



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

PELL EQUATION—TALKING FROM INTEGER

Pell方程 ——从整数谈起

冯克勤 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

PELL EQUATION — TALKING FROM INTEGER

Pell 方程 ——从整数谈起



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共 5 章,包括:整数和它的表示,同余,方程的整数解,整点与逼近,整数的应用. 本书主要介绍整数的各种性质和由整数引申出来的各种数学问题及故事.

本书适合数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Pell 方程:从整数谈起/冯克勤编著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2017.8
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978-7-5603-6755-2

I. ①P… II. ①冯… III. ①整数 IV. ①O121.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 158202 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 18 字数 185 千字

版 次 2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6755-2

定 价 78.00

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序

你经常去哪里——书店。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

读好书是一种乐趣,一种情操;—

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；老年人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄，我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了，实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

前 言

数论被称作数学的皇后,它的主要任务是研究整数的性质和方程的整数解.大家在小学和中学数学课里已经学到整数的一些知识(例如约数和倍数,最大公约数和最小公倍数,素数和正整数的素因子分解,带余除法等),也学到这些知识的某些应用(如分数的约分和通分,求整系数多项式的有理根等).如果你是数学课外活动小组的积极分子,听过数学讲座或者阅读过数学课外读物,还会了解到整数的更奇妙的知识:学到求方程整数解的许多方法,这会帮助你解决不少数论难题.

本书主要介绍整数的各种性质和由整数引申出来的各种数学问题和故事.作者试图在本书中达到以下几个目的.

首先,我们希望开拓中学生的数学眼界,从6 000多年前人类认识了整数讲起,一直讲到1994年证明费马猜想,不仅介绍中国在数论上的光辉成就(勾股定理、中国剩余定理、陈景润定理等),也涉及各国伟大数学家一些重要的数论贡献,从整数讲到有理数和实数,从多项式讲到幂级数,从整数的四则运算讲到有限域,从有理数逼近无理数讲到数的几何,试图使大家明白,在中学里分别讲授的算术、代数和几何是一个有机的整体.也希望同学们在课堂学习之余,能闻到一点近代数学的气息.

其次,我们希望提高中学生的数学修养和素质,在书中讲述了与整数有关的一些数学知识,但我们的着眼点主要不是增加知识,也不是介绍解题技巧,而是通过一些数学材料着重叙述各种数学思想和观点.用整数的同余说明如何对事物作数学上的分类(等价关系),用同余类上的四则运算引申出抽象的代数结构(环或域),用有理数逼近无理数说明精确和近似的辩证关系,用通信中各种实际问题说明数学模型的意义.以大量具体例子说明数学上的许多概念是如何自然产生和提炼出来的,数学上存在性和构造性证明的价值和区别.我们希望同学们能体会到人们在各种实践活动中的数学思考方式.

最后,我们希望中学生了解整数的各种实际应用.数学是抽象的,它是各种事物共性的高度概括,这也决定了数学应用的广泛性.在古希腊,整数曾经被作为认识世界和哲学思考的基本手段(“万物皆数”).整数概念是古代人类在生产实践中产生的.随着实践活动的发展和科学技术不断进步,特别是20世纪计算机技术的飞速发展,包括数论在内的整个离散数学成为解决实际问题的重要工具,不断出现的新的实际问题的研究促进了数论的发展(如最近发展起来的计算数论),所以实践永远是数学发展的最根本动力.但是数学的发展还有追求自身完美的内部动力,这在数论中尤为明显.整数概念一旦产生,人们对于整数性质的探讨便世代执着地追求下去.费马猜想被众多优秀数学家研究了350年,在解决问题的过程中发展了博大精深的数学理论(代数数论、解析数论……).这些深刻

的数学思想和理论一旦得到应用,往往给技术带来巨大的变革.本书最后一章挑选了数论在试验设计和通信工程中的某些应用,用这些实例说明理论和实践的辩证关系.简言之,无论同学们从事什么具体工作,数学的训练,数学知识特别是数学思维方式对于大家的事业与成就都是重要的.

数学知识的学习方法和思考方法的掌握是循序渐进的.数学也许是最具有继承性和传统性的一门学问.一年级的数学不好,肯定会影响二年级的成绩,初中数学不好,高中数学也会更加困难.所以数学基础一定要牢固,此外也许老师把数学教得过于机械、死板,用数学倒学生的胃口,或者让同学们做大量重复性的习题,产生厌烦的心理.翻一下这本书,你也许会感到数学与我们日常生活和工作息息相关,数学不是枯燥无味的,而是很活泼的学问.另一方面,数学也是一门严格的学问,要学好数学和掌握数学需要付出艰苦的努力,作者希望通过这本书使同学们对数学产生兴趣,认识到我们不是数学的奴隶,要通过努力变成数学的主人.

在 21 世纪即将到来的时刻,数学的深化和扩展正以从未有过的高速度进行着,数学研究和应用的宏伟事业正等待同学们去完成.

冯克勤

目 录

第1章 整数和它的表示 //1

1.1 数的起源 //1

1.2 进位制 //5

1.3 二进制的游戏 //10

1.4 算术基本定理 //19

1.5 素数知多少 //28

1.6 谁是最大的素数 //33

1.7 正整数的分拆 //45

1.8 堆垒数论 //57

第2章 同余 //67

2.1 同余基本性质 //67

2.2 同余用来验算 //76

2.3 同余类环 //83

2.4 欧拉函数 //94

2.5 同余方程 //101

2.6 中国剩余定理 //113

第3章 方程的整数解 //120

3.1 二元一次方程 //122

3.2 勾股数 //130

3.3	佩尔(Pell)方程	//138
3.4	费马猜想 350 年	//153
第4章 整点与逼近 //166		
4.1	黄金分割	//167
4.2	无限不循环小数	//171
4.3	有理数逼近无理数	//181
4.4	数的几何	//194
第5章 整数的应用 //204		
5.1	正交拉丁方	//205
5.2	区组设计	//212
5.3	差集合和同步通信	//220
5.4	通信如何纠错	//229
5.5	一封看不懂的电报	//242
5.6	伪随机序列	//251
5.7	钥匙可以乱扔吗	//266



整数和它表示

第

1

章

1.1 数的起源

和艺术、天文一样,数学是人类最古老的精神文明之一,数学的萌芽产生于文字发明之前,距今至少有六七千年的历史.古代人类聚居在气候温和湿润、土壤肥沃的大河流域.这就是尼罗河流域的古埃及,底格里斯河和幼发拉底河流域的古巴比伦(现在伊拉克的地方),恒河流域的古印度和黄河长江流域的中国.数学起源于这四大文明古国.

数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng).人有生老病死,每个氏族部落的成员经常发生变化(增多或减少);每次狩猎归来,需要估量猎物的多寡,分配食物时需要把猎物和氏族成员的多少加以比较;尼罗河每年洪水泛滥,洪水退去之后,需要重新丈量土地;建筑房

屋、堤坝和巨大的金字塔,需要计算各种图形的面积和体积.所以数学产生于对数量的认识和对几何图形的认识,而最早认识到的数是 1,2,3 这些正整数.

现在,每个幼儿园的孩子都可以数出 1,2,3 及更大的数字,但是在几千年之前,人们从 3 只羊、3 个人和 3 块石头中间提炼出它们共同的性质,产生了数 3 的概念,是非常不简单的.考古学家发现,在有文字之前,人们是用石子、沙粒、树枝和贝壳等实物来计数.1930 年,美国的考古队在伊拉克境内发现一个封口泥罐,泥罐表面画着一种牲畜,罐里有 48 颗泥粒,这表示泥罐的主人曾经有过 48 头这种牲畜.中国史书上有“上古结绳而治”一说,人们在绳上打几个结,用来记载有几个事物.对于少量物品,人们用手指计数,物品多了则用树枝在泥巴上刻痕,或用刀具在动物骨骼上刻线.

大约在公元前 4000 年左右,人类发明了文字,各种数以固定的形式书写成文字的形式,这就是数字,看一看各文明古国不同的数字表达方式是非常有趣的.在古埃及,最初的文字是象形的,用树枝蘸着炭汁,写在芦草挤压晒干而成的纸草上,这些数字为:



1 10 100 1 000 10 000 100 000 1 000 000 10 000 000

例如,6 表示成 , 300 表示成 , 等等.

在古巴比伦,用削尖的木棒在半湿的软泥板上书写文字,每个笔画的形状是楔形,称作楔形文字,数字

写成:

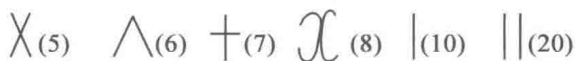


在古印度,公元前2世纪数字表示成如下的婆罗门式记号:



大家会发现,其中的6和7与现在表达方式很相像.事实上,在13世纪初,阿拉伯人把印度数字加以变化传到欧洲,被欧洲人称为阿拉伯数字,就是我们今天普遍采用的数字.

在中国,数字也出现得很早,距今约6000年前的西安半坡村新石器时代遗址中有刻在陶器上的数字:



我国系统的数字大约出现在商代,用甲骨文书写的数字有:



另有百、千、万等高位值符号:



到了春秋时期(前700—前476),我们的祖先创造了用算筹表示数字和进行运算的“筹算”,算筹通常