

# 高等流体力学 (一)

归柯庭 钟文琪 编

Advanced Fluid  
Mechanics



科学出版社

# 高等流体力学（一）

归柯庭 钟文琪 编

科学出版社

## 内 容 简 介

本书主要围绕黏性对流体流动影响的物理本质及数学描述展开讨论.全书共六章, 主要介绍黏性流体运动的基本方程及层流运动的流动特性.

第1章介绍黏性流体流动的基本概念. 第2章讲述黏性流体力学的基本方程和黏性流体运动的基本性质. 第3章举例介绍圆管内、平行平板间和同轴旋转圆筒间这三种能够获得解析解的黏性流体的层流流动. 第4章给出在小  $Re$  数下, 黏性流体绕流小圆球蠕流流动的斯托克斯解和奥森解, 以及轴承润滑理论. 第5、6章为边界层理论的基础, 主要介绍普朗特对边界层流动的论述、层流绕流平板的布拉修斯相似性解、绕楔形体流动的弗克纳-斯肯解, 以及绕流边界层的卡门动量积分关系式解法. 湍流运动及数值模拟将在后续出版的《高等流体力学(二)》中介绍.

本书可作为高等学校能源、动力、环境、土木、机械等学科研究生的流体力学教材, 也可作为以上各专业高年级本科生选修以及相关专业研发人员和工程技术人员参考使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等流体力学. 一 / 归柯庭, 钟文琪编. —北京: 科学出版社, 2018.1  
ISBN 978-7-03-056320-0

I. ①高… II. ①归… ②钟… III. ①流体力学—高等学校—教材  
IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 008372 号

责任编辑: 昌盛 王 刚 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018 年 1 月第一次印刷 印张: 9

字数: 181 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前 言

本书是为能源、动力、环境、土木、机械等学科研究生编写的流体力学教材。同学们在本科阶段都已从“工程流体力学”等课程学习了流体力学的基础知识，了解到流体具有易流动性、黏性和可压缩性三大特性。在一些黏性作用反映不出或影响较小的场合，发展了不考虑黏性作用的理想流体力学理论，如欧拉方程和伯努利方程等，解决了除阻力特性之外的很多流体力学问题。同样，对流体压缩性影响较弱的地方，发展了不可压缩流体力学理论，解决了常压下液体的流动和气体的中低速流动问题。由于考虑黏性作用将给流体力学问题的数学处理带来很大的困难，所以“工程流体力学”等课程在必须考虑流动阻力而涉及黏性影响时，往往将黏性的作用归结为对流动阻力系数的影响，通过实验定律确定流动阻力。这样虽然也能解决很多工程中的流体力学问题，解释一些实验现象，但对问题的分析缺乏严密的数学推导，因而对其中物理本质的揭示不够深入。所以，笔者希望能为研究生提供一本建立在严密数学推导基础上的、考虑流体黏性作用的高等流体力学教材，使大家通过学习，对流体力学的问题不仅知其然，而且知其所以然，从而为后续的学习与研究打下牢固的基础，这是我们编写本书的主要出发点。

由于能源、动力、环境、土木、机械等学科研究生的研究工作较少涉及超音速流体的流动，故本书主要围绕黏性及其影响的物理本质及数学描述展开讨论。本书共六章，主要介绍黏性流体运动的基本方程及层流运动。第1章介绍黏性流体运动的一些基本概念，包括应力张量、变形率张量和广义牛顿内摩擦定律等。第2章讲述黏性流体力学的基本方程（包括连续性方程、运动方程、能量方程和状态方程）和黏性流体运动的基本性质（包括运动的有旋性、涡旋的扩散性和能量的耗散性）。第3章举例介绍圆管内、平行平板间和同轴旋转圆筒间这三种能够获得解析解的黏性流体的层流流动。第4章给出在小 $Re$ 数下，黏性流体绕流小圆球蠕流流动的斯托克斯解和奥森解及其修正，以及黏性流体在不平行平板间的流动和轴承润滑的理论。第5、6章为边界层理论的基础，主要介绍普朗特对边界层流动的论述、层流绕流平板的布拉修斯相似性解、绕楔形体流动的弗克纳-斯肯解，以及绕流边界层的卡门动量积分关系式解法。湍流运动及数值模拟将在后续出版的《高等流体力学（二）》中介绍。

本书在编写上力求数学推导与物理概念阐述之间的和谐统一。例如，第1章讲述应力张量时专门引入张量知识简介，让读者带着流体力学问题学习相关的数学知识，使两者的学习融为一体。在第5章专门列出一节，运用复变函数的保角变换，阐明绕楔形体流动的势流速度呈幂函数分布。考虑到科学的发展与人的认知具有一定的契合性，本书对若干知识点的介绍是循着这些理论的发展展开的。例如，对绕流边界层的动量积分关系式，就是通过逐一介绍卡门、波尔豪森、霍斯汀、斯韦茨等在求解边界层动量积分关系式方面所做

的工作，将对这一问题的认识逐步引向深入。这样可以让读者一方面循着这些基本理论发展的脉络学习新的知识，另一方面也可以从前人研究流体力学的方法中得到借鉴，提高自己分析问题、解决问题的能力。

限于编者水平，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2017 年 9 月

# 目 录

## 前言

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| 第 1 章 绪论                          | 1  |
| 1.1 概述                            | 1  |
| 1.1.1 理想流体与黏性流体                   | 1  |
| 1.1.2 可压缩流体与不可压缩流体                | 3  |
| 1.2 应力张量                          | 5  |
| 1.2.1 理想流体中的应力                    | 5  |
| 1.2.2 黏性流体中的应力                    | 5  |
| 1.2.3 张量知识简介                      | 6  |
| 1.2.4 应力张量                        | 11 |
| 1.3 变形率张量                         | 13 |
| 1.3.1 速度分解定理                      | 13 |
| 1.3.2 流体微团的运动分析                   | 14 |
| 1.3.3 变形率张量                       | 17 |
| 1.4 本构方程 (广义牛顿内摩擦定律)              | 18 |
| 1.4.1 牛顿内摩擦定律                     | 18 |
| 1.4.2 斯托克斯的三点假设                   | 19 |
| 1.4.3 广义牛顿内摩擦定律                   | 19 |
| 第 2 章 黏性流体力学的基本方程                 | 23 |
| 2.1 连续性方程                         | 23 |
| 2.1.1 连续性方程的导出                    | 23 |
| 2.1.2 随体导数                        | 24 |
| 2.2 运动方程                          | 26 |
| 2.2.1 用应力张量 $[\tau]$ 表示的运动方程      | 26 |
| 2.2.2 用变形率张量 $[\epsilon]$ 表示的运动方程 | 27 |
| 2.3 能量方程                          | 28 |
| 2.3.1 用总能表示的能量方程                  | 28 |
| 2.3.2 用内能表示的能量方程                  | 30 |
| 2.3.3 耗散函数                        | 30 |
| 2.3.4 用温度 $T$ 表示的能量方程             | 31 |
| 2.4 状态方程                          | 32 |
| 2.4.1 完全气体状态方程                    | 32 |

|       |                                |    |
|-------|--------------------------------|----|
| 2.4.2 | 其他热力状态参数间的关系                   | 33 |
| 2.5   | 黏性流体运动方程组的封闭性和定解条件             | 34 |
| 2.5.1 | 方程组的封闭性                        | 34 |
| 2.5.2 | 定解条件                           | 34 |
| 2.6   | 黏性流体运动的基本性质                    | 35 |
| 2.6.1 | 黏性流体运动的有旋性                     | 35 |
| 2.6.2 | 黏性流体中涡旋的扩散性                    | 36 |
| 2.6.3 | 黏性流体运动能量的耗散性                   | 39 |
| 第 3 章 | 特殊条件下的黏性流体运动方程解                | 40 |
| 3.1   | 圆管内层流                          | 40 |
| 3.1.1 | 圆管内层流流动的速度分布和流量表达式             | 40 |
| 3.1.2 | 圆管内层流流动的沿程阻力公式                 | 42 |
| 3.1.3 | 入口段与充分发展的管内流动                  | 42 |
| 3.2   | 平板间的层流                         | 43 |
| 3.2.1 | 平行平板间层流流动的微分方程和速度分布            | 43 |
| 3.2.2 | 泊肃叶流动与库埃特剪切流                   | 45 |
| 3.3   | 同轴旋转圆筒间黏性流体的定常流动               | 49 |
| 第 4 章 | 黏性流体绕固体物面的缓慢流动                 | 52 |
| 4.1   | 黏性流体绕小圆球的蠕流流动                  | 52 |
| 4.1.1 | 斯托克斯阻力系数                       | 52 |
| 4.1.2 | 奥森解及其修正                        | 56 |
| 4.2   | 颗粒在静止流体中的自由沉降                  | 59 |
| 4.3   | 流体润滑                           | 61 |
| 第 5 章 | 边界层层流流动及其相似性解                  | 64 |
| 5.1   | 边界层流动的基本概念与基本特征                | 64 |
| 5.2   | 边界层的各种厚度                       | 65 |
| 5.2.1 | 边界层的名义厚度 $\delta$              | 65 |
| 5.2.2 | 排挤厚度 (位移厚度) $\delta^*$         | 66 |
| 5.2.3 | 动量损失厚度 $\theta$                | 67 |
| 5.2.4 | $\delta, \delta^*, \theta$ 的图解 | 67 |
| 5.3   | 边界层微分方程                        | 68 |
| 5.4   | 绕曲面流动和边界层的分离                   | 71 |
| 5.4.1 | 绕曲面流动边界层的分离                    | 71 |
| 5.4.2 | 边界层分离的原因和后果                    | 74 |
| 5.4.3 | 卡门涡街                           | 75 |
| 5.5   | 层流边界层的相似性方程                    | 76 |
| 5.5.1 | 边界层相似的概念                       | 76 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 5.5.2 相似性方程 .....             | 79  |
| 5.5.3 存在相似性解的物面条件 .....       | 81  |
| 5.6 绕平板层流流动边界层方程的布拉修斯解 .....  | 88  |
| 5.6.1 布拉修斯解 .....             | 88  |
| 5.6.2 布拉修斯解的应用 .....          | 92  |
| 5.7 绕楔形体流动的弗克纳-斯肯解 .....      | 96  |
| 5.7.1 弗克纳-斯肯方程的解 .....        | 96  |
| 5.7.2 弗克纳-斯肯解的应用 .....        | 100 |
| 第 6 章 层流边界层积分关系式解法 .....      | 104 |
| 6.1 卡门边界层动量积分关系式 .....        | 104 |
| 6.2 单参数速度剖面和相容边界条件 .....      | 106 |
| 6.2.1 单参数速度剖面 .....           | 106 |
| 6.2.2 相容边界条件 .....            | 106 |
| 6.3 绕曲面流动的边界层动量积分关系式解法 .....  | 108 |
| 6.3.1 卡门-波尔豪森单参数方法 .....      | 108 |
| 6.3.2 霍斯汀的改进 .....            | 113 |
| 6.3.3 斯韦茨解法 .....             | 116 |
| 6.4 绕平板流动的边界层动量积分关系式解法 .....  | 119 |
| 参考文献 .....                    | 123 |
| 附录 常用正交坐标系中基本量和基本方程的表达式 ..... | 124 |



# 第1章 绪 论

## 1.1 概 述

### 1.1.1 理想流体与黏性流体

我们在“工程流体力学”等课程中已学过,流体有三大特性:易流动性、黏性和可压缩性。其中,易流动性,即流体是一种受任何微小剪切力作用都能发生连续变形的物质,是流体区别于固体的最本质的属性。黏性是流体的第二大属性,任何流体都具有黏性。但是,黏性的存在给流体运动的数学描述和处理带来很大困难,因此在流体的黏性作用反映不出场合,用不考虑黏性的理想流体代替黏性流体,从而可简化数学模型及其求解。黏性作用由黏性切应力 $\tau$ 反映。根据牛顿内摩擦定律

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-1)$$

式中, $\tau$ 为黏性切应力; $\mu$ 为流体的动力黏度; $\frac{du}{dy}$ 为流体运动的速度梯度。可见,黏性切应力由两个因素决定,一为流体的动力黏度,二为流体运动的速度梯度。因此,当流体处于静止状态或以相同的速度流动(即速度梯度为零)时,流体的黏性作用反映不出,此时就可用理想流体代替黏性流体。另外,对于一些动力黏度较小的流体,如水和空气,当其运动的速度梯度较小时,由于黏性的作用较弱,可将其视为理想流体处理,再对黏性的影响进行修正,使问题由繁变简。在流体力学的发展史上,不考虑黏性的理想流体力学理论最先得到发展,其中最著名的就是不可压缩理想流体的欧拉(Euler)运动方程

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho f - \nabla p \quad (1-2) \text{①}$$

式中, $\rho$ 为流体密度; $V$ 为流体的速度矢量; $f$ 为流体所受的质量力; $p$ 为流体所受压强。

在重力场中,对定常流动的欧拉运动方程沿流线积分,就可得到著名的伯努利(Bernoulli)方程

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (1-3)$$

式中, $V$ 为流体运动速度; $g$ 为重力加速度; $z$ 为高度。伯努利方程的物理意义为:不可压缩理想流体在重力场中做定常流动时,沿流线单位质量流体的动能、位势能和压强势能之和等于常数。伯努利方程的应用解决了许多流体流动的问题。但是应该看到,理想流体力学理论是建立在不考虑流体黏性基础上的。由于不考虑黏性,就出现了以下两个与事实不

---

① 详见 2.1.2 节随体导数定义。

符合的简化假定：①流体不承受流层与流层之间的切向力（即 $\tau=0$ ），只承受法向力（压力）；②在固体壁面上存在滑动。而这两个简化假定使理想流体力学理论在求解流动阻力时与实验结果不符。

考虑如图 1-1 所示的理想流体平行流绕流半径为  $R$  的圆柱体的二维流动。按理想流体理论，在极坐标中，其径向和切向速度分量分别为

$$\begin{aligned} v_r &= V_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= -V_\infty \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中， $V_\infty$  为来流速度。在圆柱体表面上， $r=R$ ， $v_r=0$ ， $v_\theta=-2V_\infty \sin \theta$ ，即径向速度为零，但切向速度除在前、后驻点（ $\theta=\pi, \theta=0$ ）处为零外，其余各点不为零，且按正弦规律分布，即壁面上存在切向滑移速度，这与黏性流体绕流圆柱体时在壁面上无滑移的实际流动情况不一致。对于二维不可压缩理想流体，可按伯努利方程求圆柱体表面上的压强分布

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (1-5)$$

式中， $p_\infty$  为来流压强。上式所示压强分布也可用量纲为一的量（简称为量纲一量）——压强系数  $C_p$  表示

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (1-6)$$

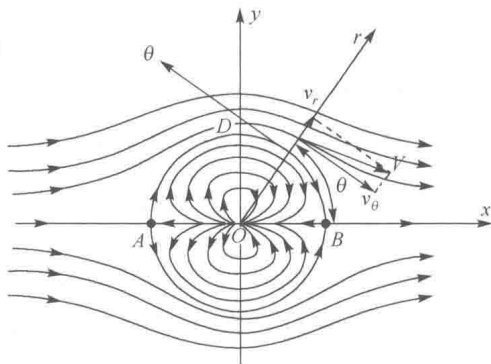


图 1-1 理想流体平行流绕流半径为  $R$  的圆柱体的二维流动

图 1-2 给出了按式 (1-6) 计算得到的理想流体的压强系数与实际测量值的比较。由图 1-2 可见，理想流体的压强系数前后对称，表明理想流体平行流绕圆柱体流动时并未受到任何阻力，这与达朗贝尔对理想流体进行一系列严谨研究后得出的结论一致，即“一个任意固体在无穷大静止的理想流体中做匀速直线运动时，在其运动方向不承受作用力”。这就是历史上著名的达朗贝尔佯谬。产生达朗贝尔佯谬的原因在于理想流体忽略了流体的黏性作用，使得按理想流体力学理论计算流动阻力时与实验结果不符。由图 1-2 可知，在圆柱的前缘（ $\theta=0, \theta=2\pi$ ）附近，理想流体的计算结果与实际符合较好，但在此外的其他各处，

两者差别较大. 对于理想流体, 圆柱前后的流动是完全对称的, 所以按理想流体力学理论求得的阻力为零. 但是, 实测的压强分布前后不对称, 圆柱后部的实测压强系数低于前部对应点处的值, 且随  $Re$  数不同而不同, 这样就使圆柱受向后作用的力, 即压差阻力. 理想流体力学理论计算不出这些阻力, 从而产生了与实验不一致的结果.

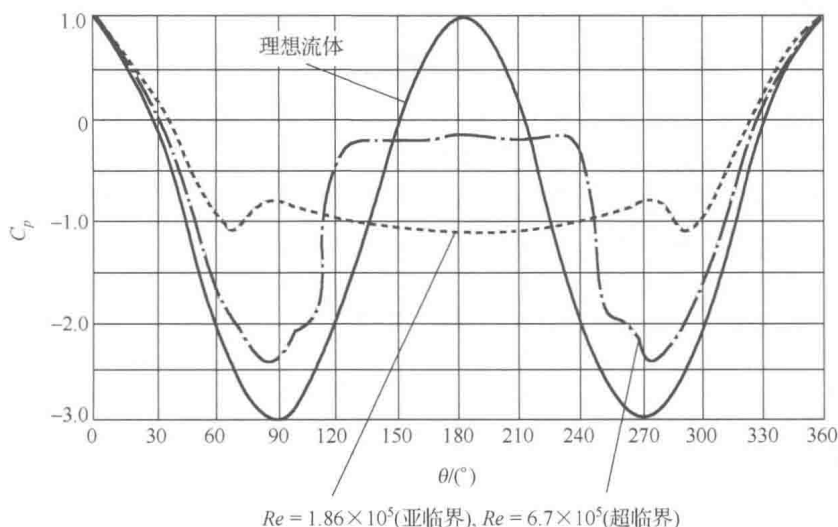


图 1-2 理想流体的压强系数与实际测量值的比较

因此, 如果要研究阻力, 就要研究壁面影响下的流体流动, 必须考虑黏性. 此时, 理想流体的两个简化假定必须抛弃, 必须承认流体既承受法向力 (压力), 也承受流层之间的切向力; 必须承认流体在固体壁面上无滑移, 即壁面处切向速度处处为零. 这样, 描写流体运动的不再是不可压缩理想流体的欧拉方程, 而是不可压缩黏性流体的纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu \Delta V \quad (1-7)$$

式中,  $\mu$  为流体的动力黏度;  $\Delta$  为拉普拉斯算符. 与式 (1-2) 欧拉方程相比, 增加了黏性项  $\mu \Delta V$ .

### 1.1.2 可压缩流体与不可压缩流体

可压缩性是流体的第三大特性. 实际中的任何流体, 无论是液体还是气体, 都是可以压缩的, 不可压缩流体并不存在. 同样为了研究方便, 人们提出了不可压缩流体的概念. 当流体受压体积不减小, 受热体积不增加, 其密度保持为常数, 这种流体称为不可压缩流体. 液体的压缩性很小, 随着压强和温度的变化, 液体的密度仅有微小的变化. 在绝大多数情况下, 可以忽略压缩性的影响, 认为液体的密度是常数. 于是通常把液体看成不可压缩流体.

气体的压缩性很大. 由热力学知, 当温度不变时, 完全气体的体积与压强成反比, 压强增加一倍, 体积减小为原来的  $1/2$ ; 当压强不变时, 温度升高  $1^\circ\text{C}$ , 体积增加  $0^\circ\text{C}$  时体积的  $1/273$ . 所以, 通常把气体看成可压缩流体, 即它的密度不能作为常数, 而是随着压强和温度的变化而变化.

在工程实际中, 是否要考虑流体的压缩性, 要视具体情况而定. 若流体密度的相对变化  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  较大, 需考虑流体的压缩性; 若流体密度的相对变化  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  较小, 则可不考虑. 在流体流动时, 这个密度相对变化值可用流速  $v$  来反映.

物质的压缩特性可用弹性模数反映, 它定义为

$$E = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta\rho}{\rho}} \quad (1-8)$$

式中,  $\Delta p$  为压强的变化量,  $\Delta\rho$  为密度的变化量.

考察同一水平面内的  $A_1, A_2$  两点,  $A_1$  点的压强为  $p_1$ , 流速为 0,  $A_2$  点的压强为  $p_2$ , 流速为  $v$ , 则根据伯努利方程, 有

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

即

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v^2$$

可见  $\Delta p$  与  $\frac{1}{2}\rho v^2$  相当, 代入式 (1-8), 可得

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\rho v^2}{E}$$

因为声速

$$C^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1-9)$$

马赫数

$$M = \frac{v}{C} \quad (1-10)$$

所以

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho}{E} \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{C} \right)^2 = \frac{1}{2} M^2$$

不可压缩流体  $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$ , 也就是  $\frac{M^2}{2} \ll 1$ . 若将  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.05$  作为是否考虑压缩性的阈值,

则可将  $\frac{1}{2} M^2 = 0.05$  作为是否考虑压缩性的分界线. 对常温下的空气,  $C=334\text{m/s}$ , 则由  $M^2 = 0.1$ , 求得  $v \approx 100\text{m/s}$ . 所以, 对空气, 当流速小于  $100\text{m/s}$  时, 可不考虑压缩性的影响; 对液体, 弹性模量大大增加, 所对应的声速大大增加. 所以, 可不考虑压缩性的流速范围也大大增加.

## 1.2 应力张量

### 1.2.1 理想流体中的应力

在工程流体力学中已经阐明,作用在静止流体单位面积上的表面力(应力)永远沿着作用面的内法线方向,而且其大小与作用面所处的方向无关,只与截面的位置有关,即一点的静压力各方向相等。

对于运动的理想流体,由于忽略黏性,所以没有切向力,只有法向力(压力),因而单位面积上的表面力(压力)垂直于作用面,而且各个方向相等。所以,对理想流体,无需特别关注应力(压力)的方向,即使考虑,也仅需考虑作用面方向即可。

### 1.2.2 黏性流体中的应力

对于黏性流体,由于存在黏性,除法向应力外,还有切向应力存在,因此单位面积上的表面力(应力)就不一定垂直于作用面,而且各个方向的大小也不一定相等。

#### 1. 应力的表示

在运动流体中选取一微元曲面  $dA$ , 若微元曲面  $dA$  是闭曲面的一部分,则取外法线方向为  $dA$  的正方向;若  $dA$  所在的曲面不封闭,则可以规定某一法线方向为正。在  $dA$  正方向的面上作用的表面应力用  $\tau_n$  表示,它表示的是微元曲面  $dA$  正方向所指流体作用在  $dA$  上的应力。同样,用  $\tau_{-n}$  表示  $dA$  负方向面上作用的表面力,即  $\tau_{-n}$  表示微元曲面  $dA$  负方向所指流体作用在  $dA$  上的应力,如图 1-3 所示。可见

$$\tau_n = \tau_{-n} \quad (1-11)$$

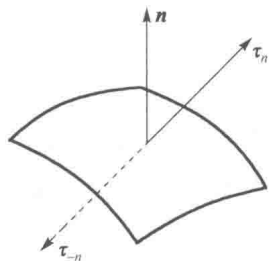


图 1-3 作用在微元面  $dA$  上的应力

#### 2. 应力分量

若应力作用面垂直于某坐标轴,则应力可以分解成三个分量。如图 1-4(b)所示,应力  $\tau_z$  的作用面的法线方向沿  $z$  轴方向,则可将  $\tau_z$  分解为三个分量:一个为垂直于作用面的法向应力  $\tau_{zz}$ , 另外两个是与作用面平行的切向应力的分量  $\tau_{zx}$  和  $\tau_{zy}$ 。可见,应力分量的第一个下标表示作用面的法线方向,第二个下标表示与应力分量平行的坐标轴,即应力投影方向。同理,若作用面法线方向沿  $x$  轴,如图 1-4(c)所示,则作用在该面上的应力用  $\tau_x$  表示,且

可分解成  $\tau_{xx}$ 、 $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{xz}$ ；若作用面法线方向沿  $y$  轴，如图 1-4(a) 所示，则作用在该面上的应力用  $\tau_y$  表示，且可分解成  $\tau_{yy}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 。我们把  $\tau_{xx}$ 、 $\tau_{yy}$ 、 $\tau_{zz}$  称为黏性流体的法向应力，简称为法向应力或正应力，把  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{zy}$  称为黏性流体的切向应力，简称切应力。

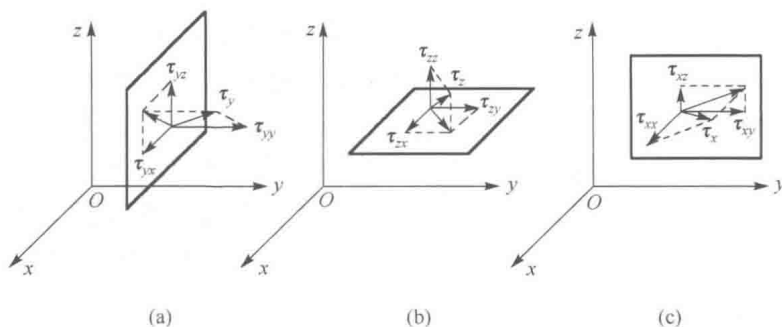


图 1-4 作用在各坐标轴面上的应力

设直角坐标系  $(x, y, z)$  三个坐标轴上的单位矢量为  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ ，则上述应力分解关系可表示成

$$\begin{aligned}\tau_x &= \tau_{xx}e_1 + \tau_{xy}e_2 + \tau_{xz}e_3 \\ \tau_y &= \tau_{yx}e_1 + \tau_{yy}e_2 + \tau_{yz}e_3 \\ \tau_z &= \tau_{zx}e_1 + \tau_{zy}e_2 + \tau_{zz}e_3\end{aligned}\quad (1-12)$$

式 (1-12) 中有 9 个分量，可以排成矩阵，如式 (1-13) 所示，称为二阶应力张量  $[\tau]$ 。

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

这样，我们就引入了一个新的量，称为张量。它和我们以前学过的矢量、标量一样，也是为了表示一定的物理量而引入的。例如，对时间  $t$ 、长度  $l$ 、面积  $A$  等量，仅需表示大小，无需表示方向，用标量表示。对速度  $v$ 、加速度  $a$ 、力  $f$  等量，既要表示大小，又要表示方向，用矢量表示。现在对应力，既要表示大小、方向，还要表示作用面的方向，矢量也不够用了，所以引入二阶张量  $[\tau]$ 。所以，黏性流体中一点的应力既有大小、方向，又与作用面方向有关，用二阶应力张量表示。

为统一起见，将既表示大小、方向，又表示作用面方向的量称为二阶张量，将矢量（表示大小、方向的量）称为一阶张量，将标量（仅表示大小的量）称为零阶张量。

### 1.2.3 张量知识简介

#### 1. 张量的基本特征

张量是一种用以表示物理量的数学工具，而物理量本身是不随坐标系的选取而变化

的, 因此, 张量的基本特征是, 当坐标轴旋转后, 表示该物理量的总量不变, 仅分量变化, 称为张量不变性.

如图 1-5 所示, 速度  $\mathbf{v}$  为矢量, 即一阶张量, 当坐标轴由  $(x_1, x_2, x_3)$  经旋转至  $(x_1^+, x_2^+, x_3^+)$  后, 速度  $\mathbf{v}$  不变, 仅分量变化, 即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{v}(u_1^+, u_2^+, u_3^+) \quad (1-14)$$

新、旧坐标系下各分量间的关系为

$$u_1^+ = L_{11^+} u_1 + L_{21^+} u_2 + L_{31^+} u_3 \quad (1-15)$$

式中,  $L_{11^+}$ 、 $L_{21^+}$ 、 $L_{31^+}$  为新旧坐标系间的转换系数, 它们与新旧坐标系间的夹角余弦有关

$$\begin{aligned} L_{11^+} &= \cos(x_1, x_1^+) \\ L_{21^+} &= \cos(x_2, x_1^+) \\ L_{31^+} &= \cos(x_3, x_1^+) \end{aligned} \quad (1-16)$$

所以, 坐标轴旋转后, 新坐标系下的分量为旧坐标系下各分量的投影量之和.

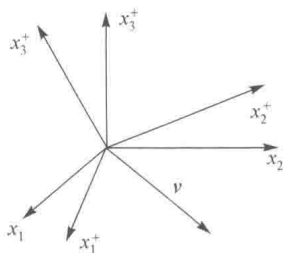


图 1-5 速度  $\mathbf{v}$  在坐标轴旋转前后的表示

用图 1-6 所示的二维情况对此作一检验. 速度  $\mathbf{v}$  为矢量, 它在旧坐标系  $(x_1, x_2)$  中的分量是  $(u_1, u_2)$ , 在新坐标系  $(x_1^+, x_2^+)$  中的分量是  $(u_1^+, u_2^+)$ , 新旧坐标系中各分量间的关系为

$$\begin{aligned} u_1^+ &= u_1 \cos(x_1, x_1^+) + u_2 \cos(x_2, x_1^+) \\ &= u_1 \cos \varphi + u_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (1-17)$$

$$\begin{aligned} u_2^+ &= u_1 \cos(x_1, x_2^+) + u_2 \cos(x_2, x_2^+) \\ &= u_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + u_2 \cos \varphi \\ &= u_1 (-\sin \varphi) + u_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (1-18)$$

可将新旧坐标系各个分量间的关系写成式 (1-19) 所示的求和形式

$$u_j^+ = \sum_{i=1}^3 u_i l_{ij^+} \quad (1-19)$$

式中, 下标  $i$  表示旧坐标系中的分量;  $\sum$  表示对旧坐标系中的分量求和;  $j^+$  表示新坐标

系中的分量. 为简化新旧坐标系各分量间关系的表述形式, 凡在类似式 (1-19) 的求和项内出现两个重复求和下标时 (仅能出现两个), 可以省掉求和符号  $\sum_{i=1}^3 (i=1,2,3)$ , 则式 (1-19) 可写成

$$u_j^+ = u_i l_{ij}^+ \quad (1-20)$$

式 (1-20) 表示

$$\begin{cases} u_1^+ = u_1 l_{11}^+ + u_2 l_{21}^+ + u_3 l_{31}^+ \\ u_2^+ = u_1 l_{12}^+ + u_2 l_{22}^+ + u_3 l_{32}^+ \\ u_3^+ = u_1 l_{13}^+ + u_2 l_{23}^+ + u_3 l_{33}^+ \end{cases} \quad (1-21)$$

将  $\mathbf{v}$  推广到任意一阶张量  $\mathbf{A}$ , 则有

$$A_j^+ = A_i l_{ij}^+ \quad (1-22)$$

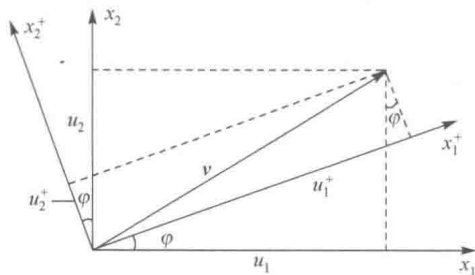


图 1-6 速度  $\mathbf{v}$  各分量在新旧坐标系中的表示

应力  $[\boldsymbol{\tau}]$  为二阶张量, 一般二阶张量用  $[\mathbf{c}]$  表示, 张量不变性同样适用于二阶张量. 若旧坐标下

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = [c_{ij}] \quad (1-23)$$

坐标系在空间旋转一个角度后, 用新坐标可表示成

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_{11}^+ & c_{12}^+ & c_{13}^+ \\ c_{21}^+ & c_{22}^+ & c_{23}^+ \\ c_{31}^+ & c_{32}^+ & c_{33}^+ \end{bmatrix} = [c_{mn}^+] \quad (1-24)$$

张量  $[\mathbf{c}]$  在坐标系旋转前后总量未变, 但各分量变化了, 分量  $c_{mn}^+$  和  $c_{ij}$  间有如下关系:

$$c_{mn}^+ = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ij} l_{im}^+ l_{jn}^+ \quad (1-25)$$

按求和约定, 式 (1-25) 可简写成

$$c_{mn}^+ = c_{ij} l_{im}^+ l_{jn}^+ \quad (1-26)$$



式中,  $l_{im^*}$ 、 $l_{jn^*}$  仍为旋转前后有关坐标轴夹角的余弦. 按重复下标求和约定, 试写一个二阶张量分量在新坐标系下的完整表达式

$$\begin{aligned} c_{12}^+ = & c_{11}l_{11^*}l_{12^*} + c_{12}l_{11^*}l_{22^*} + c_{13}l_{11^*}l_{32^*} + c_{21}l_{21^*}l_{12^*} + c_{22}l_{21^*}l_{22^*} \\ & + c_{23}l_{21^*}l_{32^*} + c_{31}l_{31^*}l_{12^*} + c_{32}l_{31^*}l_{22^*} + c_{33}l_{31^*}l_{32^*} \end{aligned} \quad (1-27)$$

式(1-26)既是新坐标系下二阶张量各个分量间的关系表达式, 也可视为二阶张量的定义式. 未指明阶数的张量即二阶张量. 一般对  $n$  阶张量共有  $3^n$  个分量, 所以二阶张量  $[c_{ij}]$  有 9 个分量, 三阶张量  $[c_{ijk}]$  有 27 个分量.

## 2. 几个特殊张量

### 1) 二阶单位张量 $\delta_{ij}$ (kronecker 符号)

定义二阶单位张量  $\delta_{ij}$  为

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (1-28)$$

或

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1-29)$$

二阶单位张量的几何意义如图 1-7 所示. 设直角坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  三个坐标轴上的单位矢量为  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ , 则二阶单位张量的几何意义为, 任意两个相异的单位矢量的点积的绝对值为零, 两个相同单位矢量的点积的绝对值为 1, 即

$$|e_1 \cdot e_2| = |e_3 \cdot e_1| = |e_2 \cdot e_3| = \cdots = 0 \quad (1-30)$$

和

$$|e_1 \cdot e_1| = |e_2 \cdot e_2| = |e_3 \cdot e_3| = 1 \quad (1-31)$$

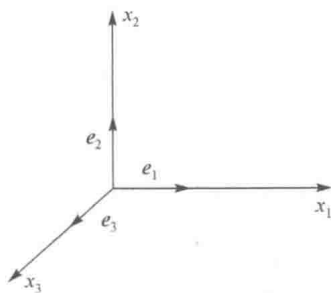


图 1-7 二阶单位张量的几何意义

上述表达式可简写成

$$\begin{cases} |e_i \cdot e_j| = 1, & i = j \\ |e_i \cdot e_j| = 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1-32)$$