国家出版基金资助项目
国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

BROWNIAN MOTION AND POTENTIAL

Brown运动与位势

王梓坤 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

BROWNIAN MOTION AND POTENTIAL

Brown运动与位势

王梓坤　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

现代概率论的重要进展之一是发现了马尔科夫过程与位势理论间的深刻联系. 本书通过较简单的马尔科夫过程，即布朗运动，以及与它相应的古典位势，来对一般理论作一前导，这将有助于进一步开展对一般理论的学习和研究.

本书适合科技工作者和高等院校理工科师生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Brown运动与位势/王梓坤著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978－7－5603－6586－2

Ⅰ.①B…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①Brown-Morrish定理

Ⅳ.①O442

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第084459号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　陈雅君
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张9　字数93千字
版　　次　2017年6月第1版　2017年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6586－2
定　　价　48.00元

◎代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的"纵横谈".

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,"不动笔墨不读书".动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:"札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣."

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物．涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此．曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人．他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关．

王梓坤

前言

现代概率论的重要进展之一是发现了Markov过程(简称马氏过程)与位势理论(简称势论)之间的深刻联系.这个发现使势论中许多概念和结论获得了明确的概率意义,同时也使马氏过程有了新的分析工具,因而两者相互促进,丰富了彼此的内容.这种联系的萌芽初见于S. Kakutani[3]及J. L. Doob[7]的著作中.前者证明了:平面上Dirichlet问题的解可以通过二维Brown运动的某些概率特征来表达.Doob等人的大量工作发展了这方面的研究,而把这种联系推广到相当一般的马氏过程,则主要是G. A. Hunt的贡献.近年来这方面的文献很多,但由于理论日益抽象化而使初学者不易了解它们的背景和实质.

本书试图通过比较简单的马氏过程,即Brown运动,以及与它相对应的古典位势(Newton位势与对数位势),来对一般理论作一前导.Brown运动与古典位势不仅比较简单,而且是一般理论的思想泉源,因此,这样也许有助于对后者的理解.由于

Brown 运动与古典位势的内容都很丰富，我们不可能深入到各自的专题领域中去，而只能把重点放在二者的联系上，同时也叙述一些近期发表的新结果. 这种联系反映在 Dirichlet 问题的解、平衡势、Green 函数等问题上.

除少数结果只指出参考文献外，书中所叙述的定理基本上都给出了详细的证明.

随着 Brown 运动所在的相空间 R^n（n 维欧氏空间）的维数 n 不同，概率性质也有显著差异. 以后会看到，当 $n\leqslant 2$ 时，Brown 运动是常返的，对应于对数势；当 $n\geqslant 3$ 时，它是暂留的，对应于 Newton 位势. 它们分别构成第 2 章与第 1 章的内容.

限于作者水平，缺点错误，在所难免，敬希批评指正.

王梓坤

1980. 11. 30

目录

高维 Brown 运动与 Newton 位势

第1章

§1　势论大意

（一）势论的物理背景. 古典势论起源于物理学，后来抽象成为数学的一个分支. 根据电学中的库仑定律，两个异性电荷互相吸引，引力方向在其连线上，力的大小为

$$F=c\cdot\frac{Qq}{r^2}$$

其中 Q 与 q 分别为两电荷的数量，r 为两者在 R^3 中的距离，c 为某常数，与单位有关. 为了研究引力，最好引进势的概念. 设在 x_0 处有一个电荷 q_0，它在任一点

$x(x \neq x_0)$ 处所产生的势，等于把一个单位电荷从无穷远移到点 x 处所做的功. 势与此电荷在到达 x 以前所走的路径无关. 势的值为

$$\frac{1}{2\pi} \frac{q_0}{|x - x_0|} \tag{1}$$

常数$\frac{1}{2\pi}$依赖于单位的选择，并非本质.

今设有 m 个电荷 q_i，分别位于点 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$，可视

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_m \\ q_1, q_2, \cdots, q_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

为一离散的电荷分布. 这组电荷在点 $x(x \neq x_i)$ 处所产生的势仍定义为把单位电荷从无穷远处移到 x 所做的功. 由于力和功都是可加的，故此势为

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{|x - x_i|} \tag{3}$$

现在假设电荷按照测度 μ 分布. 由上式的启发，自然称由 μ 所产生的在点 x 的势为

$$G\mu(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{R^3} \frac{\mu(\mathrm{d}y)}{|x - y|} \tag{4}$$

以后会证明，如 $\mu(R^3) < \infty$，则关于 Lebesgue 测度 L，对几乎一切 x，有 $G\mu(x) < \infty$（见引理 3）.

式(4)定义一个积分变换 G，它把测度 μ 变为函数 $G\mu$. 下面会看到，变换的核$\frac{1}{2\pi} |x - y|$恰好等于三维 Brown 运动转移密度对时间 t 的积分. 这正是把 Brown 运动与 Newton 位势联系起来的桥梁之一.

在物理学中，势论所研究的，主要是电荷分布 μ、势以及借助于它们而定义的各种量间的关系. 作为这

种量的例，可举出电荷分布 μ 的能 I_μ(energy)，它是势对此 μ 的积分，即

$$I_\mu \equiv \int_{R^3} G\mu(x)\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\int_{R^3} \frac{\mu(\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}x)}{|x-y|} \quad (5)$$

电荷分布的全电荷是 $Q \equiv \mu(R^3)$. 如果把全部电荷 Q 散布在某导体上，它们便会重新分布，使得在此导体所占的集 A 上，势是一个常数. 记这个新分布为 μ_0，它具有下列能的极小性

$$I_{\mu_0} = \min_{\mu}\{I_\mu \mid \mu(R^3) = Q, \llcorner\mu \subset A\}$$

其中 $\llcorner\mu$ 表示 μ 的支集(support)，它是一切使 $\mu(U)=0$ 的开集 U 的和的补集. μ_0 所决定的分布形态，在物理学中称为平衡态. 对紧集 $E(\subset R^3)$，如存在 μ 使 $\llcorner\mu \subset E$，而且 $G\mu(x)=1(\forall x \in E)$，则称 $G\mu$ 为 E 的平衡势；具有平衡势的集称为平衡集；而 $\mu(E)$ 则称为 E 的容度，记为 $C(E)$. 因此，导体 E 的容度是为了在此导体上产生单位势的全电荷. 以上各概念来自物理学，以后还要从数学上重新定义. 下面简述古典势论中的一些结果，其中有些以后会用概率方法加以证明. 下面设 μ 为有穷测度.

电荷分布的唯一性：势 $G\mu$ 唯一决定 μ.

势的决定：$G\mu$ 被它在 $\llcorner\mu$ 上的值所决定.

平衡势唯一：一集最多有一平衡势.

平衡势的刻画：设平衡集 E 的平衡势为 $G\mu_0$，则

$$G\mu_0(x) = \inf\{G\mu(x) \mid G\mu(x) \geqslant 1, \forall x \in E\} \quad (6)$$

平衡势的能：如平衡集 E 的能有穷，则在所有支集含于 E、全电荷等于 E 的容度的电荷分布 μ 所对应的势中，平衡势 $G\mu_0$ 的能 I_{μ_0} 极小，即

$$I_{\mu_0} \equiv \int_{R^3} (G\mu_0)\mathrm{d}\mu_0 =$$

$$\min_{G_\mu}\left\{\int_{R^3}(G\mu)\mathrm{d}\mu \mid {}_\llcorner\mu\subset E,\mu(E)=C(E)\right\} \quad (7)$$

控制原理：对于两势 $h=G\mu,\bar{h}=G\bar{\mu}$，若处处有 $h\geqslant\bar{h}$，则 $\mu(R^3)\geqslant\bar{\mu}(R^3)$.

投影(Balayage) 原理：设已给势 $h=G\mu$ 及闭集 E，则存在势 $\bar{h}=G\bar{\mu}$，满足

$$\begin{aligned}&\bar{h}(x)=h(x) \quad (\forall x\in E)\\ &\bar{h}(x)\leqslant h(x) \quad (\forall x\in R^3)\end{aligned} \quad (8)$$

$${}_\llcorner\bar{\mu}\subset E,\bar{\mu}(R^3)\leqslant\mu(R^3) \quad (9)$$

此外，还满足：对任意 x 有

$$\begin{aligned}\bar{h}(x)=&\inf_{v}\{Gv(x)\mid Gv(x)\geqslant h(x),\\ &\forall x\in E;{}_\llcorner v\subset E\}= \quad (10)\\ &\sup_{v}\{Gv(x)\mid Gv(x)\leqslant h(x),\\ &\forall x\in E;{}_\llcorner v\subset E\} \quad (11)\end{aligned}$$

称 $\bar{h}$ 为 h 的投影势(Balayage potential).

下包络原理：各势的逐点下确界也是势.

(二) 若干引理. 考虑 n 维欧氏空间 R^n，其中的点记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它与原点的距离为 $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$. 对 $r>0$，记

$$B_r\equiv\{x\mid |x|\leqslant r\},\mathring{B}_r\equiv\{x\mid |x|<r\}$$

$$S_r\equiv\{x\mid |x|=r\}$$

它们分别是以原点为中心、r 为半径的球、开球和球面.

引理 1 设 $f(y)$ 为一元函数，$y\geqslant 0$，如下式左边积分存在，则

$$\int_{B_r}f(|x|)\mathrm{d}x=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^r s^{n-1}f(s)\mathrm{d}s \quad (12)$$