中国科协 教育部 “英才计划” 项目

SHUXUE ZHIWAI YU SHUXUE ZHINEI II

数学之外与数学之内Ⅱ

田 刚 吴宗敏 主编

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

数学之外与数学之内II

中国科协 教育部 “英才计划”项目

SHUXUE ZHIWAI YU SHUXUE ZHINEI II

数学之外与数学之内Ⅱ

田刚 吴宗敏 主编

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学之外与数学之内.Ⅱ/田刚,吴宗敏主编.—上海:复旦大学出版社,2017.9
中国科协-教育部"英才计划"项目
ISBN 978-7-309-13229-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①田…②吴… Ⅲ.中学数学课-教学研究 Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第214650号

数学之外与数学之内.Ⅱ
田 刚 吴宗敏 主编
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143 出版部电话:86-21-65642845
江苏省句容市排印厂

开本890×1240 1/32 印张6.25 字数154千
2017年9月第1版第1次印刷

ISBN 978-7-309-13229-8/G·1761
定价:20.00元

内容提要

数学之外是指数学从哪里来？数学又要到哪里去？数学之内就是要回答数学是什么？是指数学学科内部各学科方向之间的关联与侧重，以及数学学科内部的关键问题。

本书为中国科学技术协会和教育部“英才计划”数学工作委员会编辑的科普类读物，是“英才计划”数学工作委员会在多次调研的基础上，听取了参加“英才计划”的学生及教师的建议，邀请工作委员会的成员及部分特邀著名高校的教授撰写的。与中学数学那样按部就班地灌输知识不同，本书是作者按照自己的思路，想写什么就写什么，其目的是提出并讨论数学的对外联系及数学的根本问题，将数学教育从答题、知识点教育扩展到问题来源及应用前景的分析与展望；特别是对数学根本问题的探索与讨论，从中学开始了解解决根本问题的思想和方法，以提高学生的创新能力以及对数学根本问题的兴趣与好奇心。

传统的中学数学教育的特征是配方式的“细粮饲料”、填鸭式的喂养灌输，缺少“粗粮”与“杂粮”。本书只是数学学习生活的调料，以增加新思想的味道；只是餐余，以增加产生新思想的肥料，其特征就是——杂。希望这本书可以给吃惯“细粮”的同学，品尝一点“粗粮”“杂粮”，以补充中学数学学习的营养单一性，让读者自己去发现它们之间的关系。

前 言

数学之外是指数学是从哪儿来的？数学又要到哪里去？

数学之内就是要回答数学是什么？是指数学学科内部各学科方向之间的关联与侧重，以及数学学科内部的关键问题。

这些都是数学的根本问题，当然这本小书也不可能回答全部的这类问题，有的可能永远都找不到答案，因为问题以及答案本身都是与时俱进的。但是，问问题比找答案更重要，找答案的过程比答案本身更重要。对问题的探索过程实际上就是人类对世界认识的发展过程，就是人类思维的发展过程。对于数学，与其他学科不同的是，它还要解决对问题探索的科学规范问题，也就是对找问题答案过程的科学规范。一句话，就是理性的、严密的、系统的逻辑规范。

学数学已经超过 50 年了，研究数学也已经超过 30 年。经常有人问我“什么是数学？”“什么是数学的基本问题？”这也正是我一直在问我自己的问题。很多人认为，希尔伯特 23 个问题，千禧年问题，谁谁的猜想，是数学的根本问题。我的回答是：不错！但这些只是数学现时的内部问题，而有些内部问题可以说在数学内部已经是不可能解决的了。

我认为数学与哲学、宗教及其他科学类别一样，如同本文的开

篇，最基本的问题都是要回答：世界是什么？我们从哪里来？要到哪里去？事实上，这也是任何学科的根本问题。不过，有些学科更加具体，如物理研究力是什么？磁场是什么？化学研究碳是什么？水是什么？它们会变成什么？是钻石还是煤炭？是不可燃烧的液体，还是可以燃烧的两种气体？爱因斯坦从小到大的兴趣就是想知道：光是什么，光速是什么？光是从哪儿来的？莫奈放弃了银行家的工作，就是想问：绘画究竟是要干什么？究竟要表现什么？这些基本问题永远不会脱离：这种东西（对象）是什么？它们从哪里来的？又会到哪里去？任何科学问题、任何社会问题，甚至任何问题，都可以简单表述为：这是什么？它们怎么会是这样的？又会变成什么样的？这好像也是任何一个小孩刚懂事时经常问的问题。可见，每个人都是带着佛心而来，而是被家长的“哪有那么多的为什么”、老师的“这么简单的问题，你都不懂啊”给埋没了。所以，保持童真，保持好奇心，保持喜欢问为什么，是孩提时期想着将来要成为数学家，想着将来要成为科学家，甚至想着将来要干成任何大事业者的基本素养，而且是本质的素养。事实上，想要成为大数学家、大科学家、大学问家，往往取决于你能不能不受外界的干扰而保持这份童真的时间长度。我认识一些老科学家，就发现他们有一些共性，就是对任何新事物都有极强的好奇心、极强的求知欲、极其风趣幽默。从另一种角度看，他们到老了还一直是贪玩的老小孩、老顽童。不过他们不是被玩具所左右，而是玩出与别人不一样的名堂来。我的孩子就问过我：你每天研究数学有什么乐趣？我的回答是，“你喜欢玩电子游戏吧？你喜欢在玩电子游戏中比别人先通过一些关卡吧？如果你是世界上第一个通过这个别人通不了的关卡，你会有什么感觉？”希望有这么一本书，是参加“英才计划”的学生们提出来的。大家都在批评应试教育，大家都看到应试教育扼杀了创新能力。原因很简单，就是应试教育告诉你，你只要学，你只要记，你只要记住解题的步骤。你不用

去问，这题是从哪儿来的？解了这题有什么用？人变成了知识的存储器，但人脑的存储量还比不过一个 U 盘。我们都知道，如果高考允许上网，那么一个学会了网上查询的操作员，肯定也可以得到高分。这样，就永远也培养不出一个思想家，数学也就退化成为算术了。

既然数学与其他学科一样，要解决一样的问题，那么数学有什么特别之处呢？数学则要超越这种具体对象的具体问题，而且更加抽象，更加着重于研究过程的逻辑性、系统性与演绎性。不是只凭印象，不是只凭臆测，不是只凭经验。数学需要将经验提升为普遍适用的理论，并且要指出这种理论结果的适用范围。更加重要的是，通过数学之内的矛盾可以演绎到数学之外。数学的研究论文一般都是从假设开始的，如果怎样，那么就会怎样。即使是猜测也要告诉别人，这个猜测的可信度是多少。

许多人认为搞文科的一般数学差些，而搞数学的一般文科差些。我认为这是非常不全面的。我认识许多大数学家，他们都是多才多能的。许多孩子都读过《爱丽丝漫游奇境记》吧，而其著者就是一位数学家。苏步青先生爱写诗，王元先生爱书法。一些大数学家、一些数学教育大家往往同时是理科教育要强化文科，是搞通识教育的积极倡导者。复旦大学的李大潜院士就说过：“一个好的数学家都是带有几分诗人气质的。”什么叫诗人气质，诗人气质就是不受羁绊，就是自由思想，就是要把自己的灵魂放飞到天外去看世界。是的，数学有许多规则，解数学题有许多套路，但是你如果被规则与套路索缚，那么就不可能做出超越前人的研究工作。如果你是套路的高手，那么你可能成为能工巧匠，可以成为一个好会计，甚至是好的金融家，但不可能成为数学思想家。李大潜院士在《光明日报》倡导“中学数学教育应注重人文内涵”，认为数学教育的根本是要让学生明白：(1)数学知识的来龙去脉；(2)数学的精神实质与思想方法；(3)数学

的人文内涵。王元院士也认为“所谓创新，一定是前人没有想到的，没有做到的”，他曾在《光明日报》发表题为《靠老师手把手地教，一定教不出创新人才》的文章，建议读者可以去读一下，会有很大的启发。

在我的研究生教学生活中，很多学生会要求我给他们一个研究问题，然后过了一段时间会问我怎么解这个问题。有些学生到了研究生阶段了，基本上还是如同在中学阶段，只会做习题。简单来说，缺乏创新的能力。所以对新进的研究生我总是会告诉他们：最顶尖的科学家是自己发现、提出问题，并且自己解决问题。一个顶尖科学家首先是能够发现和提出问题，其次才是找到解决问题的途径。解决先人提出的著名问题，固然很好，但更重要的是在解决先人著名问题的同时，能提出新的问题。而有些关键的问题是应该从小就开始问了。通常基础的问题、从基础问起的问题，才是关键的问题、颠覆性的问题，真正创新的问题。爱因斯坦从小就喜欢光线，可以长时间地看着太阳，问自己：“什么是光?”黎曼、罗巴切夫斯基就是一直问自己：“数学的公理基础是什么?”

由于工作的关系，经常有人找我，说解决了诸如三等分角的问题，文章只有 3 页纸，希望我推荐发表，当然最终目标是帮助他们出名。这个问题在数学上是已经解决了的问题，答案是不可能用圆规直尺三等分任何给定的角。当然其背后是一整套的伽罗瓦理论。数学上证明解的不存在性是更为困难的问题，而这也是数学的魅力所在。我就告诉他们：三等分角问题为什么会有名的原因，正是背后的伽罗瓦理论；如果三等分角问题可以用 3 页纸解决，就比两等分角稍微难一点，那么，这个问题根本就不会那么著名了。谁会记得：是谁第一个用圆规直尺做出两等分角的人？不是三等分角问题使得伽罗瓦出了名，而是伽罗瓦使得三等分角问题出了名。

现在是一个创新的年代，可能大家会认为，数学，特别是中学的数学，或者可以到大学的高等数学范畴，已经没有什么可以创新的

了。中学数学已经经过了几千年的发展，又经过几百年的系统化、现代化，用高等数学的语言说，已经是完备的了。事实果真如此吗？在教授中学数学时只需要灌输，只是教师灌输的水平不同吗？怎么在教授中学数学的同时培养学生的质疑精神——这一科学的基本精神呢？只要看数学的发展！如果中学数学已经完备了，那么大学数学又是从哪儿来的？现代数学呢？伟大的数学家希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）在第二届国际数学家大会上曾经做过一个著名的报告，提出了23个问题，并且认为这是数学的可以说全部的剩余问题。他在报告的结束语中说，如果我们足够聪敏，可能可以在100年内解决所有这些问题。现在100年过去了，离开这些问题的全部解决还遥遥无期。事实上，在希尔伯特提出23个问题后4年，在第三届国际数学家大会上，另一位伟大的数学家——哥德尔（Kurt Godel，1906—1978），就用数学证明了“任何系统都不可能是封闭的”，而且它的根本问题往往在其根本上。在中学教授学生数学，这没有什么可以质疑的，学生只要记住就行，不可能跑出数学之外。但对基础数学问题的深入研究也一定会引出新的数学问题，一定会跑出数学之外，成为数学的新的学科生长点。事实上，数学的这种内部的矛盾在数学产生时就已经写在数学的DNA中了，是与生俱来的。我们就是应该从数学的产生开始质疑。

数学到现在已经是一个庞大的系统。从另一方面看，它由两部分组成。一部分是数学知识、一部分是数学文化。课堂里教的是数学知识，但并不是知识越多就越有文化。文化是需要去体验、去发掘、去融入的。

为了给沉闷的灌输式的中学数学教育加一点“调料”，在参加“英才计划”的学生及导师的建议下，我们有了编写这么一本书的想法，于是，邀请了一些大学的数学老师，编写这么一本题为《数学之外与数学之内》的书。与中学数学那样按部就班地灌输知识不同，著者想

写什么就写什么，可以写数学之内的知识，也可以写数学之外的管窥。传统的中学数学教育的特征是配方式的“细粮饲料”，填鸭式的喂养灌输，缺少“粗粮”与“杂粮”。这本书只是“调料”，以增加新思想的“味道”；只是“餐余”，以增加产生新思想的“肥料”，特征就是——杂。希望这本书可以给吃惯“细粮”的同学品尝一点“粗粮、杂粮”，以补充营养的单一性。书中的文章是按文章题目顺序编排，以让读者自己去发现它们之间的关系。我一直认为，我们现在的数学课本编写得太好了；哪里是重点，哪里是小结，剥夺了学生自己找出内容的主题和关联性的训练。我在刚进大学时，老师教我的就是：读懂一本书就是能把厚书读薄的能力，简单地说，就是自己去整理出脉络，列出提纲，找到主题。读完一本书就是要问自己：如果现在把这本书烧掉，你是否能够再把它写出来？我说的是写出来而不是背出来。因为背出来所需要的存储记忆的容量只需一个U盘就可以了，在这方面，U盘比人的大脑能干得多；不是逐字逐句的重现，而是思想的重现。作为前言，好像已经讲得太多了，而且现在很多人已经很少看书了，即使看书也很少看前言，所以就写这些，希望还是会有有心人从中获得一些什么东西。如果你读完了前言，那么你就是这样的有心人，一定会从本书中获得你想要的东西。

复旦大学数学科学学院　吴宗敏

目 录

前言 …… 1

$\sqrt{2}$的计算 …… （程晓良） 1
不定方程解的数目 …… （程晓良） 7
从瞎子爬山到最优化方法 …… （袁亚湘） 15
迭代算法的平方收敛 …… （汤 涛） 28
费马大定理的传奇故事 …… （徐诚浩） 34
哥德巴赫猜想 …… （徐诚浩） 46
公钥密码学简介 …… （赵昌安 范 翔 姚正安） 50
关于圆周率的一些故事 …… （徐诚浩） 60
函数根号 t 的物理模型及四维时空 …… （吴宗敏） 68
回文数与角谷猜想 …… （蔡天新） 74
快乐地学习优美的数学 …… （徐诚浩） 82
连分数与历法 …… （徐诚浩） 86
浅谈素数的分布 …… （范 翔 赵昌安 姚正安） 93
沙罗周期是什么 …… （徐诚浩） 108
生日的公历、农历日期能再是同一天吗 …… （徐诚浩） 113

时间的定义 1 ……………………………………………（吴宗敏） 117
时间的定义 2 ……………………………………（吴宗敏　谢纳庆） 123
为什么古希腊三大几何作图问题不可解——兼论什么样的正多
　边形可以尺规作出 ………………………………（冯荣权） 133
为什么要如此推崇黄金数 …………………………（徐诚浩） 153
永无止境的素数探索 ………………………………（徐诚浩） 161
怎样计算利息 ………………………………………（程晓良） 170
怎样作正十七边形 …………………………………（徐诚浩） 176
自行车的发明与黎曼几何学 ………………………（蔡天新） 181

$\sqrt{2}$的计算

在面试学过微积分的大学生或选拔中学数学特长生时，我们常常会问：你有什么办法来计算$\sqrt{2}$的近似值？根据不同的回答，我们可以初步判断其掌握非线性方程求根的知识或处理数学问题时的灵活性。

用非线性方程求根的方法来计算$\sqrt{2}$是指把问题转化为：令$f(z)=z^2-2$，求$f(z)=0$的正根。我们可以用二分法、割线法、牛顿(Newton)法等来求解。事实上，在古代中国最早的数学著作《九章算术》的盈不足术、古印度的双试位法等都是割线法的原始叙述形式。

二分法是最容易想到的：用两个数a，b去试，平方后如果一个比2小($f(a)<0$)，一个比2大($f(b)>0$)，则$\sqrt{2}$的值一定在这两个数之间，用这两个数的平均值$\left(c=\dfrac{a+b}{2}\right)$再去试，若$f(c)>0$，则用$a$，$c$，否则用$c$，$b$代替原来的两个数$a$，$b$，重复前面的过程。反复这一称为迭代的过程，当这两个数越来越接近时，$\sqrt{2}$的值也就近似计算出来了。

割线法是在二分法的基础上，用两点的连线代替$f(z)$求根，即

$$f(x)\approx f(a)\frac{b-z}{b-a}+f(b)\frac{z-a}{b-a}=0,$$

计算出

$$c=\frac{f(a)b-f(b)a}{f(a)-f(b)}=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}。$$

从几何上看，就是图形 $f(z)$上两点$(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$的连线和坐标 z 轴的交点就是新的点 c。用这样的方法得到的 c 代替二分法中的中点，通常能更快地求得根的近似值。写成迭代公式

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)(z_n-z_{n-1})}{f(z_n)-f(z_{n-1})},\ n=1,\ 2,\ \cdots。$$

那么什么是牛顿法呢？它有几种推导的方法，比如：

$$f(z)\approx f(a)+f'(a)(z-a)=0,$$

计算出新的近似。用 z_n 代替 a，得到的新值用 z_{n+1}表示，我们可以得到迭代公式

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots。$$

从几何上看，就是图形 $f(z)$上一点$(z_n,\ f(z_n))$的切线和坐标 z 轴的交点就是新的点 z_{n+1}。割线法也可以从牛顿法推出，只要在将分母计算导数值时用近似计算，即切线的斜率用两点连线的割线的斜率来代替。

最近，我读到一本利用佩尔（Pell）方程的解来近似计算$\sqrt{2}$的书[1]，书中用对话的形式非常详细地介绍了该方法及其变化。这个佩尔方程是指求正整数 x，y 满足：

$$x^2-2y^2=1。\tag{1}$$

实际上，英国数学家佩尔（J. Pell）与这个方程并没有什么关系，而是同时代的另一个英国数学家布龙克（W. Brouncker）首先提出这个问题并给出了一种巧妙的解法。后来，因为大数学家欧拉（Euler）错误

地将这个方程的那个解法归功于佩尔，大家也就跟着将错就错地叫做佩尔方程了。据传，印度的婆罗摩笈多(Brahmagupta)早在一千多年前第一个研究过这类问题，并得到叫“瓦格布拉蒂”的算法[2]。

下面，我们来介绍书中([1])这个方法的本质的思想，同时，我们发现，这些方法在某些情形下和牛顿法、割线法是等价的。

首先，若方程(1)存在解$(x,\ y)$，则

$$\sqrt{2} \simeq \frac{x}{y}。 \tag{2}$$

如果求得方程(1)的一系列解，则我们可以得到$\sqrt{2}$的一系列近似值。直观的事实是，若$x,\ y$越大且$x^2,\ 2y^2$只相差1，则$x^2 \simeq 2y^2$从而$\sqrt{2} \simeq \frac{x}{y}$的近似程度就越好。

把方程(1)改写成

$$(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})=1。 \tag{3}$$

若已经得到方程(1)的一个解$(x,\ y)$，我们就可以得到无穷多个解。事实上，从(3)，对任意正整数n，可得

$$(x+\sqrt{2}y)^n(x-y\sqrt{2})^n=1。 \tag{4}$$

于是

$$\begin{cases} x'+y'\sqrt{2}=(x+y\sqrt{2})^n, \\ x'-y'\sqrt{2}=(x-y\sqrt{2})^n, \end{cases} \tag{5}$$

所以$(x',\ y')$也是方程(1)的解。

比如$n=2$，我们有

$$\begin{cases} x'=x^2+2y^2, \\ y'=2xy, \end{cases} \tag{6}$$

于是，我们从(1)的解(x, y)关于$\sqrt{2}$的近似$z=\dfrac{x}{y}$出发，可以得到$\sqrt{2}$的新的近似z'，即

$$z'=\frac{x'}{y'}=\frac{x^2+2y^2}{2xy}=\frac{z^2+2}{2z}=z-\frac{f(z)}{f'(z)}。\tag{7}$$

反复此过程，这就是著名的解非线性方程$f(z)=0$的牛顿迭代法。

由于(x, y)是(1)的解，则

$$0<\frac{x'}{y'}-\sqrt{2}=\frac{y}{2x}\left(\frac{x}{y}-\sqrt{2}\right)^2,$$

$$\frac{2y^2}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}<1, \Rightarrow \frac{y}{x}<\frac{\sqrt{2}}{2}。\tag{8}$$

于是，我们得到称为二阶收敛的误差估计式：

$$0<\frac{x'}{y'}-\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{y}-\sqrt{2}\right)^2。\tag{9}$$

即如果$\dfrac{x}{y}$近似$\sqrt{2}$的误差是10^{-1}，则新的近似大致就有10^{-2}的误差，再下一次的近似大致就有10^{-4}的误差，然后是10^{-8}的误差，等等。

要构造更高的格式，我们只需在(5)中取较大的n就可以了。比如$n=3$，则有

$$\begin{cases}x'=x^3+6xy^2,\\y'=3x^2y+2y^3。\end{cases}\tag{10}$$

又如$n=4$，则有

$$\begin{cases}x'=x^4+12x^2y^2+4y^4,\\y'=4x^3y+8xy^3。\end{cases}\tag{11}$$

注意到迭代(11)可以分解成：