程永玲◆著

几类偏微分方程广义解的研究

JILEI PIANWEIFEN FANGCHENG GUANGYIJIE DE YANJIU

山西出版传媒集团
山西经济出版社

程永玲◆著

几类偏微分方程广义解的研究

山西出版传媒集团
山西经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

几类偏微分方程广义解的研究/程永玲著.—太原：山西经济出版社，2017.8

ISBN 978-7-5577-0248-9

Ⅰ.①几… Ⅱ.①程… Ⅲ.①偏微分方程—广义解—研究 Ⅳ.①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 211093 号

几类偏微分方程广义解的研究

著　　者：程永玲
责任编辑：陈海红
装帧设计：赵　娜

出 版 者：山西出版传媒集团·山西经济出版社
地　　址：太原市建设南路 21 号
邮　　编：030012
电　　话：0351-4922133（发行中心）
0351-4922085（总编室）
E - mail：scb@sxjjcb.com（市场部）
zbs@sxjjcb.com（总编室）
网　　址：www.sxjjcb.com

经 销 者：山西出版传媒集团·山西经济出版社
承 印 者：山西科林印刷有限公司

开　　本：850mm × 1168mm　1/32
印　　张：4.125
字　　数：125 千字
版　　次：2017 年 8 月 第 1 版
印　　次：2017 年 8 月 第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5577-0248-9
定　　价：20.00 元

前 言

近年来，由于数学自身的发展及物理、力学等学科实际问题的推动,偏微分方程的研究已经成为数学领域中重要的研究课题之一。

对于各种学科出现问题的描述既有单个的方程也有方程组（耦合方程组)。其典型问题一般分为双曲型方程、抛物型方程、椭圆形方程以及椭圆—抛物型、双曲—抛物型等混合型方程。近年来,关于非线性发展方程中的非线性偏微分方程组已有广泛研究，其中关于热弹性杆方程的研究尤为广泛，它包括热弹性杆耦合方程组以及两个杆之间的热黏弹性耦合问题。

非线性的弹性杆的应变孤立波问题也是一个极其复杂的课题,正如我们所知道的,影响振动波的产生和传播的因素有很多,如非线性、弥散、耗散和非线性势力等。根据对影响非线性的弹性杆的应变孤立波的产生和传播的因素不同,国内外许多学者分别从不同的角度,建立了相关数学模型，且关于大量定解问题的整体适定性做了许多丰富的研究等等。

本书以典型的波动方程柯西问题为例,简述了广义解的定义,并以此为例,研究了上述两类问题:一类热弹性杆、梁方程组和一类演化方程在齐次和非齐次边界条件下的广义解。

本书的出版得到了山西大学商务学院科研基金的资助，导师张建

文为本书的撰写提供了指导和帮助。在此表示衷心的感谢！

偏微分方程内容广泛，书中的错误与不当之处，恳请读者批评指正。

作者

2017 年 3 月于山西大学商务学院

目　录

第一章　绪论 …………………………………… 1

第一节　偏微分方程的一般概念 ………………… 1

第二节　偏微分方程的分类 ……………………… 2

第三节　常见收敛 ………………………………… 4

第二章　柯西问题的广义解 ……………………… 10

第一节　常用空间及引理 ………………………… 10

第二节　广义解定义介绍 ………………………… 13

第三章　一类热弹耦合杆方程的解 ……………… 17

第一节　问题的提出 ……………………………… 17

第二节　近似解的提法 …………………………… 20

第三节　问题弱解的存在性 ……………………… 21

第四节　问题强解的存在性 ……………………… 29

第四章　齐次边界条件下一类热弹耦合梁偏微分方程的解 …… 35

第一节　问题的提出 ……………………………… 35

第二节 一些假设 …… 36
第三节 近似解的提法 …… 37
第四节 问题弱解的存在性 …… 38
第五节 问题强解的存在性 …… 49
第六节 古典解的存在性 …… 58

第五章 非齐次边界条件下一类热弹耦合偏微分方程的解 …… 80

第一节 问题描述 …… 80
第二节 非线性边界条件下热弹耦合问题的弱解 …… 80

第六章 齐次边界条件下一类非线性演化方程的初边值问题 …… 92

第一节 问题的提出 …… 92
第二节 一些假设 …… 94
第三节 系统整体解的存在唯一性 …… 96
第四节 广义解之强解 …… 104

第七章 一类非线性演化方程整体强解的全局吸引子 …… 106

第一节 一些定义和引理 …… 106
第二节 系统整体强解全局吸引子的存在性 …… 108

参考文献 …… 116

第一章　绪论

第一节　偏微分方程的一般概念

给定一个形如

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x^{\alpha}},\cdots)=0$$

的等式，其中 α 为重指标($\alpha_1...\alpha_n$)，每个 α 为非负整数，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，$x_1\cdots x_n$ 为自变量，一般取实值，为未知函数。$\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial_{x_1}}$ 是 $\frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial_{x\alpha_1...x_n^{\alpha_n}}}$ 的简写，F 是 $x_1\cdots x_n$，u 以及 u 的偏导数的已知函数。有时，F 可以不显含 x_i 或 u，但必须含 u的偏导数，这样的等式称为偏微分方程。

如果有一组这样的方程且它们所涉及的未知函数一般也不止一个，则这一组方程就构成偏微分方程组。

出现在偏微分方程（组）中未知函数 x_i 的偏导数的最高阶数称为该偏微分方程（组）的阶。如果方程（组）对未知函数及所有偏导数都是线性的，则称其为线性偏微分方程(组)，否则，称为非线性偏微分方程（组）。在非线性偏微分方程（组）中，如果方程（组）只对未知函数的最高阶偏导数是线性的，称为拟线性偏微分方程（组）。

若函数 u（在方程组的情形下是一组函数）在指定的区域中连续，且具有偏微分方程（组）中所出现的一切导数，且将它代入这个（这些）

方程时,使方程化为恒等式,则称 u 是该偏微分方程(组)的解或古典解(也称为经典解)。由于实际应用的需要,除研究古典解外,人们还常常需要研究各种广义意义下的解。它们将按较弱的意义满足方程,称为广义解。广义解的定义将按不同场合的需要而异。特别,当所考察的偏微分方程(组)为线性时,可以在广义函数类中定义偏微分方程的解。

由于在一般情形下,一个偏微分方程(组)可以允许有很多解。例如,好多来源于物理学的偏微分方程,如波动方程、热传导方程、位势方程、流体力学中的欧拉方程组等,都分别表达了一大类物理运动的规律。任何一种表示相应的运动形式的函数都应该是有关偏微分方程的解。因此,为了确定一个偏微分方程(组)的特定的解,常常还需要加上定解条件,如未知函数在初始时刻(如果自变量中有某个变量有时间的意义)应满足的初始条件,在所考察区域的边界上应满足的边界条件等相应地,可以研究偏微分方程(组)初值问题,边值问题,并定义这些定解问题的古典解或广义解。在第二章将以波动方程为例简述强解和弱解的定义。

第二节　偏微分方程的分类

偏微分方程形式多种多样,形式上不同的方程可以具有相近的性质,也可以相差甚远。因此,对偏微分方程分类进行研究是十分重要的。一般我们把方程分为三大类:双曲型偏微分方程、抛物型偏微分方程和椭圆型偏微分方程

双曲型偏微分方程是描述振动或波动的偏微分方程,其中波动方程是它的一个典型的例子,可用来描述弦的微小横振动,称为弦振动方程,这是最早得到的系统描述的一个偏微分方程。下列是波动方程的形式。

一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$

二维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y,t)$$

三维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z,t)$$

波动方程主要描述自然界的各种波动现象，包括各种横波和纵波，例如声波、光波和水波，许多科学家如达朗贝尔、欧拉、伯努利、拉格朗日等在研究物体中的弦振动问题时，都对波动方程理论做出过重要贡献。波动方程的物理意义非常宽泛，但最重要的一个性质是传播速度有限，不像热传导方程。电磁场的运动方程就是波动方程，这是因为电磁相互作用只能以有限的速度传播。

抛物型偏微分方程中最简单的模型是热传导方程，根据热量守恒定律和傅里叶热传导实验定律导致的方程称为热传导方程。热传导方程它描述一个区域内的温度如何随时间变化，热传导在均匀介质里的传播可用下列方程式来表达。

一维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

二维热传导方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

三维热传导方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

其中 $a^2=\frac{k}{cp}$，c 为比热，ρ 为密度，k 热传导的系数。u 表示温度，

它是时间 t 和空间变量 (x,y,z) 的函数，热传导方程支配热传导及其他扩散方程，诸如粒子扩散或神经细胞的动作电位，同时也可以作为某些金融现象的模型。但量子力学中的薛定谔方程虽有类似的热传导方程的数学式，其本质却不是扩散问题，解的定性问题也完全不同。

椭圆型偏微分方程在流体力学，弹性力学电磁学几何学和变分法中都有应用，其中拉普拉斯方程和泊松方程是椭圆型方程最典型的例子。

泊松方程 $\nabla^2\varphi=f$ 是数学中一个常见于静电学、机械工程和理论物理的偏微分方程，是因法国数学家、几何学家、物理学家泊松而得名的，泊松首先在无引力源的情况下得到的泊松方程 $\Delta\varphi=0$，即拉普拉斯方程（$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$），当考虑到引力场时有 $\nabla^2\varphi=f$（即 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$），其中 f 为引力场的质量分布。在这里 ∇ 代表的是拉普拉斯算符，也就是哈密顿算符 的平方，而 f 和 φ 可以是在流形上的实数或复数值的方程。泊松方程可以利用格林函数法、分离变量法、特征线法来求解。

本书中的一类热弹耦合方程便是在热传导方程的基础上逐步演化而成。一类演化方程则是在波动方程的基础上考虑非线性、耗散等因素的影响演化而来。

第三节　常见收敛

关于收敛，对于赋范线性空间的点列来说，有依范数收敛或强收敛概念。对于定义在赋范线性空间上的有界线性算子列来说，则有依范数收敛与强收敛概念：一种是共轭空间中有界线性泛函序列的弱 * 收敛，另一种是空间中点列的弱收敛。下面推广弱收敛概念。

定义 1　设 E 为赋范线性空间。E 的共轭空间 E^* 中的序列 $\{f_n\}$ $(n=1,2,3\cdots)$ 称为弱 * 收敛 $f_0\in E^*$，是指对任意的 $x\in\Omega$，有 $f_n(x)\rightarrow f_0(x)$。称 f_0 为 $\{f_n\}$ 的弱 * 极限。

由弱 * 收敛的定义可知下列性质成立。

性质 1　弱 * 收敛的极限是唯一的。

其实，若 E 上有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 同时弱 * 收敛于 f_0 及 f'_0，由弱 * 收敛的定义可知，对任何 $x\in\Omega$，$f_0(x)=f'_0(x)$，故 $f_0=f'_0$。

性质 2　有界线性泛函序列依 E^* 中的范数收敛蕴含弱 * 收敛。

其实，设 $\{f_n\}\in E^*(n=1,2,3\cdots)$，$f_0\in E^*$ 且 $\|f_n-f_0\|\rightarrow 0$。任取 $x\in E$，由

$$\|f_n(x)-f_0(x)\|\leqslant\|f_n-f_0\|\ \|x\|\rightarrow 0$$

可知，$\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f_0。

性质 3　设 E 是 Banach 空间。如果 E 上的有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ $(n=1,2,3\cdots)$ 弱 * 收敛于 $f_0\in E^*$，则 $\{\|f_n\|\}$ 是有界数列。

其中，E 为 Banach 空间这一条件在这里非常重要。

下列定理是弱 * 收敛的一个充分必要条件。

定理 1 设 E 是 Banach 空间，$\{f_n\}(n=1,2,3\cdots)$ 是 E 上的一个有界线性泛函序列，则 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 $f\in E^*$ 的充分必要条件。

(1) $\{f_n\}$ 一致有界；

(2) 对 E 的某个稠密子集 G 中的每个元素 x，$\{f_n(x)\}$ 收敛。

定理 2 若赋范线性空间 E 是可分的，则由 E 上任一一致有界的线性泛函序列中，必可取出一个弱 * 收敛的子序列。

证明由 E 可分可知，E 中存在可数稠密子集 $\{x_k\}(k=1,2,3\cdots)$，设 $\{f_n\}$ 是 E 上的一个一致有界线性泛函序列。则

$$f_1(x_1),f_2(x_1),f_3(x_1),\cdots$$

是有界的，因此 $\{f_n\}$ 从中可选出子序列 $f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_3^{(1)},\cdots$ 使数列

$$f_1^{(1)}(x_1),f_2^{(1)}(x_1),f_3^{(1)}(x_1),\cdots$$

收敛。同理$\{f_n^{(1)}\}$从中又可选出子序列$f_1^{(2)},f_2^{(2)},f_3^{(2)},\cdots$使

$$f_1^{(2)}(x_2),f_2^{(2)}(x_2),f_3^{(2)}(x_2),\cdots$$

收敛。以此类推,可得一系列的子序列:

$$\left.\begin{array}{l} f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_3^{(1)},\cdots \\ f_1^{(2)},f_2^{(2)},f_3^{(2)},\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1^{(n)},f_2^{(n)},f_3^{(2)},\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{1.3.1}$$

其中每一个序列是前一个的子序列,而且对每个$k(k=1,2,3\cdots)$

$$f_1^{(k)}(x_k),f_2^{(k)}(x_k),f_3^{(k)}(x_k),\cdots \tag{1.3.2}$$

收敛。取式(1.3.1)中对角线上的泛函组成的序列

$$f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_n^{(n)},\cdots$$

由(1.3.2),对每个$k(k=1,2,3\cdots)$序列

$$f_1^{(1)}(x_k),f_2^{(1)}(x_k),f_3^{(1)}(x_k),\cdots f_n^{(n)}(x_k),\cdots$$

收敛。由于$\{f_n^{(n)}\}(n=1,2,3\cdots)$[一致有界,$\{x_k\}(k=1,2,3\cdots)$]

是E中的稠密子集,由定理1的充分性可知,$\{f_n^{(n)}\}$弱*收敛于某一有界线性泛函。证毕。

下面讨论点列的弱收敛。

定义2 设E是赋范线性空间,$\{x_n\}\subset E(n=1,2,3\cdots)Ex_0\in E$,如果对于每个$f\in E^*$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$,则称$\{x_n\}$弱收敛于$x_0$,称$x_0$是$\{x_n\}$的弱极限。

由点列弱收敛的定义可导出下列性质:

性质1　弱收敛点列的极限是唯一的。

用反证法。设$\{x_n\}\subset E(n=1,2,3\cdots)$既弱收敛于$x_0$又弱收敛于$x'_0$。若$x_0\neq x'_0$,则存在$f_0\in E^*$使$\|f_0\|=1$,$f_0(x_0\neq x'_0)=\|x_0\neq x'_0\|$。另一方面,$\{f_0(x_n)\}$同时收敛于$f_0(x_0)$及$f_0(x'_0)$,故$f_0(x_0)=f_0(x'_0)$,于是$f_0(x_0-x'_0)=0$,矛盾。因此弱极限是唯一的。

性质2　点列的依范数收敛蕴含弱收敛。

证法与弱*收敛的性质2°相同。

性质3　设$\{x_n\}\subset E(n=1,2,3\cdots)$弱收敛于$x_0\in E$,则$\{\|x_n\|\}$有界。

我们将$x_n(n=1,2,3\cdots)$看成E^{**}中的元素,那么作E^*为上的有界线性泛函序列。$\{x_n\}$弱*收敛于x_0。因是Banach空间,由弱*收敛的性质3°可知,$\{\|x_n\|\}$有界。

为了使读者对点列弱收敛概念有较深入的了解,我们以$C[a,b]$及$L^p[a,b]$为例,讨论它们中点列弱收敛的条件。

例1 空间$C[a,b]$中的点列$\{x_n\}(n=1,2,3\cdots)$弱收敛于$x_0\in C$的充分必要条件是:

(1)$\{x_n(g)\}$作为函数列在$[a,b]$上出处收敛于$x_0(g)$,

(2)$\{\|x_n\|\}$为有界数列。

证明必要性 (2)的必要性由弱收敛的性质3导出。现证条件(1)的必要性。任取$t_0\in[a,b]$,在$C[a,b]$上定义泛函f_0如下:

$$f_0(x)=x(t_0)$$

则f_0是$C[a,b]$上的有界线性泛函。于是$f_0(x_n)=f_0(x_0)$,即$\{x_n(t_0)\}$收敛于$x_0(t_0)$。(1)成立。

充分性设f是$C[a,b]$上任一有界线性泛函,存在$[a,b]$上的囿变函数v,使

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)\quad(x\in C[a,b])$$

上式右端可以看成是 L–S 积分。现设$\{x_n(g)\}$满足条件(1)、(2)。由 L–S 积分的 Lebesgue 控制收敛定理,得到

$$\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}v(t)\to\int_a^b x_0(t)\mathrm{d}v(t)$$

即$f(x_n)=(x_0)$,故$\{x_n\}$弱收敛于x_0。

利用例 1 的结果,可以在$C[a,b]$中作一个弱收敛但不依范数收敛的点列。为简单起见,设$[a,b]=[0,1]$。令

$$x_n(t)=\frac{nt}{1+n^2t^2}(t\in[0,1],n=1,2,3,\cdots)$$

容易看出,对每个$t\in[0,1]$,$\{x_n(t)\}\to 0$,例 1 中的条件(1)满足,再利用古典分析中求大值的方法可以证明:

$$\|x_n\|=\frac{1}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

故有$\{\|x_n\|\}$界,条件(2)满足。因此$\{x_n\}$弱收敛且其弱收敛极限为θ,但由上式,$\{x_n\}$不依范数收敛于零。

例 1 还告诉我们,对于一致有界的连续函数列,处处收敛概念可以纳入在弱收敛概念中。

例 2 $L^p[a,b](1<p<\infty)$中的点列$(n=1,2,3,\cdots)$弱收敛于$x_0\in L^p[a,b]$的充分必要条件是:

(1)对于每个$t\in[a,b]$,

$$\int_a^t x_n(s)\,ds\to\int_a^t x_0(s)\,ds(n\to\infty)$$

(2)$\{\|x_n\|\}$为有界数列。

证明必要性 只需证条件(1)的必要性。对于任一$t\in[a,b]$,令χ_t为$[a,t]$的特征函数。显然$\chi_t\in L^q[a,b]$,这里q是p的相伴数。
等式

$$f(x)\int_a^b x(s)\chi_t(s)ds=\int_a^t(s)ds$$

定义了 $L^q[a,b]$ 上的有界线性泛函 f。现设 $\{x_n\}\subset L^p[a,b]$ $(n=1,2,3\cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in L^q[a,b]$，将 x_n 代入上式并令 $n\to\infty$，得

$$\int_a^t x_n(s)\,\mathrm{d}s \to \int_a^t x_0(s)\,\mathrm{d}s$$

(1)成立。

充分性 $\{x_n\}\subset L^p[a,b]$ $(n=1,2,3\cdots)$ 设满足条件(1)、(2)。条件(1)等价于

$$\int_a^b x_n(s)\chi_t(s)\mathrm{d}s = \int_a^t x_0(s)\chi_t(s)\mathrm{d}s$$

其中 χ_t 即为前面已定义的区间 $[a,b]$ 上 $[a,t]$ 的特征函数。于是对任一阶梯函数

$$y(s)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\chi_{tj}(s) \tag{1.3.3}$$

有

$$\int_a^b x_n(s)y(s)\mathrm{d}s \to \int_a^b x_0(s)y(s)\mathrm{d}s. \tag{1.3.4}$$

而形如(1.3.3)的阶梯函数的全体在 $L^q[a,b]$ 中稠密，由 $\{\|x_n\|\}$ 的有界性及定理 1 可知，对任一 $y\in L^q[a,b]$，(1.3.4)仍成立，故 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0。

利用例 2，我们同样可以在 $L^p[a,b]$ 中找到一个弱收敛但不依范数收敛的点列。

还应注意，赋范线性空间 E 上的有界线性泛函序列作为 E^* 中的点列也有弱收敛概念。一般说，它比弱 * 收敛强，但比依范数收敛弱。

关于点列及有界线性泛函序列的收敛概念，则应当注意：对于点列来说，有依范数收敛（即强收敛）、弱收敛两种，对于有界线性泛函序列来说，则有强收敛（即依范数收敛）、弱收敛以及弱 * 收敛等三种。

第二章　柯西问题的广义解

第一节　常用空间及引理

记 $L^2(\Omega)$ 为 Ω 上实值 Lebesgue 可测函数 $f=f(x)$ 所组成的 Hilbert 空间，$|f|<\infty$，其中 $|f|=\|f\|L^2_{(\Omega)}\left(\int_0^l(f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$。$L^2(\Omega)$ 中的两函数 f 及 g 的内积记作 $(f,g)=\int_0^l f(x)g(x)dx$。我们用 $L^\infty(0,T)$ 表示 $(0,T)$ 上本性有界可测实值函数类。$L^\infty(0,T)$ 是 Banach 空间，其模为 $\|f\|L_{\infty(0,T)}=\inf\limits_{\substack{mE_0=0\\E_0\subset[0,T]}}\left[\sup\limits_{t\in(0,T)-E_0}|f(x)|\right]$。

空间 $L^2(Q)$，$C^m(Q)$，$D(0,T)$ 及 $D'(0,T)$ 以同样的方式定义。若 $g\in C^m(\Omega)$ 令，$\|g\|_m=\left[\sum\limits_{k=0}^{m}\int_0^l\left|\frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k}\right|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$ 设 $\widetilde{C}^m(\Omega)$ 为使 $\|g\|_m<\infty$ 的那些函数 g 组成的 $C^m(\Omega)$ 的子集，我们定义 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$ 为 $\widetilde{C}^m(\Omega)$ 在模 $\|\cdot\|_m$ 下的完备化，即 $H^m(\Omega)$ 是由 $u\in L^2(\Omega)$ 中，具有强导数 $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\in L^2(\Omega)$，$(0\leqslant k\leqslant m)$ 的一切函数组成。$D(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包记为