Trudinger-Moser 嵌入的相关研究

袁安锋◎著

科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

Trudinger-Moser 嵌入的相关研究

袁安锋 著

科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

Trudinger-Moser嵌入的相关研究 / 袁安锋著. —北京：科学技术文献出版社，2017.7

ISBN 978-7-5189-3175-0

Ⅰ.①T⋯ Ⅱ.①袁⋯ Ⅲ.①偏微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 188587 号

Trudinger-Moser嵌入的相关研究

策划编辑：李　蕊　　责任编辑：赵　斌　　责任校对：张吲哚　　责任出版：张志平

出 版 者	科学技术文献出版社
地　　址	北京市复兴路15号　邮编 100038
编 务 部	（010）58882938，58882087（传真）
发 行 部	（010）58882868，58882874（传真）
邮 购 部	（010）58882873
官方网址	www.stdp.com.cn
发 行 者	科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印 刷 者	虎彩印艺股份有限公司
版　　次	2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
开　　本	710 × 1000　1/16
字　　数	75千
印　　张	6.5
书　　号	ISBN 978-7-5189-3175-0
定　　价	32.00元

内容简介

作为 Sobolev 嵌入定理的临界情形,Trudinger-Moser 嵌入在带有指数增长型非线性项的偏微分方程的解的存在性研究中起着重要的作用。本书介绍了 Trudinger-Moser 嵌入的一些最新研究进展,主要包含以下内容:加权的 Trudinger-Moser 嵌入问题,考虑最佳常数带有余项的奇异的 Trudinger-Moser 不等式;带 L^p 范数的 Trudinger-Moser 嵌入,考虑最佳常数带 L^p 范数的奇异的 Trudinger-Moser 不等式;利用 Blow-up 分析的方法研究一类带 L^p 范数的 Trudinger-Moser 嵌入的极值函数的存在性问题等。

本书可供从事泛函分析和偏微分方程及相关领域研究工作的科研人员参考,也可作为高等院校相关专业研究生和高年级本科生学习的参考资料。

前　言

Sobolev(索伯列夫)空间是由函数组成的赋范向量空间,主要用来研究偏微分方程理论。在研究偏微分方程中,人们往往需要运用泛函分析的相关知识,因此需要找到一个合适的空间。在 Sobolev 空间中,偏微分方程的解得到了某种意义下的"弱化",这使得人们可以在更大的空间中求偏微分方程的解及解的正则性等性质。对于一个函数空间,人们自然会问一个问题,也就是这个函数空间与其他函数空间的关系。Sobolev 嵌入定理恰好能够描述 Sobolev 空间与其他函数空间的嵌入关系。

作为 Sobolev 嵌入定理的临界情形,Trudinger-Moser 嵌入在带有指数增长型非线性项的偏微分方程的解的存在性研究中起着重要的作用。该嵌入问题的研究主要包括两个方面:①最佳常数能否达到;②极值函数是否存在。目前上述两个方面已经有了很多重要的工作。例如,Adimurthi Druet 研究了有界光滑区域上最佳常数带有余项的 Trudinger-Moser 嵌入,Adimurthi Sandeep 考虑了有界光滑区域上奇异的 Trudinger-Moser 嵌入,Ruf 研究了二维欧氏空间中任意区域上的 Trudinger-Moser 嵌入,Fontana 考虑了黎曼流形上的 Trudinger-Moser 嵌入,Carleson Chang 证明了中单位球上极值函数是存在的。在国内,杨云雁

教授等学者也在这方面做出了许多杰出的工作。受国内外同行的启发与鼓舞,我们在这方面也做了一些研究工作。

本书介绍近年来作者及其合作者关于 Trudinger-Moser 嵌入的一些研究成果,共分四章。第一章是引言,介绍了国内外在 Trudinger-Moser 嵌入问题上的一些研究进展;第二章给出加权的 Trudinger-Moser 嵌入的结果及其证明;第三章给出带 L^p 范数的 Trudinger-Moser 嵌入的结果及其证明;第四章给出了一类 Trudinger-Moser 嵌入的极值函数存在性问题的结果,利用 Blow-up 分析的方法研究了一类带 L^p 范数的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数的存在性问题。

本书在编写过程中,得到中国人民大学杨云雁教授的指导和帮助,本书的出版得到北京联合大学基础课教学部于深主任的大力支持,在此表示深切的谢意!

由于作者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,恳请各位专家和读者批评指正。

袁安锋

2017 年 6 月于北京联合大学

目　　录

第一章 引 言

本章分为 2 节。§1.1 主要介绍了 Trudinger-Moser 嵌入问题（Trudinger-Moser 不等式）的研究背景和进展，给出了经典的 Trudinger-Moser 嵌入结果（不等式）及改进的一些 Trudinger-Moser 嵌入结果，主要是沿着有界区域和无界区域两条主线来说明当前研究的进展。由于我们研究的内容只涉及欧氏空间中的有界区域，因此在叙述 Trudinger-Moser 嵌入的研究进展时，重点叙述有界区域上的结果。在本节最后简单提一下 Trudinger-Moser 嵌入结果在讨论方程解的存在性时的应用。§1.2 简单介绍了本书的组织结构。

§1.1 研究背景

本节结合当前研究的进展，主要介绍 Trudinger-Moser 嵌入问题（Trudinger-Moser 不等式）以及改进的 Trudinger-Moser 嵌入的内容，以及部分经典的证明方法。

1.1.1 Trudinger-Moser 嵌入

设 Ω 是 R^n 中的有界光滑区域，$W_0^{1,n}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 下的完备空间。

著名的 Sobolev 嵌入定理[1-2]是指

$$W_0^{1,p}(\Omega)\alpha\begin{cases}L^q(\Omega),1\leqslant q\leqslant p^*=\dfrac{np}{n-p},p<n,\\ C^\alpha(\bar{\Omega}),0<\alpha\leqslant 1-\dfrac{n}{p},p>n。\end{cases}\tag{1-1-1}$$

对于临界情形 $p=n$ 时，$W_0^{1,p}(\Omega)\alpha L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<+\infty$。但是对于$q=+\infty$，上述嵌入不成立，即 $W_0^{1,n}(\Omega)\alpha L^\infty(\Omega)$不成立。例如，$n=2$ 时，设 Ω 为中心在原点的单位球（本书将中心在原点的单位球简记为 B），考虑函数 $u(x)=\log(1-\log|x|)$，容易验证 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$，但是，$u\notin L^\infty(\Omega)$。

一个自然的问题是：能否找到最大增长函数 $g(t)$，使得对于 $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$，满足$\int_\Omega g(u)\mathrm{d}x<+\infty$。

V. Yudovich[3]、S. Pohozaev[4]、J. Peetre[5] 及 N. Trudinger[6] 证明了最大增长函数具有指数类型。也就是说，对于任何增长速度快于指数型的函数 $g(t)$来说，我们总可以找到函数列 $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$，使得上述积分为无穷。其结果如下。对于任意的 $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$，一定存在常数 $\gamma>0$，使得

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n=1}\int_\Omega e^{\gamma|u|^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}x<+\infty,\tag{1-1-2}$$

式中：$|\ |$表示标准的 L^n 范数。

针对式(1-1-2)，人们自然会提出下面的问题：

①最佳常数 γ 等于多少？

②上确界能否达到（即极值函数是否存在）？

对于第一个问题，J. Moser[7] 运用径向重排理论，找到了最佳常数。设 ω_{n-1}是 R^n 中单位球面的面积，对于常数 $\alpha_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$，有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n=1}\int_\Omega e^{\gamma|u|^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}x\begin{cases}<+\infty,\gamma\leqslant\alpha_n,\\ =+\infty,\gamma>\alpha_n。\end{cases}\tag{1-1-3}$$

不等式(1-1-3)被称为 Trudinger-Moser 不等式。这里我们先简单回顾一下 J. Moser 证明式(1-1-3)所使用的对称化(Symmetrization)的

方法。记 B_R 为中心在原点、半径为 R 的球，对任意的 $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$，其与一个径向对称函数 $u^*\in W_0^{1,n}(B_R)$ 对应，使得

$$|\{x\in\mathbb{R}^n: u^*(x)<d\}|=|\{x\in\Omega: u(x)<d\}|,$$

式中：$|\ |$ 表示集合的 Lebesgue 测度。于是，u^* 就是一个定义在 B_R 上的正的单减函数，且 $|B_R|=|\Omega|$。由函数的构造，函数 $u(x)$ 重排后满足[8-9]：

①对任意的 $f\in C(\mathbb{R})$，有

$$\int_{B_R} f(u^*)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f(u)\,\mathrm{d}x; \tag{1-1-4}$$

②对任意的 $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$，有

$$\int_{B_R}|\nabla u^*|^n\,\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^n\,\mathrm{d}x。 \tag{1-1-5}$$

根据式(1-1-4)和式(1-1-5)，我们有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\ \|\nabla u\|_n=1}\int_\Omega \mathrm{e}^{\gamma|u|^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}x\leqslant\sup_{u\in W_0^{1,n}(B_R),\ \|\nabla u^*\|_n=1}\int_{B_R}\mathrm{e}^{\gamma|u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}x。$$

所以，为证明 $\gamma\leqslant\alpha_n$ 的情形，只要考虑径向对称情形就可以了。接下来，做变量替换：

$$r=|x|=R\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}},\ \omega(t)=n^{\frac{n-1}{n}}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}u^*(r),$$

则

$$\int_{B_R}|\nabla u^*|^n\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty|\omega'(t)|^n\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{B_R}\mathrm{e}^{\gamma|u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}x=|B_R|\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\alpha_n}|\omega(t)|^{\frac{n}{n-1}}-t}\mathrm{d}t。$$

这样，Moser 考虑了

$$\sup_{\int_0^\infty|\omega'(t)|^n\mathrm{d}t\leqslant 1}|B_R|\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\alpha_n}|\omega(t)|^{\frac{n}{n-1}}-t}\mathrm{d}t。$$

当 $\gamma<\alpha_n$ 时，由假设 $\omega\in C^1$，有

$$\omega(t)=\int_0^t\omega'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant t^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_0^t|\omega'(t)|^n\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant t^{\frac{n-1}{n}}。$$

当 $\gamma > \alpha_n$ 时，Moser 构造了一列测试函数

$$\omega_k(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{k^{\frac{1}{n}}}, 0 \leqslant t \leqslant k, \\ k^{\frac{n-1}{n}}, t > k。\end{cases}$$

计算可得

$$\int_0^\infty |\omega_k'(t)|^n \mathrm{d}t = 1,$$

且

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\alpha_n}|\omega_k(t)|^{\frac{n}{n-1}} - t} \mathrm{d}t \geqslant \int_k^\infty \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\alpha_n}k - t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\left(\frac{\gamma}{\alpha_n} - 1\right)k} \to \infty。$$

当 $\gamma = \alpha_n$ 时，详细证明参考 J. Moser[7]。

对于第二个问题，L. Carleson 和 A. Chang[10] 在单位球 B 上获得了 $(n \geqslant 2)$ 时的结果：当 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 是中心在原点的单位球 B 时，

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|\nabla u\|_n = 1} \int_\Omega \mathrm{e}^{\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}} \mathrm{d}x, \qquad (1-1-6)$$

可以达到，也就是极值函数存在。其证明用到了对称化方法和反证法，思路如下。$(n=2)$：由对称化思想，L. Carleson 和 A. Chang 只考虑了径向对称函数，假设上确界不能达到，他们证得任意极大化序列一定收敛到原点，对于任意极大化序列有

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathrm{B}} \mathrm{e}^{4\pi u_k^2} \mathrm{d}x = (1 + e)|\mathrm{B}|,$$

然后构造了一列函数，使得上述积分比 $(1+\mathrm{e})|\mathrm{B}|$ 要大，从而得到矛盾。此后，L. Carleson 和 A. Chang 的结果得到了进一步的研究和推广：M. Struwe[11] 证得在测度意义下如果 Ω 与单位球 B 很接近时，式(1-1-3)的极值函数仍然存在；M. Flucher[12] 将区域推广到了 Ω 为 R^2 中的任意有界区域；K. Lin[13] 将区域推广到了 R^n 中的任意有界区域；P. Cherrier[14]、L. Fontana[15]、Y. Li[16-18] 等还在流形上进行了研究。

Trudinger-Moser 嵌入（Trudinger-Mose 不等式）在带有指数增长型非

线性项的偏微分方程的解的存在性研究时具有重要的作用，如下面的二阶偏微分方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u e^{u^2}, \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = 0, \text{在} \partial\Omega \text{ 上}, \\ \lambda = \left(\int_\Omega u^2 e^{u^2} dx \right)^{-1}。 \end{cases} \tag{1-1-7}$$

由式(1-1-3)上确界可以达到，就可证明上面方程存在正解。

1.1.2 改进的 Trudinger-Moser 嵌入

关于 Trudinger-Moser 嵌入，还有很多比较经典的研究和改进。我们把这些改进的 Trudinger-Moser 不等式也归为 Trudinger-Moser 不等式。

P. Lions[19] 对式(1-1-3)做了进一步的推广。设 Ω 是 R^n 中的有界光滑区域，$u_\varepsilon \in W_0^{1,n}(\Omega)$，$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$（在 $W_0^{1,n}(\Omega)$ 中 u_ε 弱收敛于 u_0），$\|\nabla u_\varepsilon\|_n = 1$。对任意的 $q < \frac{1}{(1-\|\nabla u_0\|_n^n)^{\frac{1}{n-1}}}$，下式成立：

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega e^{\alpha_n q |u_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}} dx < +\infty。 \tag{1-1-8}$$

显然，当 $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$（弱收敛）且 $u_0 \neq 0$ 时，由式(1-1-8)可以得到式(1-1-3)；但是当 $u_0 = 0$ 时，式(1-1-8)要弱于式(1-1-3)。

对于 $u_0 = 0$ 的情形，在 P. Lions[19] 和 J. Moser[7] 的基础上，Adimurthi 和 O. Druet[20] 研究了最佳常数带有余项的 Trudinger-Moser 嵌入，给出了下面结果。设 Ω 是 R^2 中的有界光滑区域，$\lambda_1(\Omega)$ 是拉普拉斯（Laplace）算子在狄利克雷（Dirichlet）边值条件下的第一特征值，对于任意的 α，当 $0 \leqslant \alpha < \lambda_1(\Omega)$ 时，

$$\sup_{u \in W_0^{1,2}(\Omega), \|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega e^{4\pi u^2 (1 + \alpha \|u\|_2^2)} dx < +\infty; \tag{1-1-9}$$

而当 $\alpha > \lambda_1(\Omega)$ 时，式(1-1-9)中的上确界等于无穷。Y. Yang[21] 考虑了 $n \geqslant 3$ 的情形。设 Ω 是 R^n 中的有界光滑区域，对任意的 α，当 $0 \leqslant \alpha <$

$\lambda_1(\Omega)=\inf\limits_{\|u\|_n=1}\|\nabla u\|_n^n$ 时,

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\ \|\nabla u\|_n\leqslant 1}\int_\Omega e^{\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}(1+\alpha\|u\|_n^n)^{\frac{1}{n-1}}}\mathrm{d}x<+\infty;\quad (1-1-10)$$

且当 $\alpha>\lambda_1(\Omega)$ 时,式(1-1-10)中的上确界等于无穷。同时,当 $0\leqslant\alpha<\lambda_1(\Omega)$ 时,式(1-1-10)中的上确界可以达到。显然结果式(1-1-9)和式(1-1-10)要比式(1-1-8)和式(1-1-3)强。此后,Y. Yang[21]将该结果推广到了黎曼流形上的情形,de Souza 和 do O[22-23]将该结果推广到了任意的 $\mathbb{R}^n$ 上。

G. Lu 和 Y. Yang[24]把式(1-1-9)中的 L^2 范数换为任意的 L^p 范数($p>1$),证明其结论也是成立的。即设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑区域,$p>1$,令

$$\lambda_p(\Omega)=\inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),u\neq 0}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right)^{2/p}},\quad (1-1-11)$$

当 $0\leqslant\alpha<\lambda_p(\Omega)$,下式成立:

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),\ \|\nabla u\|_2\leqslant 1}\int_\Omega e^{4\pi u^2(1+\alpha\|u\|_p^2)}\mathrm{d}x<+\infty;\quad (1-1-12)$$

当 $\alpha\geqslant\lambda_p(\Omega)$ 时,式(1-1-12)中的上确界等于无穷。当 α 足够小时,式(1-1-12)中的极值函数也是存在的。J. Zhu[25]将式(1-1-11)推广到任意 n 维欧氏空间中的有界区域上。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域,$p>1$,令

$$\bar{\lambda}(\Omega)=\inf_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),u\neq 0}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^n\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right)^{n/p}},$$

当 $0\leqslant\alpha<\bar{\lambda}(\Omega)$,有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\ \|\nabla u\|_n\leqslant 1}\int_\Omega e^{\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}(1+\alpha\|u\|_p^n)^{\frac{1}{n-1}}}\mathrm{d}x<+\infty;\quad (1-1-13)$$

当 $\alpha\geqslant\bar{\lambda}(\Omega)$ 时,式(1-1-13)中的上确界等于无穷。当 $0\leqslant\alpha<\bar{\lambda}(\Omega)$

时,式(1-1-13)中的极值函数也是存在的。

G. Wang 和 D. Ye[26] 还考虑了下面情形:设 $B\subset R^2$ 是中心在原点的单位球,则下式成立:

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(B),\int_B\left(|\nabla u|^2-\frac{u^2}{(1-|x|^2)^2}\right)dx\leqslant 1}\int_B e^{4\pi u^2}dx<+\infty。\quad(1-1-14)$$

C. Tintarev[27] 证明了:设 Ω 是 R^2 中的有界光滑区域,对某一函数类 $V(x)$,有

$$\sup_{u\in C_0^\infty(\Omega),\int_\Omega(|\nabla u|^2-V(x)u^2)dx\leqslant 1}\int_\Omega e^{4\pi u^2}dx<+\infty。\quad(1-1-15)$$

显然,当 $V(x)=\dfrac{1}{(1-|x|^2)^2}$ 时,式(1-1-15)就是式(1-1-14);式(1-1-14)极值函数的存在性已由 Y. Yang 和 X. Zhu[28] 用 Blow-up 的方法证得。当 $V(x)=\alpha$ 时,式(1-1-15)就是 Y. Yang[29] 定理 1 用 Blow-up 方法证明了的结果,极值函数的存在性也由 Y. Yang[29] 同时证得。Y. Yang[29] 的结果如下。设 Ω 是 R^2 中的有界光滑区域,$\lambda_1(\Omega)$ 是 Laplace 算子在 Dirichlet 边值条件下的第一特征值。若 $0\leqslant\alpha<\lambda_1(\Omega)$,则

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),\int_\Omega(|\nabla u|^2-\alpha u^2)dx\leqslant 1}\int_\Omega e^{4\pi u^2}dx,\quad(1-1-16)$$

可以被某些函数 u_0 所达到,其中,$u_0\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$,且

$$\int_\Omega|\nabla u_0|^2dx-\alpha\int_\Omega u_0^2dx=1。$$

可以证明,当 $0\leqslant\alpha<\lambda_1(\Omega)$ 时,式(1-1-16)的结果强于式(1-1-9)的结果。

下面我们再介绍一种有代表性的结果。Adimurthi 和 K. Sandeep[30] 研究了奇异的 Trudinger-Moser 嵌入,其结果如下。设 Ω 是 R^n 中的有界光滑区域,$0\leqslant\beta<n$,$\alpha_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$($\omega_{n-1}$ 表示 R^n 中单位球面的面积),γ 满足 $\dfrac{\gamma}{\alpha_n}+\dfrac{\beta}{n}=1$,则

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega),\ \|\nabla u\|_n \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{\gamma |u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^\beta} dx < +\infty; \tag{1-1-17}$$

若 $\gamma \geqslant \alpha_n\left(1-\dfrac{\beta}{n}\right)$,式(1-1-17)中的上确界等于无穷。显然,当 $\beta=0$ 时,式(1-1-17)就是式(1-1-3)。$n=2$ 时,式(1-1-17)极值函数的存在性由 G. Csato 和 P. Roy[31]、S. Iula 和 G. Mancini[32]、Y. Yang 和 X. Zhu[33] 证得。

此外,R. Adams[34] 推导了有界区域上带有高阶导数的 Trudinger-Moser 不等式,其考虑空间 $W_0^{k,\frac{n}{k}}(\Omega)$,$\dfrac{n}{k}>1$,定义了空间 $W_0^{k,\frac{n}{k}}(\Omega)$ 的等价范数:

$$\|\nabla^k u\|_{L^{\frac{n}{k}}} = \|\Delta^{\frac{k}{2}} u\|_{L^{\frac{n}{k}}},k \text{ 为偶数时;}$$

$$\|\nabla^k u\|_{L^{\frac{n}{k}}} = \|\nabla\Delta^{\frac{k-1}{2}} u\|_{L^{\frac{n}{k}}},k \text{ 为奇数时。}$$

证得了相应的结果。

Trudinger-Moser 不等式(1-1-3)只对于 R^n 中的有界区域成立,而对于无界区域并不成立。对于无界区域上的研究,由 D. Cao[35]($n=2$),J. do O[36]($n>2$)及 S. Adachi 和 K. Tanaka[37] 研究,他们均考虑了在 $\gamma<\alpha_n$ 时的次增长情形,对应的范数是 Dirichlet 范数 $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$。此后,B. Ruf[38] 用标准的 Sobolev 范数 $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2+u^2) dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 来代替式(1-1-3)中的 Dirichlet 范数 $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$,考虑了 R^2 中的任意区域,获得了下面重要的结果。设 Ω 为 R^2 中的任意区域,令

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2+u^2) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

则存在常数 C(与区域 Ω 无关),满足

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),\ \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leqslant 1}\int_\Omega (e^{4\pi u^2}-1)\,dx < C。\qquad (1-1-18)$$

而且对于 $e^{\alpha u^2}$,4π 为最佳常数,式(1-1-18)中的上确界可以达到。其证明思路是:考虑 $\Omega = R^2$,由径向重排理论,B. Ruf 考虑函数 u 是径向非增函数。考虑将积分分为两部分

$$\int_{R^2}(e^{4\pi u^2}-1)\,dx = \int_{|x|<r_0}(e^{4\pi u^2}-1)\,dx + \int_{|x|\geqslant r_0}(e^{4\pi u^2}-1)\,dx,$$

对于第二个积分,将其写为级数形式:

$$\int_{|x|\geqslant r_0}(e^{4\pi u^2}-1)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant r_0}\frac{(4\pi)^k\ |u|^{2k}}{k!}\,dx,$$

证明对于足够大的 r_0,有

$$\int_{|x|\geqslant r_0}(e^{4\pi u^2}-1)\,dx \leqslant c(r_0)。$$

对于第一个积分,利用 Trudinger-Moser 不等式(1-1-3)给出了有界证明。此后,Y. Li 和 B. Ruf[39] 将式(1-1-18)推广到 $R^n(n>2)$ 中的任意区域。设 Ω 为 $R^n(n>2)$ 中的任意区域,令

$$\|u\|_{W^{1,n}(\Omega)} = \left(\int_\Omega(|\nabla u|^n + |u|^n)\,dx\right)^{\frac{1}{n}},$$

则存在与区域 Ω 无关的常数 C,满足

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\ \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}\leqslant 1}\int_\Omega (e^{\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}}-1)\,dx < C。\qquad (1-1-19)$$

而且当 $\Omega = R^n$ 时,式(1-1-19)存在极值函数。证明式(1-1-19)极值函数的存在性时,Y. Li 和 B. Ruf 用了 Blow-up 分析的方法。

Adimurthi 和 Y. Yang[40] 在 R^n 上研究了任意区域上奇异的 Trudinger-Moser 嵌入,即对任意的 $\tau>0$,定义 $\|u\|_{1,\tau} = \left(\int_{R^n}(|\nabla u|^n + \tau\ |u|^n)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$,则有

$$\sup_{\|u\|_{1,\tau}\leqslant 1}\int_{R^n}\frac{1}{|x|^\beta}\left(e^{\gamma |u|^{\frac{n}{n-1}}} - \sum_{m=0}^{n-2}\frac{\gamma^m\ |u|^{\frac{mn}{n-1}}}{m!}\right)dx < +\infty,$$