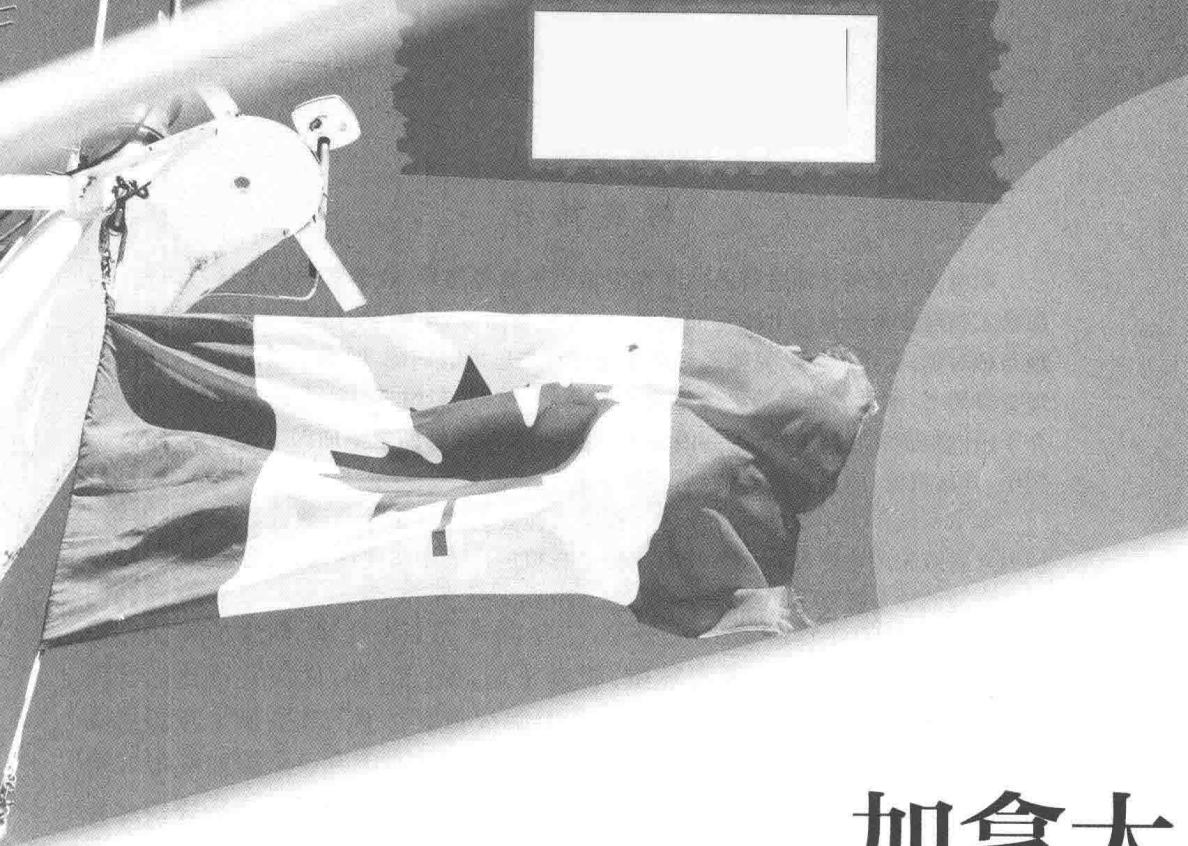




加拿大 物理奥林匹克

黄 晶 / 矫 健 / 孙佳琪 编著

中国科学技术大学出版社



加拿大 物理奥林匹克

黄 晶 / 矫 健 / 孙佳琪 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者在长期进行奥林匹克中学物理竞赛指导、教学实践以及学习研究加拿大物理竞赛的基础上编写而成的,内容包括力学、电磁学、热学、光学、原子物理与相对论,有序、科学、完整地对学生进行物理思维的训练,区别于国内现有的物理竞赛用书,本书的特点是更注重选题的新颖、独创、实用、现代,大部分试题难度介于国内预赛和复赛之间,为国内首发,目的是有效地帮助学生加深对物理概念的领悟,开拓视野,启发物理思维,培养科学素养。

本书可以作为中学物理综合学习和素质提高的辅导参考书,适合有志于参加国内外各级物理竞赛和各大名校自主招生选拔的广大中学生使用,同时也为高考选考物理的学生提供了思维训练的机会。

图书在版编目(CIP)数据

加拿大物理奥林匹克/黄晶,矫健,孙佳琪编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2017.3

ISBN 978-7-312-04115-0

I. 加… II. ①黄…②矫…③孙… III. 中学物理课—竞赛题 IV. G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 314903 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjsdxcbs.tmall.com>

印刷 安徽联众印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 15.75
字数 291 千
版次 2017 年 3 月第 1 版
印次 2017 年 3 月第 1 次印刷
定价 39.00 元

前言

加拿大高中物理竞赛有着悠久的历史,多伦多大学物理系每年为参加国际物理奥林匹克竞赛的选手举行一次物理奥林匹克竞赛培训,培训的风格类似于国际物理奥林匹克竞赛.加拿大所有的高中生都可以通过网络向多伦多大学免费申请参加集训.为了选拔优秀的学生,多伦多大学物理系每年以开卷的形式向全国发布有关力、电、光、热、原子物理、相对论等6份试卷,学生在规定的时间内以电子邮件方式将答案邮寄给组委会,组委会评选出优秀的学生前往多伦多大学参加理论与实验两方面的培训.

他山之石,可以攻玉.十多年来,作者一直潜心收集加拿大高中物理竞赛方面的试题,关注竞赛动态.本书正是作者在长期进行奥林匹克中学物理竞赛指导、教学实践以及学习研究加拿大物理竞赛的基础上,系统地整理归类,分析研究,精心编译而成的.本书依据全国中生物理竞赛的内容提要,划分为力学、电磁学、热学、光学、原子物理与相对论5个部分,有序、科学、完整地对学生进行物理思维的训练.区别于国内现有的物理竞赛用书,本书更注重选题的新颖、独创、实用、现代.大部分试题难度介于国内预赛和复赛之间,为国内首发.目的是有效地帮助学生加深对物理概念的领悟,开拓视野,启发物理思维,培养科学素养.本书的编写起意于2008年,陆续参加过编写和讨论工作的人员有:汪飞、俞超、何东妹、朱杏英、邢云开、姚宝乐、郑其丰、马建江、矫健、孙佳琪.

“问渠哪得清如许,为有源头活水来”,知识需要不断更新.作者也本着开放、学习的原则,认识到在编写本书的过程中,由于受到语言翻译障碍的困扰,加之国外有些物理术语和国内表述存在差异,书中难免有不足或疏漏之处,诚恳地希望读者批评指正(作者邮箱:huangjing96@163.com,QQ群:376274832),以便再版时订正.



群名称: 加拿大物理竞赛
群号: 376274832

黄晶

初稿于荆溪畔

2017年1月6日终稿于钱塘江岸



目 录

前言	i
第1模块 力学	1
第2模块 电磁学	47
第3模块 热学	118
第4模块 光学	181
第5模块 原子物理与相对论	216
参考文献	244

第 1 模块 力 学

例 1

如图 1.1 所示(图中距离的单位:m), AE(阿尔伯特·爱因斯坦)在高台上抛出一个球, 水平方向和竖直方向的初速度分别是 $(v_{x0}, v_{y0}) \approx (3.29, 6.39)$ (m/s), 小球与地面发生一次完全弹性碰撞(不损失能量)后到达 AM(阿尔伯特·迈克逊)处. 求小球与地面碰撞点的位置. 忽略空气阻力.

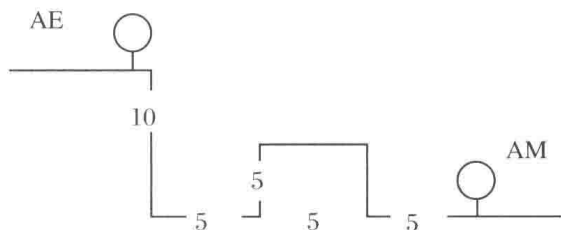


图 1.1



解析 一维运动学方程为

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (2)$$

其中, x_0 为初始位置坐标, t 为时间, a 为加速度, v_0 为初速度.

本例中小球在二维平面运动, 球的初始位置为 $(x_0, y_0) = (0, 10)$, 它在 (x_1, y_1) 处撞击地面, 最后到达 AM $(x_2, y_2) = (15, 0)$ 处. 在 (x_1, y_1) 位置, 有

$$x_1 = x_0 + v_{x0} t_1 + \frac{1}{2} a_x t_1^2 \quad (3)$$

$$y_1 = y_0 + v_{y0} t_1 + \frac{1}{2} a_y t_1^2 \quad (4)$$

x 方向的加速度为 $a_x = 0$, y 方向的加速度为 $a_y = -g \approx -10 \text{ m/s}^2$. 由式

(3) 可得 $t_1 = \frac{x_1 - x_0}{v_{x0}}$, 代入式(4)可得

$$(y_0 - y_1) v_{x0}^2 + (x_1 - x_0) v_{y0} v_{x0} - \frac{1}{2} (x_1 - x_0)^2 g = 0 \quad (5)$$

类似地, 可以得到关于 $x_1, y_1, x_2, y_2, v_{x1}, v_{y1}$ 的关系式.

由于 $a_x = 0$, $v_{x1} = v_{x0}$, 根据 $v_{y1}^2 = v_{y0}^2 - 2g(y_1 - y_0)$, 可计算得到 v_{y1} .

选择特殊的 x_1 与 y_1 , 然后计算 v_{x0} 与 v_{y0} .

代入初速度的数据 $(v_{x0}, v_{y0}) \approx (3.29, 6.39)(\text{m/s})$, 可得碰撞点坐标为

$$(x_1, y_1) \approx (6, 5)(\text{m})$$

例 2 如图 1.2 所示, 两根不可伸长的绳子一端固定在天花板上, 另一端固定在半径为 R 的匀质圆盘上, 且绳子缠绕在圆盘周围. 释放圆盘后, 圆盘将向下滚动, 绳子始终处于绷紧状态. 某时刻, 圆盘滚动的角速度为 ω , 两绳间的夹角为 α , 求此时圆盘质心的速度.

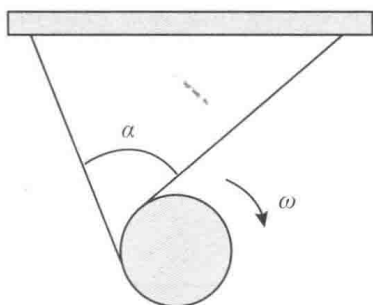


图 1.2

解析 本例是关于圆盘质心瞬时速度的问题, 利用刚体转动的瞬时轴概念可以提供一种解法. 关于瞬时轴的一个例子如图 1.3 所示, 向右滚动的圆盘质心速度为 v_{CM} , 圆盘与地面的接触点 P 就是此时的速度瞬心, 通过 P 垂直于圆盘面的轴即为瞬时轴.

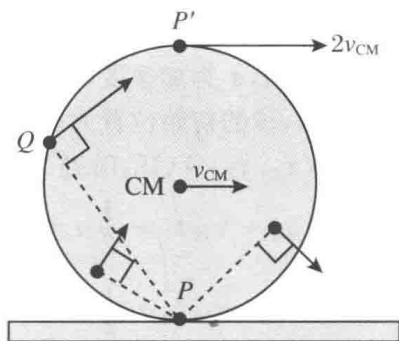


图 1.3

一般情况下, 将刚体的运动看成随质心的平动和绕质心轴的转动的合运动.

为了简化对问题的分析, 可以将圆盘的滚动视为绕瞬时轴以角速度 ω 的纯滚动, 则



$$\omega = v_{\text{CM}}/R$$

其中, R 为圆盘的半径. 利用这种观点可以快速计算出圆盘上任意点的速度, 例如对于圆盘上到通过 P 点的瞬时轴距离为 d 的点 Q 的速度为

$$v_Q = \omega \cdot d$$

v_Q 的方向垂直于 PQ , 利用这个性质可以找到任何情况下刚体运动的瞬时轴.

为了解决本例, 需要找到这样的瞬时轴, 刚体上任意一点的速度方向均垂直于该点与瞬时轴的连线, 如图 1.4 所示, 由于绳子是不可伸长的, 绳子与圆盘的接触点 A 、 B 处的速度沿绳子方向的分量为 0, 得到 B 点的速度方向垂直于 BB_1 , A 点的速度方向垂直于 AA_1 , 因此 BB_1 与 AA_1 的交点 O_1 就是此时的速度瞬心.

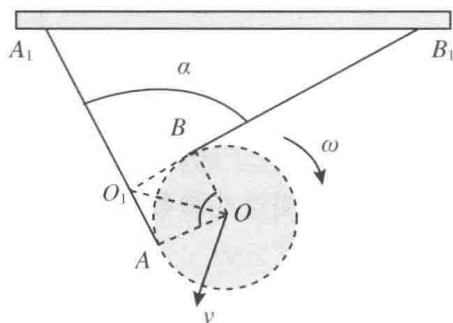


图 1.4

半径 OA 与 OB 的夹角为 α , 圆盘质心 O 与速度瞬心 O_1 的距离为

$$OO_1 = \frac{R}{\cos(\alpha/2)}$$

因此圆盘质心 O 的速度为

$$v = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}$$

例 3 实验题. 理论简介:

标准的金属丝在拉伸过程中遵循的胡克定律为

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L_i}$$

这里, F 为施加于金属丝上的外力, A 为金属丝的横截面积, Y 为金属丝的杨氏模量, ΔL 为在外力作用下金属丝的伸长量, L_i 为金属丝的初始长度. 由于 F/A 称为应力, $\Delta L/L_i$ 称为金属丝长度的应变, 应力与应变之比即为杨氏模量.

实验器材如下:

(1) 一根长约为 2 m、内径约为 1 mm 的钢丝或其他金属丝, 杨氏模量可以查阅相关手册获得, 例如钢丝的杨氏模量为 2.00×10^{11} Pa.





(2) 已知质量约为 200 g 的物体.

(3) 米尺.

(4) 直尺.

(5) 螺旋测微器.

实验步骤如下:

将金属丝沿水平方向拉直,并固定在 2 个稳定的支撑物上,其可以是竖直墙壁、天花板或者其他稳定的物体.

将已知质量的物体悬挂在金属丝的中点处并轻轻释放.

在确保金属丝两端固定点不发生变动的情况下,测量物体垂直于金属丝方向的侧移量.

计算:已知 L_i , Y , 金属丝的直径 d , 物体的质量 m , 试从理论角度计算物体侧移量的值.

解析 图 1.5 为悬挂在金属丝上的物体的受力分析图,同时给出了金属丝拉伸前后的长度参数,我们将利用这些参数来计算物体的侧移量.由平衡方程得

$$mg = 2T\sin\alpha = 2T \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta y)^2 + \frac{L_i^2}{4}}} \quad (1)$$

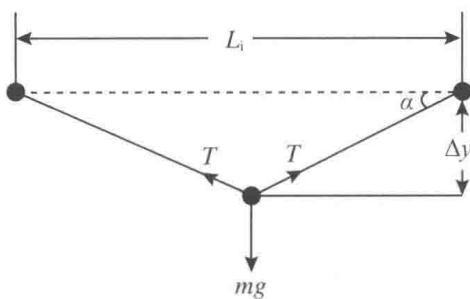


图 1.5

金属丝上的张力为

$$T = YA \frac{\Delta L}{\frac{L_i}{2}} = Y \frac{\pi d^2}{4} \frac{\sqrt{(\Delta y)^2 + \frac{L_i^2}{4}} - \frac{L_i}{2}}{\frac{L_i}{2}} \quad (2)$$

联立式(1)、式(2)得

$$\Delta y = L_i \sqrt[3]{\frac{mg}{2\pi d^2 Y}}$$



例 4

几年前,一位女士开车时把咖啡杯夹在大腿之间,咖啡洒出致使她被烫伤.她后来把麦当劳公司告上法院.这位女士最终胜诉,从此麦当劳公司在咖啡杯上打印了警示语以提醒大家杯子里的咖啡很烫.

所以,当某个马克杯制造公司最近推出一个新杯子模型时,我们建议他们通过 Deepee - Deetee 咨询公司进行评估.几个学物理的华侨学生作为顾问评估了一个放在汽车仪表板上的马克杯的稳定性.

他们认为马克杯的稳定性与杯内咖啡的含量有关.请确定马克杯最不可能翻倒时杯内咖啡的高度.已知马克杯高为 20 cm,底面半径为 6 cm,质量为 200 g(杯底占总质量的 $\frac{1}{4}$).



解析 设马克杯的质量为 M ,杯底半径为 R ,杯高为 H .则杯底的质量为 $\frac{M}{4}$,装有咖啡的马克杯的重心高度($y_{c.m.}$)与咖啡密度 ρ (约 1 g/cm^3)及咖啡高度 h 有关:

$$y_{c.m.} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{MH}{2} + \rho\pi R^2 \frac{h^2}{2}}{M + \rho\pi R^2 h}$$

定义常数 $a = \rho\pi R^2$,因此杯内咖啡的质量为

$$m = \rho\pi R^2 h \equiv ah$$

所以

$$y_{c.m.} = \frac{\frac{3}{8}MH + \frac{ah^2}{2}}{M + ah}$$

马克杯达到最大的稳定度时,重心处于最低位置.

重心可以达到的最低位置为

$$\frac{dy_{c.m.}}{dh} = \frac{ah \cdot (M + ah) - a \cdot \left(\frac{3}{8}MH + \frac{ah^2}{2}\right)}{(M + ah)^2} = 0$$

所以

$$h(M + ah) = \frac{3}{8}MH + \frac{1}{2}ah^2$$

$$\frac{1}{2}ah^2 + Mh - \frac{3}{8}MH = 0$$

解得

$$h = \frac{1}{a} \left[-M \pm \left(M^2 + \frac{3}{4}MHa \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$





舍去负值,得

$$h = \frac{1}{a} \left[-M + \left(M^2 + \frac{3}{4} MHa \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

由于

$$M = 200 \text{ g}, \quad H = 20 \text{ cm}, \quad a = \rho\pi R^2 = 36\pi \text{ g/cm}$$

解得

$$h = \frac{1}{36\pi} \left[-200 + \left(40000 + \frac{3}{4} \times 200 \times 20 \times 36\pi \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 3.6(\text{cm})$$

即当杯子内咖啡高度 $h = 3.6 \text{ cm}$ 时,马克杯最稳定.



图 1.6

例 5

假设有三个容器,如图 1.6 所示,底面积均为 A ,高度均为 H .第一个容器为圆柱形,其他两个容器是圆台形.这两个圆台的上表面面积分别为 $2A$ 、 $A/2$.

(1) 在三个容器中装满水,容器底部水的压强为多少? 这个压强作用在容器底部,一共可以产生多大的作用力?

(2) 如果把盛满水的容器直接放在电子秤上测量,每个容器内水的重力是多少? 容器壁很薄,质量不计,只有下底面接触电子秤.为什么测量出的重力与用“面积 $\times$ 压强(在(1)中计算得到的压强值)”得到的作用力的大小不一样?



解析 (1) 三个容器底部的压强相等,均等于 ρgH ,其中 ρ 是水的密度.压强取决于水的高度.这个压强在容器底部产生的压力等于容器底部压强与底面积的乘积,三个容器均如此.

(2) 电子秤测量得到三个不同体积的容器装满水时质量各不相同.非圆柱形容器的总重力大小不等于水的压强乘以底面积.在圆柱形容器中,水对侧壁的压强朝向侧面各个方向,对其重力没有贡献.而另外两个容器却不是这样的.

在圆台形容器内部,不仅底面上方的水对底面产生压力,容器侧面也受到力.上表面较大的圆台,侧面受到的力(斜)向下,作用在底面上的力大于水的压强与底面积的乘积.上表面较小的圆台,侧面受到的力(斜)向上,作用在底面上的力小于水的压强与底面积的乘积.

最简单的解决方法是:假设有一个由台阶构成的斜面(利用极限思想,将斜面看成由无数多个又细又窄的台阶组成),每个台阶都有一个水平面与竖直面.竖直面就像一个小圆柱体,作用在它上面的压强向外各个方向产生一个压力,这些径向的力的合力为 0.水平面就像小圆柱底部的挡板,作用在它上面的压强产生一个向下的压力.所以侧面上的压力之和恰好等于压在侧面上的水的重力.合力即为台阶所有水平面的压力之和,每一级水平台阶实际上是一个





环——半径为 r 到 $r + dr$ 的平面圆环.

斜面与竖直面的夹角为 θ , 距离容器底部竖直高度为 z 的地方半径 r 为

$$r = r_0 + z \tan \theta$$

则 $dr(r)$ 的微分)为

$$dr = dz \cdot \tan \theta$$

环形面积为

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r \cdot dr = 2\pi r \cdot dz \cdot \tan \theta \\ &= 2\pi(r_0 + z \tan \theta) \cdot dz \cdot \tan \theta \end{aligned}$$

小环上向下的力为

$$dF_y = p(z) \cdot A$$

其中, $p(z)$ 表示压强, 它是一个关于深度 z 的函数. 压强可以简单表示为单位面积上方水的重力, 即

$$p(z) = \rho g(H - z)$$

因此

$$dF_y = p(z) \cdot A = \rho g(H - z) \cdot 2\pi(r_0 + z \tan \theta) \cdot dz \cdot \tan \theta$$

这些微小贡献之和就是向下压着侧面的合力, 其中 z 的取值范围为 $0 \sim H$. 积分 (被积函数是一个多项式) 得

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{z=0}^{z=H} dF_y \\ &= \int_{z=0}^{z=H} \rho g(H - z) \cdot 2\pi(r_0 + z \tan \theta) \cdot dz \cdot \tan \theta \\ &= 2\pi \rho g \tan \theta \int_{z=0}^{z=H} (H - z) \cdot (r_0 + z \tan \theta) \cdot dz \\ &= 2\pi \rho g \tan \theta \int_{z=0}^{z=H} [Hr_0 + (H \tan \theta - r_0) \cdot z - \tan \theta \cdot z^2] dz \\ &= 2\pi \rho g \tan \theta \left[Hr_0 z \Big|_0^H + \frac{1}{2} (H \tan \theta - r_0) \cdot z^2 \Big|_0^H - \frac{1}{3} \tan \theta \cdot z^3 \Big|_0^H \right] \\ &= 2\pi \rho g \tan \theta \left(\frac{1}{2} H^2 r_0 + \frac{1}{6} H^3 \tan \theta \right) \end{aligned}$$

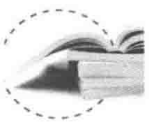
自然, 当 θ 为 0 (即容器为圆柱体) 时, 竖直侧面上受到的压力对下底面的贡献为 0 .

显然, 侧面受到的压力的竖直向下的分力等于圆柱体额外部分体积中水的重力, 因此我们只需要把装在每一小级水平台阶内的水的重力简单相加即可得到压力.

例 6

准备一个矩形棱镜, 棱镜高度至少是它的宽度和长度的若干倍. 把棱镜竖直放置在桌面或其他任意水平面上. 要求只利用尺子作为测量工具,





测出棱镜与水平面之间的摩擦因数. 除了测量工具, 其他器材不限. 本例可以通过理论解决, 并通过实验验证.



解析 把一条线弯成一个线圈, 如图 1.7 所示, 将线圈套在棱镜上.

这个线圈位置越低, 棱镜越容易滑动. 把线圈放置在棱镜高 h_0 处, 棱镜恰能无滑动地沿着一条棱翻转 (如图 1.8 所示). 此时, 棱镜在水平方向上受到两个大小相等、方向相反的力: 线的拉力和地面的摩擦力. 根据一般物体的平衡条件可以写出两个等式: 受力平衡等式与力矩平衡等式.

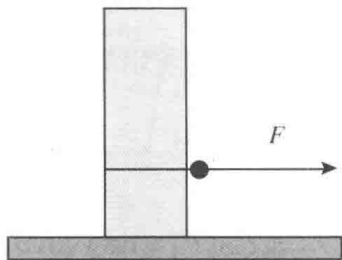


图 1.7

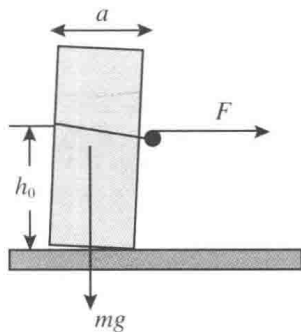


图 1.8

受力平衡:

$$F = \mu_s mg \quad (1)$$

右侧下沿的力矩平衡:

$$Fh_0 = mg \frac{a}{2} \quad (2)$$

其中, a 表示底部边沿长度.

联立式(1)、式(2), 得到静摩擦因数 μ_s 为

$$\mu_s = \frac{a}{2h_0}$$

用尺子测量出 a 与 h_0 , 我们就可以计算得到摩擦因数.

每一次具体的测量会得到不同的摩擦因数. 然而, 可以通过参考网络数据, 估计出两种材料 (棱镜与平面) 间的摩擦因数的数值结果.

例 7

用两根完全一样且长度相等的钢丝制成两根弹簧. 第一根弹簧线圈直径为 d , 第二根弹簧线圈直径为 $2d$. 两根弹簧挂上质量相等的重物, 第一根弹簧拉伸了原长的十分之一. 求第二根弹簧形变量与原长的百分比.



解析 题中只给了一个几何数据, 也就是弹簧线圈的直径. 我们尝试将弹簧形变量、弹簧圈数与弹簧直径建立起关系. 首先需要将弹簧形变量作为一个相对于弹簧原长、线圈直径很小的量来考虑. 只有在这样的情况下才能使用

胡克定律, 否则就需要知道每根弹簧变形时确切的特征属性。

图 1.9 展示了一根形变的弹簧, n 个直径为 D 的线圈总形变量为 Δl , 遵循下式:

$$\Delta l = n \cdot 2D \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

假定形变量相对而言很小, 变化角度也很小, 则

$$\Delta l = nD\alpha$$

重物拉伸弹簧使之产生形变, 弹簧受力记作 F , 角 α 与拉伸弹簧的力矩成正比:

$$\alpha = \text{const} \cdot FD$$

代入前式, 则有

$$\Delta l = \text{const} \cdot FnD^2$$

形变率为 $\Delta l/l_0$, 其中, l_0 表示弹簧原长. 对于本例中两根不同的弹簧, 系数 const 与 F 是相同的, 第一个弹簧的线圈直径是第二个弹簧线圈直径的一半, 它的线圈数是第二个弹簧的两倍, 原长也是第二个弹簧的两倍. 因此对于这两根弹簧, 有

$$\frac{\Delta l_1}{l_{10}} = \frac{\text{const} \cdot Fn_1 d^2}{l_{10}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\Delta l_2}{l_{20}} = \frac{\text{const} \cdot F(n_1/2)(2d)^2}{l_{10}/2} = \frac{1}{10} \times 4 = \frac{2}{5}$$

例 8

如图 1.10 所示, 一个装满水的弯曲弧形密封玻璃管里面有一个小气泡. 为了测量加速度, 让装有水和气泡的弯曲玻璃管作直线加速运动, 你可以亲自制作该实验装备, 或者试着想象实验结果.

- (1) 详细描述测量方法.
- (2) 描述气泡的位置与玻璃管加速度的关系.

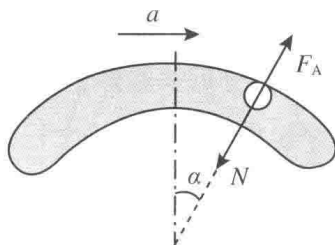


图 1.10



解析 首先我们必须明确玻璃管是放置在竖直平面内的,如果玻璃管以加速度 a 移动,气泡所受的浮力 F_A 方向与管壁的方向垂直(如图 1.10 所示).实际上,浮力 F_A 的方向是沿着玻璃管径向的. N 是玻璃管的支持力.由于气泡质量很小,因此可以忽略其重力和惯性力 ma .

我们想象有一根完全相同的玻璃管,里面没有气泡,取与气泡相同体积和位置的水球研究,它受到的浮力大小和方向都不变,受力分析图如图 1.11 所示. 所以有

$$\tan \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g \tan \alpha$$

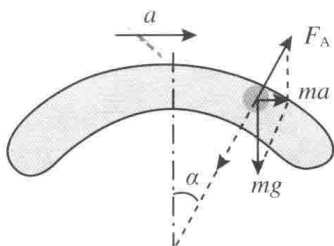


图 1.11

实际测量时,我们需要设置一个刻度在玻璃管的上端面,同时保持玻璃管竖直放置.由于加速度的值和角度的正切值成正比,和角度的关系是非线性的,所以随着加速度的增加,测量精确性将会下降.

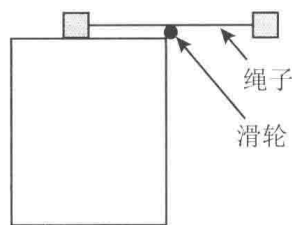


图 1.12

例 9

两个质量相等的重物用一根 1 m 长的绳子连接.开始时,一个重物放在光滑的桌面上,另一个重物如图 1.12 放置,细线的中点处放着一个光滑的轻质滑轮.

释放第二个重物,下面哪项将先发生?

- A. 第一个重物开始滑动,与滑轮相撞;
- B. 第二个重物开始摆动,与桌子边界相撞。

做这个实验,找到正确答案,再通过理论加以解释.为了尽可能做到没有摩擦以达到理想条件,请详细地说明你的实验操作方案。



解析 1. 实验操作方案及实验结论

为了使第一个重物与桌子之间几乎没有摩擦力,可以试着用两辆儿童木质玩具车来代替两个重物,也可以利用学校里的的气垫导轨与两个气垫导轨上专用的滑块.还有干冰在桌面上几乎是不受摩擦的,可以尝试在两个重物的一侧各自绑上一块干冰.无摩擦滑轮可以是任何轻质滑轮(没有惯性);或者在一根钉

子上安装一个聚四氟乙烯管;也可以用涂有聚四氟乙烯涂层的电线连接两个重物,然后在桌角上就形成了一个几乎没有摩擦的光滑圆角。

实验现象表明:放在桌面上的重物先撞击滑轮,然后右边的重物才撞击桌子侧面.答案为 A 选项.

2. 理论分析与解释

尽管绳子拉力大小经过一段时间后可能会改变,但由于只存在着一个拉力,因此两个重物受到的拉力大小始终相等.不同的是,左边重物受到的拉力方向总是沿着绳子指向滑轮,右边重物受到的拉力方向也沿绳子,但是随着绳子的角度变化而变化.

左边重物朝着滑轮作水平加速运动,加速度为

$$a_{\text{左}} = T/m$$

其中, m 为重物的质量, T 为绳子的张力.

右边重物在水平方向上向着墙壁作加速运动,其水平加速度为

$$a_{\text{右}} = T \cos \theta / m$$

其中, m 为重物的质量, T 为绳子的张力, θ 为绳子与水平面的夹角.

左边重物撞向滑轮的加速度大于右边重物撞向桌子侧面的加速度,因为一旦右边重物开始下落,则它与水平面的夹角 $\theta > 0$, 所以 $a_{\text{右}} < a_{\text{左}}$.

据此可以判断出相同时间内左边重物的位移大于右边的水平位移,所以左边的重物先与滑轮发生撞击,与实验结果相符.

例 10 长度为 L 的均匀链条最初固定在一个半径为 R 的光滑半球的顶部,如图 1.13 所示.铁链长度 $L = \pi R/3$.在某一时刻,释放铁链的上端.

- (1) 求出链条在释放瞬间的加速度值.
- (2) 在这一时刻,链条在哪一点的张力最大?

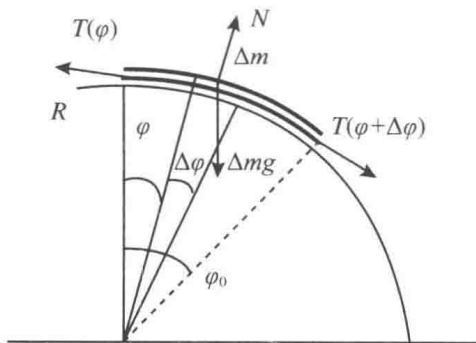
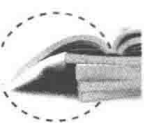


图 1.13



解析 (1) 设一小条铁链的长度为



$$\Delta L = R\Delta\varphi$$

质量为

$$\Delta m = \rho\Delta L = \rho R\Delta\varphi$$

其中, ρ 为铁链的线性密度.

如果 ΔL 为无穷小, 则张力 $T(\varphi)$ 和 $T(\varphi + \Delta\varphi)$ 施加在相反的方向.

如图 1.13 所示, 链条微元还受到轴向力 N 和重力 Δmg , 可以很容易地分解出与圆弧相切的分力.

又由牛顿第二定律得出

$$\Delta ma_\tau = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + \Delta mg \sin\varphi \quad (1)$$

将 $\Delta m = \rho\Delta L = \rho R\Delta\varphi$ 代入式(1)可得

$$\rho R a_\tau \Delta\varphi = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + \rho R g \sin\varphi \Delta\varphi \quad (2)$$

因为铁链由静止开始释放, 释放瞬间的线速度为零, 故铁链所有部位的向心加速度为零. 因此铁链的加速度即为切向加速度 a_τ , 且对铁链的所有部位都相同.

对等式(2)左右两边求和, 并考虑铁链内部的张力属于内力, 初末两端的张力为 0, 张力求和后为零, 得出如下等式:

$$\rho R a_\tau \sum \Delta\varphi = \rho R g \sum \sin\varphi \Delta\varphi \quad (3)$$

将式(3)用积分形式表示为

$$a_\tau \int_0^{\varphi_0} d\varphi = g \int_0^{\varphi_0} \sin\varphi d\varphi \quad (4)$$

积分区间为 0 到 $\varphi_0 = L/R = \pi/3$, 解得

$$a_\tau \varphi_0 = g(1 - \cos\varphi_0)$$

$$a_\tau \frac{L}{R} = g\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)$$

所以有

$$\begin{aligned} a_\tau &= g \frac{R}{L} \left(1 - \cos\frac{L}{R}\right) \\ &= g \frac{3R}{\pi R} \left(1 - \cos\frac{\pi R}{3R}\right) \\ &= \frac{3g}{2\pi} \end{aligned}$$

(2) 在铁链上张力最大的部位, 应有极值条件

$$\frac{dT}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta\varphi} = 0$$

成立.

令 $\Delta T = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi)$, 将其代入式(2)得

