Mock theta 函数理论

陈 斌　周海港　著

科 学 出 版 社

Mock theta 函数理论

陈 斌 周海港 著

科 学 出 版 社
北 京

前　言

众所周知, 模形式理论在费马大定理的证明中起到了关键的作用, 成为朗兰兹纲领的核心, 而 mock theta 函数及 mock 模形式是国际上模形式领域近年来研究的热点和焦点问题. 1920 年, 印度年轻数学家 Ramanujan 给大数学家 Hardy 的最后一封信中提到了一类他自己命名的所谓 "mock theta 函数", 但是他却没有给出这类函数的准确科学定义, 而是仅仅列出了 17 个经典的例子来描述它们的特殊性质. Ramanujan 发现这类函数在尖点处具有和模形式类似的渐进展开式, 但它们却不满足模形式所具有的模变换律, 而这种隐藏的联系就成为一个神秘的谜团.

然而, 在沉寂了八十余年之后, mock theta 函数及其半整权模形式在理论和应用方面出现令人瞩目的重大突破和迅速发展. 一是奇异模理论取得了极大的进展. 2000 年, 在 Borcherds 杰出工作的推动下, Zagier 证明了奇异模迹的生成函数是权为 3/2 的弱全纯模形式, Bruinier 和 Funke 将其推广到了一般的模函数上. 二是 mock theta 函数之谜被彻底揭开. 2002 年, Zwegers 在导师 Zagier 的指导下完成的博士学位论文中, 首次将 mock theta 函数与非全纯的 Jacobi 形式、亚纯 Jacobi 形式 Fourier 系数、实解析的向量模形式建立了联系, 揭开了 mock theta 函数所具有的模形式本质属性. 2004 年, Bruinier 和 Funke 首次发现每一个 mock theta 函数都是权为 1/2 的弱调和 Maass 形式的全纯部分, 而其非全纯部分是一个权为 3/2 的一元 theta 函数. 近年来, 国内外许多学者、专家围绕这些问题的研究十分活跃, 研究出一些模形式的新方向, 如 Maass-Jacobi 形式等, 相关新成果不断涌现.

本书主要讨论了 mock theta 函数的研究背景和进展、mock theta 函数的定义、混合 mock theta 函数的 Ramanujan 断言和径向极限、mock theta 函数的两类对偶表示、mock 模形式与弱调和 Maass 形式、mock theta 函数系数的渐进公式、mock 模形式的交叉应用等若干方面.

本书的内容主要安排如下: 第 1 章介绍 mock theta 函数研究的背景和进展, 主要围绕 mock theta 函数的本质定义展开讨论. 第 2 章讨论了 mock theta 函数的 Ramanujan 断言, 这是理解和思考 Ramanujan 断言关于 mock theta 函数研究初衷的重要途径. 第 3 章给出了 mock theta 函数的两类对偶表示, 揭示这些不同表示之间的本质, 从不同的角度研究 mock theta 函数. 第 4 章从更广的角度, 即混合 mock 模形式与弱调和 Maass 形式出发研究 mock theta 函数. 第 5 章讨论了 mock theta 函数系数的渐进公式, 也涉及了半整权尖形式的类似问题的新研究结果. 第 6 章主要介绍了 mock theta 函数的推广形式、mock theta 函数与 Jacobi 形式、量子

模形式、量子黑洞理论、奇异模的迹等之间的交叉联系和本质理论.

本书内容由陈斌和周海港共同研究完成, 包含了陈斌在山东大学做博士后研究期间的新成果. 非常感谢同济大学陆洪文教授和山东大学刘建亚教授的悉心指导和帮助. 本书的出版得到了渭南师范学院优秀学术著作出版基金、国家自然科学基金 (61402335)、陕西省自然科学基金 (2016JM1004)、陕西省教育厅自然科学基金 (17JK0266) 以及渭南师范学院人才项目基金 (17ZRRC01) 的资助, 在此一并表示感谢. 同时感谢科学出版社的大力支持.

由于作者水平有限, 书中难免存在不足之处, 敬请广大读者批评指正.

作　者
2017 年 12 月

符号说明

$\mathbb{C}$	复平面
$\mathbb{C}^*$	非零复数集
$\mathbb{Z}$	整数环
$\mathbb{H}$	上半复平面
$\mathbb{Q}^t$	非负有理数
τ	上半复平面, $\mathbb{H}$ 上的复变量
$\Im(\tau)$	复变量 τ 的虚部
q	形如 $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$ 的复变量, $\tau \in \mathbb{H}$
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$	整数环 $\mathbb{Z}$ 上的 2 阶特殊线性群, 即 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\right\}$
γ	形如 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的 2 阶矩阵, $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
ζ	形如 $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}m/n}$ 的 n 次单位根 若 $(n, m) = 1$, 则 $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}m/n}$ 为 n 次本原单位根
ζ_n	形如 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$ 的一个 n 次单位根
Δ_k	权为 k 的双曲 Laplacian 变换 权为 0 的双曲 Laplacian 变换记为 $\Delta = \Delta_0$
Ω_k	权为 k 的 Casimir 算子
$H(n)$	判别式 $-n$ 的 Hurwitz 类数
$\Gamma_0(N)$	2 阶特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 level 为 N 的同余子群, 即 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod N\right\}$
$\Gamma_1(N)$	2 阶特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 level 为 N 的同余子群, 即 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1 \pmod N, c \equiv 0 \pmod N\right\}$
$\Gamma(N)$	2 阶特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 level 为 N 的主同余子群, 即 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1 \pmod N, b \equiv c \equiv 0 \pmod N\right\}$
$H_k(\Gamma_0(N))$	同余子群 $\Gamma_0(N)$ 上所有权为 k 的弱调和 Maass 形式
$\Gamma(x, t)$	不完全 Gamma 函数
$(a; q)_n$	标准 q-级数的升阶乘符号 $(a; q)_0 = 1,\ \ (a)_n = (a; q)_n := (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1})$ $(a)_\infty = (a; q)_\infty := (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^n) \cdots$

$\eta(\tau)$	Dedekind η 函数
$\mu(u,v;\tau)$	Lerch 和函数
$\vartheta(v;\tau)$	Jacobi theta 函数
$h(z;\tau)$	Mordell 积分
$f^+(\tau)$	弱调和 Maass 形式 $f(\tau)$ 的全纯部分
$f^-(\tau)$	弱调和 Maass 形式 $f(\tau)$ 的非全纯部分
$E_k(\tau)$	权为 k 的 Eisenstein 级数
$\zeta(s)$	Riemann ζ 函数
F_q	F_q 函数且满足 $D_{q,z}F(z,\alpha)=F(z,\alpha+1)$
	$zD_{q,z}F(z,\alpha)=F(z,\alpha)-F(zq,\alpha)$
$m(x,q,z)$	Appell-Lerch 和或 Appell-Lerch 函数
$M_k(\Gamma)$	子群 Γ 上的权为整数 k 的全纯模形式空间
$M_k^!(\Gamma)$	子群 Γ 上的权为整数 k 的弱全纯模形式空间
$S_k(\Gamma)$	子群 Γ 上的权为整数 k 的尖形式空间
$H_k^*(N)$	$\Gamma_0(N)$ 上的权为整数 k 的本原尖形式空间
$S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N))$	$\Gamma_0(N)$ 上的权为半整数 $k+\dfrac{1}{2}$ 的尖形式空间
$S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$	$\Gamma_0(N)$ 上特征为 χ 的权是 $k+\dfrac{1}{2}$ 的尖形式空间
$S^*_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$	$\Gamma_0(N)$ 上特征为 χ 权是 $k+\dfrac{1}{2}$ 的尖形式子空间的正交补空间
$M^+_{k+\frac{1}{2}}(4N)$	$\Gamma_0(4N)$ 上权为 $k+1/2$ 的模形式空间
χ	正整数模 $4N$ 的实 Dirichlet 特征
χ_0	正整数模 $4N$ 的实 Dirichlet 平凡特征
$\mathscr{B}$	无 $\mathscr{B}$ 因子数

目 录

第1章　绪　　论

1.1　研究背景与意义

1.1.1　Mock theta 函数的渊源

1920 年 1 月 12 日, 印度年轻数学家 Ramanujan 在给 Hardy 的最后一封信中提到他自己命名的 " mock theta 函数", 但是他没有给出这类函数的确切定义, 而是仅仅列出了 17 个例子来描述它们的特殊性质, 从而使其成为一个数学之谜. 三个月后, Ramanujan 因病不幸逝世, 年仅 32 岁, 而许多与之有关的猜想吸引着数学家为之着迷[1-5]. 这里, 特别引入 Ramanujan 最后一封信的原文:

"Ramanujan: I am extremely sorry for not writing you a single letter up to now $\cdots$. I discovered very interesting functions recently which I call "Mock" ϑ-functions. Unlike the "False" ϑ-functions(studied partially by Prof. Rogers in his interesting paper) they enter into mathematics as beautifully as the ordinary theta functions. I am sending you with this letter some examples."

Ramanujan 发现的 17 个 mock theta 函数为 [6-8]

4 个 3 阶 mock theta 函数

$$f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n^2}, \tag{1.1}$$

$$\phi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q^2;q^2)_n}, \tag{1.2}$$

$$\psi(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q^2)_n}, \tag{1.3}$$

$$\chi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q)_n}{(-q^3;q^3)_n}; \tag{1.4}$$

10 个 5 阶 mock theta 函数

$$f_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n}, \tag{1.5}$$

$$f_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(-q;q)_n}, \tag{1.6}$$

$$F_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q;q^2)_n}, \tag{1.7}$$

$$F_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.8}$$

$$\chi_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n}}{(q^{n+1};q)_n}, \tag{1.9}$$

$$\chi_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n}}{(q^{n+1};q)_{n+1}}, \tag{1.10}$$

$$\phi_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}(-q;q^2)_n, \tag{1.11}$$

$$\phi_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1)^2}(-q;q^2)_n, \tag{1.12}$$

$$\psi_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}(-q;q)_n, \tag{1.13}$$

$$\psi_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}n(n+1)^2}(-q;q)_n; \tag{1.14}$$

3 个 7 阶 mock theta 函数

$$\mathcal{F}_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q^{n+1};q)_n}, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{F}_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)^2}}{(q^{n+1};q)_{n+1}}, \tag{1.16}$$

$$\mathcal{F}_2(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(q^{n+1};q)_{n+1}}. \tag{1.17}$$

其中, $q=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$; $\tau\in\mathbb{H}$; $\mathbb{H}=\{\tau\in\mathbb{C}|\Im\tau>0\}$ 为上半复平面.

对于非负整数 n, $(a;q)_n$ 为标准 q-级数的移位阶乘符号, 即

$$(a;q)_0=1,\quad (a)_n=(a;q)_n:=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}). \tag{1.18}$$

1.1.2 Mock theta 函数的萌芽

1936 年, Watson[9] 就任伦敦数学会主席时演讲的题目是 *The final problem: An account of the mock theta functions*, 特别强调了研究 mock theta 函数的重要意义. Dyson[10] 于 1987 年在纪念 Ramanujan 诞辰 100 周年大会上高度评价了 Ramanujan 发现的 mock theta 函数, 这里特别引入 Dyson 的原文:

"The mock theta-functions give us tantalizing hints of a grand synthesis still to be discovered. Somehow it should be possible to build them into a coherent group-theoretical structure, analogous to the structure of modular forms which Hecke built around the old theta-functions of Jacobi. This remains a challenge for the future. My dream is that I will live to see the day when our young physicists, struggling to bring the predictions of superstring theory into correspondence with the facts of nature, will be led to enlarge their analytic machinery to include mock theta-functions...But before this can happen, the purely mathematical exploration of the mock-modular forms and their mock-symmetries must be carried a great deal further."

1937 年, Watson[9, 11] 先后研究了 3 阶和 5 阶 mock theta 函数之间的线性关系, 他得到了

$$4\chi(q)-f(q)=3\theta_4^2(0,q^3)(q)_\infty^{-1}, \tag{1.19}$$

$$\phi_0(-q)+\chi_0(q)=2F_0(q), \tag{1.20}$$

$$\psi_0(q)-F_0(q^2)+1=q\Psi(q^2)H(q^4), \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} f_0(q)+2F_0(q^2)-2&=\phi_0(-q^2)+\psi_0(-q)\\ &=2\phi_0(-q^2)-f_0(q)\\ &=\theta_4(0,q)G(q), \end{aligned} \tag{1.22}$$

其中,

$$(a)_\infty=(a;q)_\infty:=\prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^{i-1}), \tag{1.23}$$

$$\theta_4(0,q):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}=(q)_\infty(q;q^2)_\infty=\frac{(q)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty}, \tag{1.24}$$

$$\Psi(q):=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{(q^2;q^2)_\infty^2}{(q)_\infty}==\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}, \tag{1.25}$$

$$H(q):=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m-3})(1-q^{5m-2})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(q)_n}, \tag{1.26}$$

$$G(q):=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m-4})(1-q^{5m-1})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q)_n}. \tag{1.27}$$

注: $\Psi(q)$ 是经典的 Gauss 函数, $G(q)$ 和 $H(q)$ 被称为著名的 Rogers-Ramanujan 恒等式或 Rogers-Ramanujan 函数.

1938 年, Selberg[12] 研究了 7 阶 mock theta 函数之间类似的问题, 但是很遗憾, 他没有发现它们之间的直接线性关系式, 但他找到了如下关系

$$\mathcal{F}_0(q) = \mathcal{A}(q) + \mathcal{B}(q)\phi(q) + \mathcal{C}(q), \tag{1.28}$$

其中, $\mathcal{A}(q)$、$\mathcal{B}(q)$ 是 theta 函数; $\phi(q)$ 是 3 阶 mock theta 函数; $\mathcal{C}(q)$ 在 q 径向趋向于单位根时是有界的.

1.1.3 Mock theta 函数的发展

对于 Ramanujan 发现的这类 mock theta 函数, 许多著名的数学家 [8, 9, 13] 做了大量的研究工作, 特别是对 Ramanujan 遗留的笔记本进行了整理和研究, 先后又发现了许多新的 mock theta 函数, 如其他 5 个新的 3 阶 mock theta 函数及 2 阶、6 阶、8 阶、10 阶等 mock theta 函数. 具体地讲, 有如下函数:

5 个新的 3 阶 mock theta 函数

$$\omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}^2}, \tag{1.29}$$

$$\nu(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(-q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.30}$$

$$\rho(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}(q;q^2)_{n+1}}{(q^3;q^6)_{n+1}}, \tag{1.31}$$

$$\xi(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{6n(n-1)}}{(q;q^6)_n(q^5;q^6)_n}, \tag{1.32}$$

$$\sigma(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{3n(n-1)}}{(-q;q^3)_n(-q^2;q^3)_n}. \tag{1.33}$$

3 个 2 阶 mock theta 函数

$$A(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}(-q^2;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n+1)^2}(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}^2}, \tag{1.34}$$

$$B(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n}(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}(-q^2;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}^2}, \tag{1.35}$$

$$\mu(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}(q;q^2)_n}{(-q^2;q^2)_n^2}. \tag{1.36}$$

9 个 6 阶 mock theta 函数

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}(q;q^2)_n}{(-q)_{2n}}, \tag{1.37}$$

$$\psi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{(n+1)^2}(q;q^2)_n}{(-q)_{2n+1}}, \tag{1.38}$$

$$\rho(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)/2}(-q)_n}{(q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.39}$$

$$\sigma(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)(n+2)/2}(-q)_n}{(q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.40}$$

$$\lambda(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n(q;q^2)_n}{(-q)_n}, \tag{1.41}$$

$$\mu(q)=\sum_{n=0}^{\infty}{}^{*}\frac{(-1)^n(q;q^2)_n}{(-q)_n}, \tag{1.42}$$

$$\gamma(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(q)_n}{(q^3;q^3)_n}, \tag{1.43}$$

$$\nu(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(-q;q)_{2n-1}}{(q;q^2)_n}, \tag{1.44}$$

$$\xi(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(-q;q)_{2n-2}}{(q;q^2)_n}. \tag{1.45}$$

8 个 8 阶 mock theta 函数

$$S_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(-q^2;q^2)_n}, \tag{1.46}$$

$$S_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+2)}(-q;q^2)_n}{(-q^2;q^2)_n}, \tag{1.47}$$

$$T_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)(n+2)}(-q^2;q^2)_n}{(-q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.48}$$

$$T_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}(-q^2;q^2)_n}{(-q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.49}$$

$$U_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(-q^4;q^4)_n}, \tag{1.50}$$

$$U_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)^2}(-q;q^2)_n}{(-q^2;q^4)_{n+1}}, \tag{1.51}$$

$$V_0(q)=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_n}, \tag{1.52}$$

$$V_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)^2}(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}}. \tag{1.53}$$

4 个 10 阶 mock theta 函数

$$\Phi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.54}$$

$$\Psi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}}{(q;q^2)_{n+1}}, \tag{1.55}$$

$$X(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n^2}}{(-q;q)_{2n}}, \tag{1.56}$$

$$\chi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{(n+1)^2}}{(-q;q)_{2n+1}}. \tag{1.57}$$

这些偶数阶 mock theta 函数早已被 Ramanujan 研究发现, 其相关的研究手稿和笔记本陈列在剑桥大学三一学院的图书馆里, 直到 1976 年才被 Andrews 整理发现 [3], 其中包含了 Ramanujan 对这些 mock theta 函数研究所给出的 "Mock Theta Conjectures", 而他本人并没有给出任何证明.

1988 年, Hickerson[14, 15] 先后证明了 Ramanujan 遗留的笔记本中 5 阶和 7 阶 mock theta 函数的 " Mock Theta Conjectures".

5 阶 mock theta 函数的 " Mock Theta Conjectures"

$$f_0(q)=2q^2g_3(q^2,q^{10})+\theta_4(0,q^5)G(q), \tag{1.58}$$

$$F_0(q)-1=qg_3(q,q^5)-\Psi(q^5)H(q^2), \tag{1.59}$$

$$\phi_0(-q)=-qg_3(q,q^5)+j(-q^2,q^5)G(q^2), \tag{1.60}$$

$$\Psi_0(q)=q^2g_3(q^2,q^{10})+qj(q,q^{10})H(q), \tag{1.61}$$

$$\chi_0(q)-2=3qg_3(q,q^5)-j(q^2,q^5)G(q^2), \tag{1.62}$$

$$f_1(q)=-2q^3g_3(q^4,q^{10})+\theta_4(0,q^5)H(q), \tag{1.63}$$

$$F_1(q)=qg_3(q^2,q^5)+\Psi(q^5)G(q^2), \tag{1.64}$$

$$\phi_1(-q)=q^2g_3(q^2,q^5)-qj(-q,q^5)H(q^2), \tag{1.65}$$

$$\Psi_1(q)=q^3g_3(q^4,q^{10})+j(q^3,q^{10})G(q), \tag{1.66}$$

$$\chi_1(q)=3qg_3(q^2,q^5)-j(q,q^5)H(q^2). \tag{1.67}$$

7 阶 mock theta 函数的 "Mock Theta Conjectures"

$$\mathcal{F}_0(q)-2=2qg_3(q,q^7)-j(q^3,q^7)^2(q)_\infty^{-1}, \tag{1.68}$$

$$\mathcal{F}_1(q)=2q^2g_3(q^2,q^7)+j(q,q^7)^2(q)_\infty^{-1}, \tag{1.69}$$

$$\mathcal{F}_2(q)=2q^2g_3(q^3,q^7)+j(q^2,q^7)^2(q)_\infty^{-1}. \tag{1.70}$$

其中, $H(q)$, $G(q)$ 是分别由式 (1.26) 和式 (1.27) 定义的 Rogers-Ramanujan 函数; $\Psi(q)$ 是由式 (1.25) 定义的经典 Gauss 函数; $\theta_4(0,q)$ 是由式 (1.24) 定义的; $g_3(x,q)$ 是通用的 mock theta 函数, 即

当 $|q|<1$ 且 x 既不是 0 也不是 q 的整数幂时, 有定义

$$g_3(x,q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(x;q)_{n+1}(x^{-1}q;q)_{n+1}}. \tag{1.71}$$

$j(x,q)$ 是经典的 Jacobi 三重积恒等式, 其定义为

$$j(x,q) := (x)_\infty (q/x)_\infty (q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} x^n. \tag{1.72}$$

Gordon 和 McIntosh[8] 给出了 3 阶 mock theta 函数的 " Mock Theta Conjectures"

$$f(-q) = -4qg_3(q,q^4) + \frac{(q^2,q^2)_\infty^7}{(q)_\infty^3 (q^4,q^4)_\infty^3}, \tag{1.73}$$

$$\phi(q) = -2qg_3(q,q^4) + \frac{(q^2,q^2)_\infty^7}{(q)_\infty^3 (q^4,q^4)_\infty^3}, \tag{1.74}$$

$$\Psi(q) = qg_3(q,q^4), \tag{1.75}$$

$$\chi(-q) = -qg_3(q,q^4) + \frac{(q^4,q^4)_\infty^3 (q^6,q^6)_\infty^3}{(q^2,q^2)_\infty^2 (q^3,q^3)_\infty (q^{12},q^{12})_\infty^2}, \tag{1.76}$$

$$\omega(q) = g_3(q,q^2), \tag{1.77}$$

$$\upsilon(q) = -qg_3(q^2,q^4) + \frac{(q^4,q^4)_\infty^3}{(q^2,q^2)_\infty^2}, \tag{1.78}$$

$$\rho(q) = -\frac{1}{2} g_3(q,q^2) + 3\frac{(q^6,q^6)_\infty^4}{2(q^2,q^2)_\infty (q^3,q^3)_\infty^2},$$

$$\xi(q) = 1 + 2qg_3(q,q^6) \tag{1.79}$$

$$= q^2 g_3(q^3,q^6) + \frac{(q^2,q^2)_\infty^4}{(q)_\infty^2 (q^6,q^6)_\infty}, \tag{1.80}$$

$$\sigma(-q) = q^2 g_3(q^3,q^{12}) + \frac{(q^2,q^2)_\infty^3 (q^{12},q^{12})_\infty^3}{(q)_\infty (q^4,q^4)_\infty^2 (q^6,q^6)_\infty^2}. \tag{1.81}$$

从 Ramanujan 遗留的笔记本中他自己给出的这些 mock theta 函数的 " Mock Theta Conjectures" 可以看出, 这些 mock theta 函数与 theta 函数有着密切的联系, 但又有非常特殊的性质.

如果考虑其双侧级数, 如对 5 阶 mock theta 函数

$$f_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n}, \tag{1.82}$$

可以得到下面的关系

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_{-n}}=f_0(q)+2\psi_0(q), \tag{1.83}$$

进而可得一个 theta 函数

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n}&=f_0(q)+2\psi_0(q)\\&=\frac{1}{2}[\theta_3(0,q)G(-q)+\theta_4(0,q)G(q)]+3q\Psi(q^2)H(q^4),\end{aligned} \tag{1.84}$$

其中,

$$\theta_3(0,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}=j(-q,q^2)=(-q;q^2)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty. \tag{1.85}$$

事实上, mock theta 函数与 theta 函数相比, 在单位根处可呈现出非常好的收敛性和渐进性质, 利用圆法可以给出 mock theta 函数的泰勒展开式系数的渐进表示式, 而这一工作和分拆函数有密切的联系.

若设正整数 n 的分拆函数为 $p(n)$, 可知其生成函数

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n&=1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+\cdots\\&=(q)_\infty^{-1}\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\end{aligned} \tag{1.86}$$

是一个 theta 函数.

Ramanujan[2] 和 Hardy 在早期合作的时候就发现了这一结果. 而且 Hardy 最欣赏的 Ramanujan 关于分拆函数的一个公式是 [16]

$$p(4)+p(9)+p(14)x^2+\cdots=5\frac{[(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\cdots]^5}{[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots]^6}. \tag{1.87}$$

这样利用分拆函数的生成函数, 并结合圆法就可以研究 mock theta 函数的泰勒展开式系数的渐进表示式. 之后的一段时间, 数学家又相继研究了 mock theta 函数具有的近似的模变换的性质, 给出了一些对应的结果. 然而, 在 Ramanujan 之后的八十余年中, 尽管数学家对 mock theta 函数进行了深入和系统的研究, 并试图揭示 mock theta 函数的本质属性问题, 但是都未取得实质性的进展和突破.

1.1.4　Mock theta 函数的突破

进入 21 世纪以来, 随着 Ramanujan 遗留的笔记本中的 mock theta 函数之谜被彻底揭开, mock 模形式理论得到了迅速的发展和完善. 2002 年, Zwegers[17] 在 Zagier

的指导下, 在其博士学位论文中首次将 mock theta 函数与非全纯的 Jacobi 形式、亚纯 Jacobi 形式 Fourier 系数、实解析的向量模形式建立了联系, 从而拉开了揭示它们具有的模形式的本质属性的序幕. 2004 年, Bruinier 和 Funke [18] 证明了每一个 mock theta 函数都是权为 1/2 的弱调和 Maass 形式的全纯部分. 这些深刻的理解使得 mock theta 函数理论在组合数学、数论、数学物理、椭圆曲线、密码学及表示论等方面都获得了十分广泛的应用. 这些内容在 1.2 节进行详细叙述.

尽管如此, 关于 mock theta 函数的本质定义, 许多数学家都有自己的理解与解释. 那么, 应该如何来定义 Ramanujan 发现的 mock theta 函数呢？这是研究 mock theta 函数的首要问题, 有着重要的研究价值和意义. 本书将围绕 mock theta 函数的定义这个核心问题, 对 mock theta 函数理论及与其相关的若干热点问题进行讨论和研究.

1.2 研究进展与热点问题

1.2.1 Mock theta 函数的本质定义问题

早在 1920 年, Ramanujan[2, 3] 就给出了 mock theta 函数的模糊定义.

(Ramanujan) 设 $\zeta := \mathrm{e}^{\frac{2\pi i m}{n}}$ 是一个 n 次单位根, 若 q-级数 $f(q)$ 是一个 mock theta 函数, 则其在 $|q|<1$ 时收敛且需满足:

(1) 对于每一个单位根 ζ, 存在一个与 ζ 相关的 theta 函数 $\theta_\zeta(q)$, 使得 $f(q)-\theta_\zeta(q)$ 在 q 径向趋向于 ζ 时有界.

(2) 不存在一个 theta 函数适合条件 (1) 中所有的单位根 ζ, 即对每一个 theta 函数, 必存在单位根 ζ 使得 $f(q)-\theta(q)$ 在 q 径向趋向于 ζ 时无界.

Ramanujan 断言他所列举的 17 个例子都满足他自己关于 mock theta 函数的模糊定义, 但是他当时无法证明定义中的条件 (2), 之后也未曾发现 Ramanujan 关于这一问题的任何证明. Watson[9, 11] 和 Selberg[12] 证明了 Ramanujan 模糊定义的第一部分, 即这 17 个 mock theta 函数都满足条件 (1). 1936 年, Watson[9] 就 3 阶 mock theta 函数证明了条件 (2) 的一个弱形式, 即它们都不等于同一个 theta 函数. 遗憾的是数学家仍不能证明 Ramanujan 定义的 mock theta 函数中涉及的 theta 函数的存在性问题.

那么, Ramanujan 给出的 mock theta 函数的模糊定义的真实动机是什么呢？根据 Ono [19] 后来的研究工作, 可以认为 Ramanujan 起初的思考来源于他对分拆函数和 Rogers-Ramanujan 恒等式的理解, 而 Ramanujan 后来的工作则是他对 Euler 级数具有的几乎逼近模变换性质的深刻思考.

为了说明他的这一动机, 首先介绍模形式的定义 [20, 21]、分拆函数的生成函数