俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

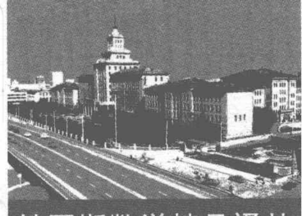
Smirnov Advanced Mathematics (Volume II (1))

斯米尔诺夫高等数学

（第二卷·第一分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著　　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学（第二卷·第一分册）

Smirnov Advanced Mathematics (Volume II (1))

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2016－040 号

内 容 简 介

本书根据1952年苏联国立技术理论书籍出版社出版的斯米尔诺夫院士的《高等数学教程》第二卷第十一版译出. 原书经苏联高等教育部确定为综合大学数理系及高等工业学院需用较高深数学的各系作为教材之用.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学. 第二卷. 第一分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著；斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 3

ISBN 978－7－5603－6522－0

Ⅰ. ①斯…　Ⅱ. ①斯…②斯…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050728 号

书名：Курс высшей математики

作者：В. И. Смирнов

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 11.5　字数 206 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6522－0
定　　价　48.00 元

原书第六版序

第二卷的这一版与以前的版本有很大的出入.以前的版本中讲复数的理论、高等代数初步及函数的积分法的整个第一章放在第一卷中了.反之,关于向量代数基础的材料由第一卷移到第二卷中来.这些材料与向量分析联合起来组成了第四章.

其余各章也进行了重大的改变,特别是第三、六、七章,同时在第三章中补充了特殊的一节,专门叙述度量的理论以及重积分的严格理论.在第六章中,有一些材料重新安排了,并且补充了关于封闭性方程的证明,这个证明根据的是维尔斯特拉斯的关于用多项式来作连续函数的近似式的定理.在第七章中补充了球面波与柱面波的传播问题以及关于波动方程的解的克希荷夫公式.常系数线性微分方程的叙述,开始时没有应用记号方法.

Г. М. 费赫金戈里茨教授看过这一版的全部原稿,并且在叙述方面给了我很多宝贵的意见,为此,我对他表示深深的谢意.

В. И. 斯米尔诺夫

1937 年 6 月 13 日

目录

常微分方程

第一章

§1 一级方程

1. 一般概念

除自变量及这些自变量的未知函数外，还含有未知函数的微商或微分的方程，叫作微分方程[Ⅰ,51]. 若在一个微分方程中出现的函数只依赖于一个自变量，则这方程叫作常微分方程. 若在一个方程中出现有未知函数对几个自变量的偏微商，则这方程叫作偏微分方程. 在这一章中我们将只考虑常微分方程，并且大部分专讲含有一个未知函数的一个方程的情形.

设 x 是自变量，y 是 x 的未知函数. 微分方程的一般形状是

$$\Phi(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

在方程中出现的各级微商的最高级数 n，叫作这微分方程的级. 在这一节中我们考虑一级常微分方程. 这种方程的一般形状是

$$\Phi(x,y,y')=0 \tag{1}$$

或者，写成解出 y' 的形式

$$y'=f(x,y) \tag{2}$$

若某一函数

$$y=\varphi(x) \tag{3}$$

适合一个微分方程,就是说,当用 $\varphi(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 代入作 y 及 y' 时,这方程成为恒等式,则函数 $\varphi(x)$ 叫作这个微分方程的解.

微分方程的解的求法有时叫作微分方程的积分法.

若把 x 与 y 看作平面上点的坐标,则微分方程(1)(或(2))表示出某一曲线上点的坐标与这曲线在该点的切线的斜率之间的关系.微分方程的解(3),就对应于这样一条曲线,这曲线上的点的坐标与切线的斜率适合该微分方程.这样的曲线叫作所给定的微分方程的积分曲线.

最简单的情形,是当方程(2)的右边不含有 y 时,就得到下面形状的微分方程

$$y' = f(x)$$

这个方程的解的求法就是积分学中的基本问题[Ⅰ,86],于是公式

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

给出全部的解,其中 C 是任意常数.如此,在这最简单的情形下,我们得到微分方程的解,它含有任意常数.我们将看到,一般的一级微分方程,也会有含有一个任意常数的解,这样的解叫作方程的一般积分.给任意常数以不同的数值,就得到方程的不同的解——这样的解叫作方程的特殊解.

以下几段中,我们讲几种特殊形态的一级方程,它们的积分法可以化为不定积分的计算,或者说,它们的积分法可以化为求面积法.①

2. 可分离变量的方程

在微分方程(2)中,用 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 替代 y',两边用 $\mathrm{d}x$ 乘,再把所有的项都移到左边来,就可以把它化为下面的形状

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

在某些情形下,写成这样是比较方便的.这时,两个变量 x 与 y 在方程中具有同样的地位,因为方程(4)没有规定出我们该选择哪一个作为未知函数.于是我们可以取 y,也可以取 x,作为未知函数.

设函数 $M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 中每一个都可以分解为两个因子之积,而这两个因子中,一个只依赖于 x,另一个只依赖于 y

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5}$$

用 $M_2(y)N_1(x)$ 除这方程的两边,就化为下面的形状

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y = 0 \tag{6}$$

---

① 积分的计算与面积的计算有直接的联系,由此引出"求面积法"这个名词.

于是 dx 的系数只依赖于 x，dy 的系数只依赖于 y. 方程 (5) 叫作可分离变量的方程[Ⅰ,93]，化为形状(6) 的方法叫作分离变量法.

方程 (6) 的左边是表达式

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy$$

的微分，而这表达式的微分等于零就相当于这表达式等于任意一个常数

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C \tag{7}$$

其中 C 是任意常数. 这个公式给出了无穷多个解；就几何意义来说，它表示出积分曲线族的隐式方程，若计算出方程(7) 中的积分，再解出 y，就得到积分曲线族(微分方程的解) 的显示方程

$$y = \varphi(x, C)$$

例　介于横坐标轴，曲线弧 AM 以及纵坐标 MN 之间的面积 $OAMN$(图 1)，与同底 $ON = x$，高为 η 的矩形 $OBCN$ 的面积相等

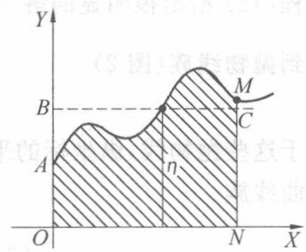


图 1

$$\int_0^x y dx = x\eta, \eta = \frac{1}{x}\int_0^x y dx \tag{8}$$

η 叫作曲线的纵坐标在区间$(0, x)$ 上的平均值.

我们求些曲线，让它们的纵坐标的平均值与极端坐标 NM 成正比. 以公式 (8) 为基础，就有

$$\int_0^x y dx = kxy \tag{9}$$

其中 k 是比例系数. 由方程(9) 逐项求微商，就得到微分方程

$$y = ky + kxy' \text{ 或 } xy' = ay \tag{10}$$

其中

$$a = \frac{1-k}{k} \tag{11}$$

求微商时，我们可能引入一些外加的解；因为由微商相等所推出的函数，可能差有常数项. 不过在上述的情形下，并没有外加的解. 实际上，方程(10) 是由方程(9) 逐项求微商得到的，于是由方程(10) 推出的结果，只可能使得方程(9) 的两边差一个常数项. 但是直接可以看出，当 $x=0$ 时，两边都等于零，于是所说的常数项也得等于零，就是说，方程(10) 的任何一个解都是方程(9) 的解 . 现在来求方程(10) 的积分. 它可以写成

$$x\frac{dy}{dx} = ay$$

再分离变量

$$\frac{dy}{y}=a\frac{dx}{x}$$

求积分，得到

$$\lg y=a\lg x+C_1 \text{ 或 } y=Cx^a \tag{12}$$

其中 $C=e^{C_1}$ 是任意常数.

依照公式(11)，当 k 由 0 增加到 $+\infty$ 时，a 就由 $+\infty$ 减小到 -1；因此，我们应当算作 $a>-1$，以使得方程(9)左边的积分总有意义. 当 $k=1$ 时，$a=0$，于是方程(12)给出很明显的解——平行于 OX 轴的直线族. 当 $k=\frac{1}{3}$ 时，$a=2$，就得到抛物线族(图 2)

$$y=Cx^2$$

对于这些抛物线，纵坐标的平均值等于其极端坐标的三分之一. 当 $k=2$ 时，得到曲线族

$$y=\frac{C}{\sqrt{x}}$$

这些曲线的纵坐标的平均值等于其极端坐标的二倍(图 3).

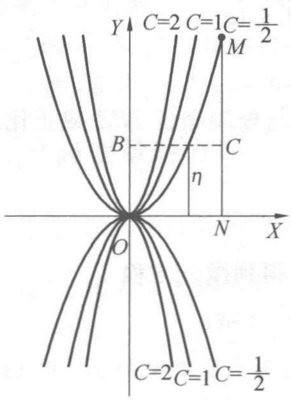


图 2

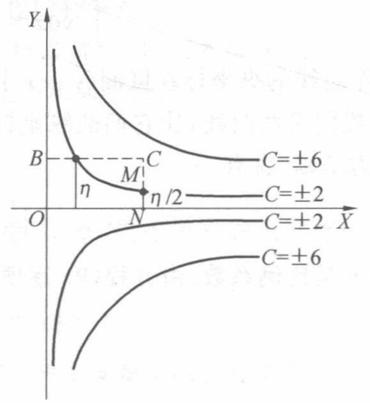


图 3

3. 齐次方程

下面形状的方程叫作齐次方程

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)\text{①} \tag{13}$$

保留原来的自变量 x,引入新的函数 u 以替代 y

$$y=xu\text{,由此 }y'=u+xu' \tag{14}$$

变换方程(13),得到

$$u+xu'=f(u)\text{ 或 }x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}u}{u-f(u)}=0$$

用 $\psi_1(u)$ 记 $\mathrm{d}u$ 的系数,就得到

$$\lg x+\int\psi_1(u)\mathrm{d}u=C_1$$

由此

$$x=C\mathrm{e}^{-\int\psi_1(u)\mathrm{d}u}\text{ 或 }x=C\psi(u)$$

其中 $C=\mathrm{e}^{C_1}$ 是任意常数.

代回原来的变量 y,积分曲线族的方程可以写成

$$x=C\psi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{15}$$

考虑以坐标原点为相似中心的相似变换.这样的变换使得点(x,y) 变到新的位置

$$x_1=kx\text{,}y_1=ky\quad(k>0) \tag{16}$$

或者说,它使得平面上的点的向量半径的长乘上 k 倍,而方向不变.若一点原来的位置是 M,经过变换后的位置是 M_1,则(图 4)

$$\overline{OM_1}:\overline{OM}=x_1:x=y_1:y=k$$

把变换(16) 施用于方程 (15),就得到

$$x_1=kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \tag{17}$$

由于 C 是任意常数,这个方程与方程(15) 并无区别,就是说,变换 (16) 并没有改变曲线族(15) 的整体,只不过把曲线族(15) 中的一条变到同一曲线族的另一条而已.显然,曲线族(15) 中任何一条曲线,可以由这族中一条固定的曲线通过变换(16) 得到,只需适当地选择常数 k 就成了.所得到的结果可以写成:借

① 注意,二元函数 $\varphi(x,y)$ 若只是比 $\frac{y}{x}$ 的函数,必须且仅须,当 x 与 y 同乘以任意乘数 t 时,函数 $\varphi(x,y)$ 的值不变,就是 $\varphi(tx,ty)=\varphi(x,y)$.这个条件相当于 $\varphi(x,y)$ 是 x 与 y 的零次齐次函数[Ⅰ,151].

助于以坐标原点为相似中心的相似变换，齐次方程的所有的积分曲线，都可以由一条积分曲线得到.

方程 (13) 又可以写成

$$\tan\alpha = f(\tan\theta)$$

其中 $\tan\alpha$ 是切线的斜率，θ 是由坐标原点作出的向量半径与正向 OX 轴的交角，如此，方程(13) 建立了 α 角与 θ 角之间的关系，所以，沿着过原点的任何一条直线，齐次方程的各积分曲线的切线应当是互相平行的(图 4).

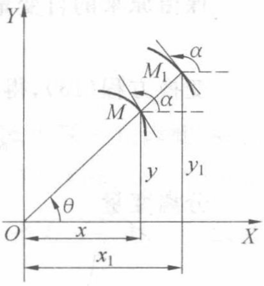


图 4

由于切线的这个性质，使得以原点为中心的相似变换把一条积分曲线仍变到一条积分曲线这件事更明显了；因为，当曲线上的点的向量半径以相同的比例伸长或缩短时，每一个向量半径上的切线的方向不变(图 5).

当积分曲线是通过坐标原点的直线时，若我们施用上述的相似变换，则变换后所得到的仍是原来的直线，所以，在这种情形下，上述由一条积分曲线得到其他积分曲线的方法，是不适用的.

例　求曲线，使得：由切线与 OX 轴的交点 T 到切点 M 的线段 MT 等于 OX 轴上的截距 OT(图 6).

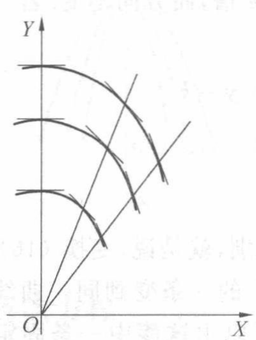


图 5

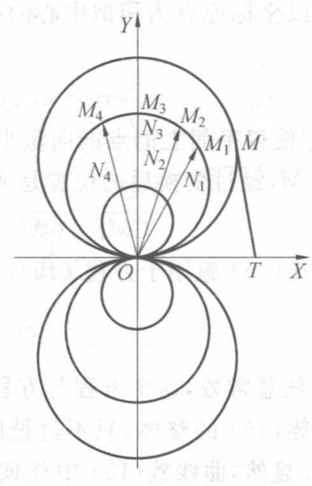


图 6

切线的方程是

$$Y - y = y'(X - x)$$

其中(X,Y) 是切线上动点的坐标，让 $Y=0$，就得到切线在 OX 轴上的截距

$$\overline{OT}=x-\frac{y}{y'}$$

再由条件$\overline{MT}^2=\overline{OT}^2$,就得到[Ⅰ,77]

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2$$

由此得到微分方程

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} \tag{18}$$

这显然是个齐次方程.

依照下面的公式,引入新函数 u 以替代 y

$$y=xu,y'=xu'+u$$

代入到方程中,就有

$$xu'+u=\frac{2u}{1-u^2} \text{ 或 } x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{u+u^3}{1-u^2}=0 \tag{19}$$

再分离变量

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{1+u^2}{u+u^3}\mathrm{d}u=0 \tag{20}$$

求积分,就得到

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C$$

再代回原来的变量 y

$$x^2+y^2-Cy=0 \tag{21}$$

就是说,未知曲线是通过坐标原点且在这点与 OX 轴相切的圆(图 6).

由方程(19)变到方程(20)时,我们把方程的两边用 $u+u^3$ 去除,这可能失去一个解 $u=0$,也就是 $y=0$. 把它代入到原方程(18)中,我们看出它确是这方程的一个解. 不过公式(21)也包含有这个解. 只需把公式(21)的两边用 C 除,再设 $C=\infty$,就得到它了.

利用以坐标原点为相似中心的相似变换,圆族(21)中的每个圆可以由其中一个圆得到,所以(图 6)

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{ON_1}}=\frac{\overline{OM_2}}{\overline{ON_2}}=\frac{\overline{OM_3}}{\overline{ON_3}}=\cdots$$

我们现在讲,微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{22}$$

可以化为齐次方程. 引用新变量 ξ 与 η 来替代 x 与 y

$$x=\xi+\alpha,y=\eta+\beta \tag{23}$$

其中 α 与 β 是我们现在要确定的常数.

代入新变量到方程(22)中,就得到

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right)$$

我们由下面两个条件来确定 α 与 β

$$a\alpha+b\beta+c=0,a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$

这样,方程就化为齐次的了

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left[\frac{a+b\dfrac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\dfrac{\eta}{\xi}}\right]$$

变换(23)相当于坐标轴的平移,这时,坐标原点变到下面两条直线的交点

$$ax+by+c=0 \text{ 与 } a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{24}$$

如此,以前所得到的结果也适用于方程(22),所不同的,只是点(α,β)起了坐标原点的作用.

若直线(24)互相平行,则上述的变换就做不成了.但是在这情形下,由解析几何学知道,方程(24)的系数应当成比例

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda \text{ 于是 } a_1x+b_1y=\lambda(ax+by)$$

引用新变量 u 以替代 y

$$u=ax+by$$

不难看出,这样就得到可分离变量的方程.

以后我们要讲齐次方程在流体力学中的重要应用.

4. 线性方程及伯努利方程

下面形状的方程叫作一级线性方程

$$y'+P(x)y+Q(x)=0 \tag{25}$$

先考虑对应的没有自由项 $Q(x)$ 的方程

$$z'+P(x)z=0$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}+P(x)\mathrm{d}x=0$$

就得到

$$z=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{26}$$

为要解给定的线性方程(25),我们应用改变任意常数法,就是设这方程的解具有类似于(26)中的 z 的形式

$$y=u\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{27}$$

其中 u 不是常数，而是 x 的一个未知函数.求微商，就引出

$$y'=u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-P(x)u\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

代入到方程(25) 中，得到

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+Q(x)=0$$

$$u'=-Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

由此

$$u=C-\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

最后，依照等式(27)，就得到

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[C-\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \tag{28}$$

由这个公式确定 y 时，对于不定积分

$$\int P(x)\mathrm{d}x \text{ 与} \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

只需任取一个值就成了，因为它们加上任意常数，只不过改变 C 的值而已.

用上限为变量的定积分[Ⅰ,96]，来替代上面两个不定积分，公式(28) 就可以写成

$$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\left[C-\int_{x_0}^{x}Q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \tag{29}$$

其中 x_0 是任意选定的一个数.当变上限代入以值 $x=x_0$ 时，上式右边就等于 C，因为上下限相同的积分等于零，就是说公式(29) 中的常数 C 是当 $x=x_0$ 时函数 y 的值.我们把这个值记作 y_0，叫作解的初值.

为了表示这种情况，我们写成

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \tag{30}$$

如此，若给定了当 $x=x_0$ 时未知解的初值，则公式(29) 给出方程的完全确定的解

$$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\left[y_0-\int_{x_0}^{x}Q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \tag{31}$$

条件(30) 叫作初始条件，从几何观点来看，这就相当于所求的积分曲线要通过给定的点(x_0,y_0).

若设 $Q(x)\equiv 0$，就得到齐次方程

$$y'+P(x)y=0$$

的适合于条件(30) 的解

$$y=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x} \tag{31_1}$$

由公式(29) 推知，线性微分方程的解有下面的形状

$$y=\varphi_1(x)C+\varphi_2(x) \tag{32}$$

就是说，y 是任意常数的线性函数.

设 y_1 是方程(25) 的解，令

$$y=y_1+z$$

就得到关于 z 的方程

$$z'+P(x)z+[y'_1+P(x)y_1+Q(x)]=0$$

因为假设了 y_1 是方程(25) 的解，所以方括号以内的和等于零. 于是推知，z 是对应的没有自由项的方程的解，它是由公式(26) 所确定的，所以

$$y=y_1+Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{33}$$

现在设已知方程(25) 的另一个解 y_2，并设它是当 $C=a$ 时由公式(33) 得到的

$$y_2=y_1+ae^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{34}$$

由等式(33) 与(34) 消去 $e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，就得到通过两个解 y_1 与 y_2 来表达这个线性方程的解的公式

$$y=y_1+C_1(y_2-y_1) \tag{35}$$

其中 C_1 是任意常数，它替代了以上的 $\frac{C}{a}$. 由方程(35) 推出下面的关系式

$$\frac{y_2-y}{y-y_1}=\frac{1-C_1}{C_1}=C_2 \tag{36}$$

这表明了，比 $\frac{y_2-y}{y-y_1}$ 是个常量，就是说，线性方程的积分曲线族是这样一个曲线族，其中任何一条曲线，把介于这族中任意两条曲线之间的纵坐标线段分为定比.

如此，若已知线性方程的两个积分曲线 L_1 与 L_2，则任何一条其他的积分曲线，可以利用比(图 7)

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_1A}}=\frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_1B}}=\frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_1C}}=\frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_1D}}=\cdots$$

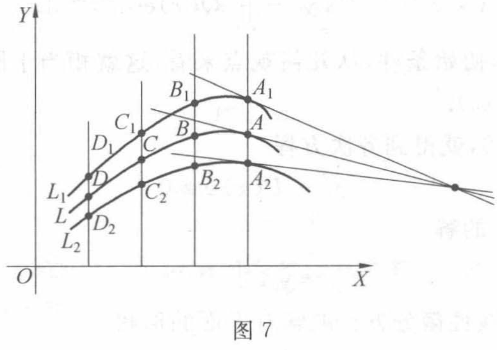


图 7

的常数值确定出来.

根据上面的等式,弦 A_1B_1,AB 与 A_2B_2 应当是,或者交于一点,或者互相平行,当纵坐标线段 $\overline{B_1B_2}$ 无限逼近于线段 $\overline{A_1A_2}$ 时,这些弦的方向变为各曲线在 A_1,A,A_2 点的切线方向,于是我们得到下面关于线性方程的积分曲线的切线的性质:在线性方程的积分曲线与一条平行于 OY 轴的直线的交点处,各曲线的切线或者互相平行,或者交于一点.

例 1 考虑有自感的电路中,变动电流的暂态过程.设 i 记电流强度,v 记电压,R 记电路的电阻,L 记自感系数.

我们有关系式

$$v = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由此得到关于 i 的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i - \frac{v}{L} = 0$$

算作 R 与 L 是常量,v 是时间 t 的已知函数,计算公式(31)中出现的积分

$$\int_0^t P\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t = \frac{R}{L}t, \int_0^t Q\mathrm{e}^{\int_0^t P\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{L}\int_0^t v\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t$$

用 i_0 记 i 的初值,就是当 $t=0$ 时电流强度的值,依照(31),我们得到在任何时刻确定 i 的公式

$$i = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t\right)$$

当电压 v 是常量时,就有

$$i = \left(i_0 - \frac{v}{R}\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{v}{R}$$

当 t 增加时,因子 $\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ 很快地减小,实际上,经过很短的时间后,可以算作处于稳定过程,而电流强度就由欧姆定律 $i = \frac{v}{R}$ 来确定.

特别是,当 $i_0 = 0$ 时,得到公式

$$i = \frac{v}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}) \tag{37}$$

它表示接通电路时的电流强度.让 $v=0$,就得到断开电路时电流消失的公式

$$i = i_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

常量 $\frac{L}{R}$ 叫作所考虑的电路的时间常量.

考虑电压 v 是正弦性的情形,$v = A\sin \omega t$.依照公式(31),得到

$$i = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left[i_0 + \frac{A}{L}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin \omega t\,\mathrm{d}t\right]$$