可写成 $\overline{(AB)\cup(BC)\cup(CA)}$.

2. 在掷骰子的试验中,A 表示“点数不大于 4”,B 表示“出偶数点”,C 表示“出奇数点”, 写出下列事件中的样本点: $A\cup B, AB, B-A, BC, \overline{B\cup C}, (A\cup B)C$.

解　由题意可知 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{2,4,6\}, C=\{1,3,5\}$. 所以

$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$;

$AB=\{2,4\}$;

$B-A=\{6\}$;

$BC=\varnothing$;

$\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}=\varnothing$;

$(A\cup B)C=\{1,2,3,4,6\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$.

3. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=P(CB)=0, P(AC)=\dfrac{1}{8}$, 求 A,B,C 中至少有一个出现的概率.

解 由条件知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(AB)=P(CB)=0$, $P(AC)=\dfrac{1}{8}$, 所以 $P(ABC)=0$. 代入一般加法公式可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

4. 袋中装有标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个相同的球, 从中任取 3 个球, 试求

(i) 3 个球中最小的标号为 5 的概率;

(ii) 3 个球中最大的标号为 5 的概率.

解 随机试验为从 10 个球中任取 3 个球, 故 Ω 中共有 C_{10}^3 个样本点.

(i) 事件 A:“3 个球中最小的标号为 5”, 表示标号为 5 的球必在此取的 3 个球中, 而另外 2 个球的标号都比 5 大,只能是从 6,7,8,9,10 的 5 个球中任取的 2 个, 故 A 中样本点个数为 C_5^2, 故所求概率为 $P(A)=\mathrm{C}_5^2/\mathrm{C}_{10}^3=\dfrac{1}{12}$;

(ii) 事件 B:“3 个球中最大的标号为 5”, 表示标号为 5 的球必在此取的 3 个球中, 而另外 2 个球的标号都比 5 小, 只能是从 1,2,3,4 的 4 个球中任取的 2 个, 故 B 中样本点个数为 C_4^2, 故

$$P(B)=\mathrm{C}_4^2/\mathrm{C}_{10}^3=\frac{1}{20}.$$

5. 在 1500 个产品中有 1200 个一级品,300 个二级品. 任意抽取 100 个, 求其中

(i) 恰有 20 个二级品的概率;

(ii) 至少有 2 个二级品的概率.

解 随机试验为从 1500 个产品中任意抽取 100 个, 故 Ω 中共有 C_{1500}^{100} 个样本点.

(i) 事件 A:“恰有 20 个二级品”相当于“从 300 个二级品中抽取 20 个”而“从 1200 个一级品中抽取 80 个”, 故 A 中共含有 $\mathrm{C}_{300}^{20}\cdot\mathrm{C}_{1200}^{80}$ 个样本点, 所以

$$P(A)=\mathrm{C}_{300}^{20}\mathrm{C}_{1200}^{80}/\mathrm{C}_{1500}^{100};$$

(ii) 设 A_k:“恰有 k 个二级品”, 由上面分析易知

$$P(A_k)=\mathrm{C}_{300}^{k}\mathrm{C}_{1200}^{100-k}/\mathrm{C}_{1500}^{100},$$

事件 B:“至少有 2 个二级品”可表示为 $B=\bigcup_{k=2}^{100}A_k$, 或 $B=\Omega-A_0-A_1$, 故

$$P(B)=P\left(\bigcup_{k=2}^{100}A_k\right)=\sum_{k=2}^{100}\mathrm{C}_{300}^{k}\mathrm{C}_{1200}^{100-k}/\mathrm{C}_{1500}^{100}$$

或

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\Omega-A_0-A_1)\\&=1-\mathrm{C}_{1200}^{100}/\mathrm{C}_{1500}^{100}-\mathrm{C}_{300}^{1}\mathrm{C}_{1200}^{99}/\mathrm{C}_{1500}^{100}.\end{aligned}$$

6. 一部五卷文集按任意次序放到书架上, 试求下列事件的概率:

(i) 第 1 卷和第 5 卷出现在两边;

(ii) 第 1 卷或第 5 卷出现在两边;

(iii) 第 1 卷及第 5 卷都不出现在旁边;

(iv) 自左向右或自右向左的卷号恰好是 $1,2,3,4,5$.

解　随机试验为将 5 卷文集按任意次序放到书架上, 故 Ω 共有 $5!$ 个样本点.

(i) 事件 A:“第 1 卷和第 5 卷出现在两边”表示第 1 卷在左端, 第 5 卷在右端, 或第 1 卷在右端而第 5 卷在左端. 这两种情况中第 2,3,4 卷在中间可任意排, 有 $3!$ 种放法, 故 A 中样本点个数为 $2\cdot 3!$, 于是

$$P(A)=2\cdot 3!\big/5!=\frac{1}{10}.$$

(ii) 设 A_1:“第 1 卷在两边”,A_5:“第 5 卷在两边”.为求 $P(A_1)$, 注意到第 1 卷在左端共有 $4!$ 个样本点, 第 1 卷在右端也有 $4!$ 个样本点, 故 $P(A_1)=2\cdot 4!\big/5!=\dfrac{2}{5}$, 显然 $P(A_5)=P(A_1)=\dfrac{2}{5}$. 而 $P(A_1A_5)=P(A)=\dfrac{1}{10}$. 于是所求的事件 B:“第 1 卷或第 5 卷在两边”, 可表示为 $B=A_1\cup A_5$. 故

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_5)=P(A_1)+P(A_5)-P(A_1A_5)\\&=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}.\end{aligned}$$

(iii) 事件 C:“第 1 卷及第 5 卷都不出现在旁边”, 可表示为 $C=\overline{A}_1\cap\overline{A}_5$, 所以

$$P(C)=P\left(\overline{A}_1\cap\overline{A}_5\right)=1-P(A_1\cup A_5)=\frac{3}{10}.$$

(iv) 事件 D:“自左向右或自右向左的卷号恰好是 1,2,3,4,5”, 只含 2 个样本点, 故

$$P(D)=\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}.$$

7. 某城市有 N 辆汽车, 车号为 1 到 N. 某人把遇到的 $n(n\leqslant N)$ 辆车的号码抄下 (可能重复抄到某车号), 试求下列事件的概率:

(i) 抄到的 n 个号码全不同;

(ii) 抄到的 n 个号码不含 1 和 N;

(iii) 抄到的最大车号不大于 $K(1 \leqslant K \leqslant N)$;

(iv) 抄到的最大车号恰好为 $K(1 \leqslant K \leqslant N)$.

解　随机试验为记下 n 辆车的车号, 由于每辆车车号都有 N 个可能, 故 Ω 中共有 N^n 个样本点.

(i) 事件 A:"抄到的 n 个号码全不相同", 故 A 中共有 P_N^n 个样本点, 于是

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_N^n}{N^n};$$

(ii) 事件 B:"抄到的 n 个号码不含 1 和 N", 即每次抄到的号码都有 $N-2$ 个可能, 故事件 B 中共含 $(N-2)^n$ 个样本点, 于是

$$P(B)=\frac{(N-2)^n}{N^n};$$

(iii) 事件 C:"抄到的最大车号不大于 $K(1 \leqslant K \leqslant N)$", 即每次抄到的车号有 K 个可能, 故事件 C 中共含 K^n 个样本点, 于是

$$P(C)=\frac{K^n}{N^n};$$

(iv) 事件 D:"抄到的最大车号恰好为 $K(1 \leqslant K \leqslant N)$" 相当于从"抄到的最大车号不大于 K"减去"抄到的车号不大于 $K-1$"所得到的事件, 故 D 中样本点个数为 $K^n-(K-1)^n$, 于是

$$P(D)=\frac{K^n-(K-1)^n}{N^n}.$$

8. 袋中有标号为 $1,2,\cdots,N$ 的卡片. 依次从袋中取一卡片 (取后放回), 取了 n 次, 记下的号码依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 试求下列事件的概率:

(i) $x_1>x_2>\cdots>x_n$;

(ii) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$.

解　由于取后放回故每次取都有 N 种可能, 故随机试验共有 N^n 个样本点.

(i) 事件 A:"记下的号码 $x_1>x_2>\cdots>x_n$" 表明全不相同, 但只能有一种次序, 这相当于从 N 个元素中取 n 个为一组的组合数, 故 A 中共含有 C_N^n 个样本点, 于是

$$P(A)=\mathrm{C}_N^n/N^n;$$

(ii) 事件 B:"记下号码为 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n$" 表明从 N 个元素中取出 n 个为一组但允许重复, 这是允许重复组合, 故 B 中共含有 C_{N+n-1}^n/N^n 个样本点, 于是

$$P(B)=\mathrm{C}_{N+n-1}^n/N^n.$$

9. 5 双不同的手套中任取 4 只, 试问其中至少有 2 只配成一双的概率多大?

随机试验为从 10 只手套中任取 4 只, 故 Ω 共有 C_{10}^4 个样本点.

解法 1　事件 A:"至少有 2 只配成一双" 表示 A_1:"恰有 2 只配成一双" 与 A_2:"恰有 4 只配成两双" 的和, 且 $A_1A_2=\varnothing$, 于是

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2).$$

由于 A_2 为 4 只恰为两双, 它可从 5 双中取出两双得到, 故共有 C_5^2 个样本点. 为计算 A_1 中样本点的个数, 先从 5 双中取 1 双, 共有 C_5^1 种取法, 另外 2 只只能从其余 8 只中取, 共有 C_8^2 种取法, 但要去掉这 2 只也成双的情况, 故 A_2 中共含样本点数为 $\mathrm{C}_5^1\left(\mathrm{C}_8^2-\mathrm{C}_4^1\right)$, 于是

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_5^1\left(\mathrm{C}_8^2-\mathrm{C}_4^1\right)}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

解法 2　先考虑 A 的对立事件 $\overline{A}$:"取出 4 只全不配对". 为计算 $\overline{A}$ 中样本点个数, 可以先从 5 双中任取 4 双, 共有 C_5^4 种取法, 再从取出的每双中各取 1 只, 由于在一双中取 1 只共有 C_2^1 种取法, 故共有 $\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1=2^4$ 种取法, 故 $\overline{A}$ 中共有样本点数为 $\mathrm{C}_5^4 2^4$ 个, 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\mathrm{C}_5^4 2^4}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

解法 3　把随机试验改为从编号为 1,2,$\cdots$,10 的 10 只手套中依次取出 4 只, 于是 Ω 共含有 $\mathrm{P}_{10}^4=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ 个样本点. 为求 $\overline{A}$ 中的样本点数, 注意到第 1 只可任意取, 共有 10 种取法, 第 2 只只能从剩下的 9 只并除去与第 1 只配对的那只而得的 8 只中任取 1 只, 故有 8 种取法, 同理第 3 只有 6 种取法, 第 4 只有 4 种取法, 所以 $\overline{A}$ 中共含 $10\cdot 8\cdot 6\cdot 4$ 个样本点, 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{13}{21}.$$

10. (i) 500 人中至少有 1 人的生日是元旦的概率多大? (一年按 365 天计算)

(ii) 5 个人中至少有两个人的生日在同一个月的概率多大?

解　(i) 随机试验为观察 500 人中每人的生日, 每人都有 365 种可能, 故 Ω 中共有 365^{500} 个样本点. 我们考虑事件 A:"500 人中至少有 1 人的生日是元旦" 的对立事件 $\overline{A}$: "500 人每人的生日都不是元旦". 为计算 $\overline{A}$ 中样本点个数, 注意到每个人的生日除去元旦都有 364 种可能, 故 $\overline{A}$ 中共含有 364^{500} 个样本点, 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{364^{500}}{365^{500}}.$$

还有一个解法: 事件 A_k:“500 人中恰有 k 个人生日是元旦”中样本点个数为 $\mathrm{C}_{500}^{k}(364)^{500-k}$, 故 $P(A_k)=\dfrac{\mathrm{C}_{500}^{k}364^{500-k}}{365^{500}}$, 于是

$$P(A)=P\left(\bigcup_{k=1}^{500}A_k\right)=\sum_{k=1}^{500}P(A_k)=\sum_{k=1}^{500}\mathrm{C}_{500}^{k}(\mathrm{C}_{365}^{1})^{k}(\mathrm{C}_{365}^{364})^{500-k},$$

由于 $\displaystyle\sum_{k=0}^{500}\mathrm{C}_{500}^{k}(\mathrm{C}_{365}^{1})^{k}(\mathrm{C}_{365}^{364})^{500-k}=\left(\frac{1}{365}+\frac{364}{365}\right)^{500}=1$, 故

$$P(A)=1-\mathrm{C}_{500}^{0}(\mathrm{C}_{365}^{1})^{0}(\mathrm{C}_{365}^{364})^{500-0}=1-(\mathrm{C}_{365}^{364})^{500}.$$

(ii) 随机试验为观察 5 个人每人的生日所在的月份, 每人生日都有 12 个可能, 故 Ω 中共有 12^5 个样本点. 考虑事件 A:“5 人中至少有两个人的生日在同一个月”的对立事件 $\overline{A}$: “5 人中每人生日都在不同月”. 事件 $\overline{A}$ 中共含有 $\mathrm{P}_{12}^{5}=12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8$ 个样本点, 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\mathrm{P}_{12}^{5}}{12^5}.$$

11. (续例 1.3.5) 试求传统型“10 选 6 + 1”彩票中, 得中四, 五, 六等奖的概率各是多少? 注意, 单注高级奖不能兼得低级奖.

以“$abcdef+g$”为中奖号码, 中奖等级如下:

四等奖 (选 7 中 4)　$abcd**,*bcde*,**cdef$;

五等奖 (选 7 中 3)　$abc***,*bcd**,**cde*,***def$;

六等奖 (选 7 中 2)　$ab****,*bc***,**cd**,***de*,****ef$,

其中“$*$”表示未选中的号码.

解　考虑中四等奖情况为 $abcd\overline{e}*,*\overline{b}cdef,\overline{a}bcde\overline{f}$, 其中 $\overline{e}$ 表示不能是 e, 于是得四等奖共有 $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^1$ 种可能, 而 Ω 中共有 10^6 个样本点, 故得四等奖的概率为

$$P_4=\frac{2\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^1}{10^6}=2.61\times10^{-4}.$$

中五等奖为 $abc\overline{d}**,**\overline{c}def,\overline{a}bcd\overline{e}f,a\overline{b}cde\overline{f}$, 所以中五等奖共有 $2\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_{10}^1+2\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1$ 种可能, 故

$$P_5=\frac{2\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_{10}^1+2\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1}{10^6}=3.42\times10^{-3}.$$

中六等奖为 $ab\overline{c}***,\overline{a}bc\overline{d}**,*\overline{b}cd\overline{e}*,**\overline{c}de\overline{f},***\overline{d}ef$, 有 5 种情形.

$ab\overline{c}***$有$\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_{10}^1$种可能. 但要去掉下面出现的重复计数的情况:$ab\overline{c}de\overline{f}$, $ab\overline{c}\overline{d}ef,ab\overline{c}def$, 它们分别有 $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^1,\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_9^1,\mathrm{C}_9^1$ 种可能;

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$\overline{a}bc\overline{d}**$ 有 $C_9^1C_9^1C_{10}^1C_{10}^1$ 种可能, 但要去掉 $\overline{a}\,b\,c\,\overline{d}\,e\,f$, 它有 $C_9^1C_9^1$ 种可能;
$*\overline{b}\,c\,d\,\overline{e}*$ 有 $C_{10}^1C_9^1C_9^1C_{10}^1$ 种可能;
$**\overline{c}\,d\,e\,\overline{f}$ 有 $C_{10}^1C_{10}^1C_9^1C_9^1$ 种可能;
$***\overline{d}\,e\,f$ 有 $C_{10}^1C_{10}^1C_{10}^1C_9^1$ 种可能, 但要去掉 $a\,b\,c\,\overline{d}\,e\,f$, 它有 C_9^1 种可能.
故中六等奖的概率为

$$\begin{aligned}P_6 =&\left[\,2C_{10}^1C_{10}^1C_{10}^1C_9^1+3C_9^1C_9^1C_{10}^1C_{10}^1-3C_9^1C_9^1-2C_9^1\right]/10^6\\ =&4.2039\times10^{-2}\,.\end{aligned}$$

注意本题的计算中要考虑“单注高级奖不能兼得低级奖”的规定, 特别是中六等奖的计算, 要去掉重复计数的情况.

12. 某彩票共发出编号为 0000 到 9999 的一万张, 其中有 5 张是一等奖, 一个人共买了 10 张, 试问他得一等奖 (即至少 1 个) 的概率多大?

解　随机试验为从 10000 张彩票中任选 10 张, 故 Ω 中共有 C_{10000}^{10} 个样本点, 考虑事件 A:“至少中 1 个一等奖”的对立事件 $\overline{A}$:“10 张全不是一等奖”. 由于一等奖只有 5 张,10 张全不是一等奖意味着这 10 张是从另外的 9995 张非一等奖的彩票中抽取的, 故 $\overline{A}$ 中共含有 C_{9995}^{10} 个样本点, 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{9995}^{10}}{C_{10000}^{10}}\,.$$

13. 盒中有 4 只次品晶体管, 6 只正品晶体管, 随机的逐个取出测试, 直到 4 只次品晶体管都找到为止. 试求第 4 只次品晶体管在 (i) 第 5 次测试发现;(ii) 第 10 次测试时发现的概率.

解　(i) 随机试验为把已经编号的 10 只晶体任取 5 只排成一列, 故 Ω 中共有 P_{10}^5 个样本点. 事件 A:“第 4 只次品晶体管在第 5 次测试中发现”, 意味着前 3 只次品晶体管在前 4 次测试中发现, 而第 5 次测试中是次品, 前 5 次测试依次为“次, 次, 次, 正, 次”由乘法原理共有 $C_4^1C_3^1C_2^1\cdot C_6^1C_1^1$ 种可能; 同样“次, 次, 正, 次, 次”“次, 正, 次, 次, 次”“正, 次, 次, 次, 次”也分别有 $C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1C_1^1$ 种可能. 于是事件 A 中共含有 $4C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1C_1^1$ 个样本点. 故

$$P(A)=\frac{4C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1C_1^1}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{2}{105}\,.$$

本题还可以利用条件概率和乘法定理求解. 记 A_i 为“第 i 次测试为次品”, $i=1,2,3,4,5$. 那么

$$A=(A_1A_2A_3\overline{A}_4A_5)\cup(A_1A_2\overline{A}_3A_4A_5)\cup(A_1\overline{A}_2A_3A_4A_5)\cup(\overline{A}_1A_2A_3A_4A_5),$$

由乘法定理,

$$\begin{aligned}
&P(A_1A_2A_3\overline{A}_4A_5)\\
&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)P(\overline{A}_4\mid A_1A_2A_3)P(A_5\mid A_1A_2A_3\overline{A_4})\\
&=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}\\
&=\frac{1}{210}.
\end{aligned}$$

同理,

$$P(A_1A_2\overline{A}_3A_4A_5)=P(A_1\overline{A}_2A_3A_4A_5)=P(\overline{A}_1A_2A_3A_4A_5)=\frac{1}{210},$$

所以

$$\begin{aligned}
P(A)&=P(A_1A_2A_3\overline{A}_4A_5)+P(A_1A_2\overline{A}_3A_4A_5)\\
&\quad+P(A_1\overline{A}_2A_3A_4A_5)+P(\overline{A}_1A_2A_3A_4A_5)\\
&=\frac{4}{210}=\frac{2}{105}.
\end{aligned}$$

(ii) 随机试验为把已经编号的 10 只晶体管全部取出排成一列, 故 Ω 中共有 P_{10}^{10} 个样本点. 事件 B: “第 4 只次品晶体管在第 10 次测试中发现”, 与 (i) 中完全类似, 为计算 B 中样本点的个数, B 表示在前 9 次中发现 3 只次品和 6 只正品, 这共有 C_9^3 种情况. 每一种情况都有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1$ 种可能. 所以 B 中样本点总数为 $\mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1$, 所以

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_9^3 6!\,4!}{10!}=\frac{2}{5}.$$

读者还可以与 (i) 同样用条件概率和乘法公式求解.

14. 从一副扑克牌 (共 52 张) 中一张一张的取牌, 求第 r 次取牌时首次取得 A 的概率和第二次取得 A 的概率.

解　随机试验为从 52 张牌中依次取出 r 张排成一列, 故 Ω 中共有 P_{52}^r 个样本点. 事件 A:“第 r 次取牌时首次取到 A”意味着前 $r-1$ 次取牌是从除去 4 个 A 的 48 张牌中取的, 而第 r 次取的 A 是从 4 个 A 中任取的一张, 故 A 中样本点个数为 $\mathrm{P}_{48}^r\cdot\mathrm{C}_4^1$, 于是

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{P}_{48}^{r-1}}{\mathrm{P}_{52}^r}.$$

事件 B:“第 r 次取牌时第二次取得 A”意味着前 $r-1$ 次取牌中有 $r-2$ 次是从除去 4 个 A 的 48 张牌中取的, 而在前 $r-1$ 次取牌中有一次是从 4 个 A 中取的, 第 r 次是从剩下的 3 个 A 中取的, 故 B 中样本点个数为 $\mathrm{P}_{48}^{r-2}\mathrm{C}_{r-1}^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1$, 于是

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_{48}^{r-2}\mathrm{C}_{r-1}^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{P}_{52}^r}.$$

15. 15 个新生平均分配到 3 个班, 这批新生中有 3 名一级运动员, 试求下列事件的概率:

(i) 每个班都有一名一级运动员;

(ii) 3 名一级运动员分到一个班.

解　随机试验为把 15 个新生平均分到 3 个班中去, 即一班 5 人, 二班 5 人, 3 班 5 人, 故 Ω 中共有 $\dfrac{15!}{5!\,5!\,5!}$ 个样本点.

(i) 事件 A:“每个班都有 1 名一级运动员”可以先把 3 名一级运动员每班 1 名分完, 共有 $\mathrm{P}_3^3=3!$ 种分法, 再将剩下的 12 名新生平均分到 3 个班中去, 共有 $\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!}$ 种分法, 于是

$$P(A)=\frac{3!\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!}}{\dfrac{15!}{5!\,5!\,5!}}=\frac{25}{91}.$$

(ii) 事件 B:“3 名一级运动员分到 1 个班”可以先选出 1 个班安排 3 名 1 级运动员, 共有 C_3^1 种方法. 再将剩下的 12 人按分得一级运动员的班去 2 人, 其余两个班各 5 人分配, 共有 $\dfrac{12!}{2!\,5!\,5!}$ 种方法, 故

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_3^1\dfrac{12!}{2!\,5!\,5!}}{\dfrac{15!}{5!\,5!\,5!}}=\frac{6}{91}.$$

16. 自动机加工橡皮垫圈. 制成的垫圈的厚度在设计尺寸的上下随机的波动, 大于设计尺寸的是厚垫圈, 不大于设计尺寸的是薄垫圈, 连续测量 20 个垫圈发现中间有一个厚垫圈的 12 连贯出现 (开始和最后一个都是薄垫圈), 试求这一事件的概率. 这一概率说明什么现象.

解　厚垫圈用 1 表示, 薄垫圈用 0 表示, 随机试验为写出由 0 或 1 组成的一个 20 个元的序列, 但 0 与 0 之间,1 与 1 之间都看作是没有区别的. 于是 Ω 共有 2^{20} 个样本点. 由于开始和最后一个都是 0. 记 $\triangle$ 为“$0\,\underbrace{1\cdots1}_{12个1}0$”. 那么事件 A:“中

间有一个 1 的 12 连贯”可以如下计算其样本点的个数.“$\triangle*****0$”中 * 表示可以是 0 或 1, 有 2^5 种可能,“$0*****\triangle$”也有 2^5 种可能. 如 $\triangle$ 不在两端出现, 两端必须是 0, $\triangle$ 在中间可有 5 种情况, 如“$0*\triangle***0$”可有 2^4 种可能, 故 $\triangle$ 不在两端出现共有 $5\cdot 2^4$ 种可能, 所以

$$P(A)=\frac{2\cdot 2^5+5\cdot 2^4}{2^{20}}=\frac{9}{2^{16}}\approx 0.000138\,.$$

由于 $P(A)$ 数值非常小, 即 20 次测量中出现厚线圈的 12 连贯是小概率事件. 如此小的概率的出现说明生产过程出现了异常, 必须检查生产过程出现的问题.

17. 信号发生器随机地连续发出信号“0”或“1”, 共发出 15 个信号, 试求信号中有 2 个“0 0”,3 个“0 1”,4 个“1 0”,5 个“1 1”的概率. 例如“0 0 1 1 1 0”中有 1 个“0 0”,1 个“0 1”, 一个“1 0”,2 个“1 1”.

解法 1 发出 15 个信号, 每个信号都是 0 或 1 有 2 种可能, 故 Ω 共有 2^{15} 个样本点. 考虑事件 A:“有 2 个‘0 0’,3 个‘0 1’, 4 个‘1 0’,5 个‘1 1’”是如何出现的. 有两种可能如下:

(a) $1\cdots 10\cdots 01\cdots 10\cdots 01\cdots 10\cdots 010$;

(b) $0\cdots 01\cdots 10\cdots 01\cdots 10\cdots 01\cdots$.

(b) 的情况不可能发生, 因为其中 3 个‘0 1’但只有 2 个‘1 0’. 故只能是情形 (a). 在 (a) 中第 1 个信号是 1, 最后 1 个信号为 0. 由条件 2 个‘0 0’,3 个‘0 1’, 4 个‘1 0’,5 个‘1 1’可知序列中 0 的计数为 $2\times 2+3+4=11$, 而 1 的计数为 $3+4+5\times 2=17$. 但第 1 个 1 和最后 1 个 0 都只计数 1 次, 而中间的 0,1 都计数 2 次, 故可知序列中共有 $\dfrac{11-1}{2}+1=6$ 个 0,$\dfrac{17-1}{2}+1=9$ 个 1.

9 个 1 之间有 8 个空位, 最后一个 0 前有一个空位, 空位分别用 $\triangle,\square$ 表示为

$$1\triangle 1\triangle 1\triangle 1\triangle 1\triangle 1\triangle 1\triangle 1\triangle 1\square 0\,,$$

现把剩下的 5 个 0 放入空位, 分 3 种情况:(1)0 前面的 $\square$ 不放, 此时 5 个 0 可分为 2,2,1 或 3,1,1 三组插入 8 个 $\triangle$ 中的 3 个. 共有 $2\cdot \mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_3^1$ 种可能;(2)$\square$ 中放 1 个 0, 此时剩下的 4 个 0 分 2,1,1 三组插入 8 个 $\triangle$ 中的 3 个, 共有 $\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_3^1$ 种可能; (3)$\square$ 中放 2 个 0, 此时剩下的 3 个 0 放入 8 个 $\triangle$ 中的 3 个, 共有 C_8^3 种可能. 由加法原理, 知事件 A 中共有

$$2\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_8^3=560$$

个样本点, 故

$$P(A)=\frac{560}{2^{15}}=\frac{35}{2048}\,.$$

解法 2 同解法 1 的分析, 知只有在 a) 中可能出现 A. 为计算 A 中样本点个数, 将 A 中的序列表示成

$$\underbrace{1\cdots1}_{n_1\text{个}}\ \underbrace{0\cdots0}_{m_1\text{个}}\ \underbrace{1\cdots1}_{n_2\text{个}}\ \underbrace{0\cdots0}_{m_2\text{个}}\ \underbrace{1\cdots1}_{n_3\text{个}}\ \underbrace{0\cdots0}_{m_3\text{个}}\ \underbrace{1\cdots1}_{n_4\text{个}}\ \underbrace{0\cdots0}_{m_4\text{个}}$$

其中 $n_i \geqslant 1$, $m_i \geqslant 1$, $i = 1,2,3,4$. 注意 n_i 个 1 有 $n_i - 1$ 个 '11' ,m_i 个 0 有 $m_i - 1$ 个 '00' ,$i = 1,2,3,4$. 由条件

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + (n_4 - 1) = 5 \quad (5\text{个 '11' })$$
$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + (m_3 - 1) + (m_4 - 1) = 2 \quad (2\text{个 '00' })$$

可知 5 个 '11' 的放法数为 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ 的非负整数解个数. 由可重复组合公式知为 $C_{4+5-1}^5 = C_8^5$; 而 2 个 '00' 的放法数为 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ 的非负整数解个数, 为 $C_{4+2-1}^2 = C_5^2$. 这时 3 个 '01' ,4 个 '10' 自然是满足的. 故事件 A 中样本点总数为 $C_8^5 C_5^2 = 560$, 所以 $P(A) = \dfrac{560}{2^{15}}$.

18. 10 个人中有一对夫妇, 他们随意的坐在一张圆桌周围, 试求这对夫妇正好坐在相邻位置的概率多大?

解 这是一个环形排列的问题. 随机试验为 10 个人围成一圈, 故 Ω 中共有 9! 个样本点. 事件 A:“一对夫妇坐在相邻位置”可以把夫妇二人视为一组, 与其他 8 人共 9 个元素做环形排列共有 8! 种可能, 夫妇二人交换位置有两种可能, 故 A 中共有 $2 \cdot 8!$ 个样本点, 故

$$P(A) = \frac{2 \cdot 8!}{9!} = \frac{2}{9}.$$

19. 8 个女生,25 个男生随意的围成一圈, 试求每两个女生之间至少有两个男生的概率.

随机试验为 33 个人围成一圈, 故 Ω 共有 32! 个样本点. 为求事件 A: “每两个女生之间至少有两个男生”中样本点的个数, 有下面几种方法.

解法 1 “男女男”为一组, 共有 8 组, 与剩下的 $25 - 2 \times 8 = 9$ 个男生可看成是 17 个元素. 这 17 个元素的任一圆排列是符合题意的. 先从 25 个男生中选出 9 个人有 C_{25}^9 种可能, 其次上述 17 个元素的圆排列为 16!, 最后, 分在 8 个组内的 16 个男生在 16 个位置上的排列数为 16!. 所以 A 中样本点的个数为 $C_{25}^9 16!\,16!$, 于是

$$P(A) = \frac{C_{25}^9 16!\,16!}{32!} = \frac{25!\,16!}{9!\,32!}.$$

解法 2 “女男男”为一组, 与剩下的 9 个男生可看成 17 个元素. 第 1 组固定, 还有 16 个位置选 7 个放“女男男”3 人组, 其余的放 9 个男生. 这样得到的排列

符合题意. 首先 16 个位置选 7 个位置有 C_{16}^7 种可能, 其次每一排列中 7 个女生全排列有 7! 种可能, 25 个男生全排列有 25! 种可能. 故 A 中样本点总数为 $C_{16}^7 7!\,25!$, 于是

$$P(A)=\frac{C_{16}^7 7!\,25!}{32!}=\frac{16!\,25!}{9!\,32!}.$$

解法 3 以 8 个女生为组长,25 个男生分入这 8 个组, 且记各组男生数为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$. 显然有

$$x_1+x_2+\cdots+x_8=25,$$

其中 $x_i\geqslant 2$, $i=1,2,\cdots,8$. 将此方程化为

$$(x_1-2)+(x_2-2)+\cdots+(x_8-2)=9,$$

记 $y_i=x_i-2$, $i=1,2,\cdots,8$, 即得到

$$y_1+y_2+\cdots+y_8=9,$$

其中 $y_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,8$. 这个方程非负整数解的个数为 C_{8+9-1}^9, 这就是 25 个男生分入 8 个组分法总数. 其次这 8 个组的圆排列数为 7!. 这 25 个男生的全排列数为 25!, 故 A 中样本点个数为 $C_{16}^7 7!\,25!$. 于是结果与解法 2 相同.

20. 袋中有标号 0 至 9 的 10 张卡片, 从袋中依次取出 4 张.

(i) 若每次取后不放回, 试问这 4 个数能构成一个 4 位偶数的概率是多少?

(ii) 若每次取后放回, 试问这 4 个数的和是 12 的概率多大?

解 (i) 随机试验为依次取出 4 张排成一列, 故 Ω 中共有 P_{10}^4 个样本点. 要求事件 A:"构成 4 位偶数"中样本点的个数, 可先从 0,2,4,6,8 中任取一个作为个位数, 再从余下的 9 个数中取 3 个作为前 3 位数. 这共有 $C_5^1P_9^3$ 种可能. 但要去掉 0 作千位数的情形, 即个位数从 2,4,6,8 中任取 1 个, 而 0 是千位数, 其余两位从剩下 8 个数中任选的情形, 这种情形共有 $C_4^1P_8^2$ 种可能, 故 A 中样本点总数为 $C_5^1P_9^3-C_4^1P_8^2$, 于是

$$P(A)=\frac{C_5^1P_9^3-C_4^1P_8^2}{P_{10}^4}.$$

(ii) 随机试验为任取 4 个数但取后放回, 故 Ω 共有 10^4 个样本点. 事件 B:"4 个数之和为 12"中样本点的个数与方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=12,$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com