

力学丛书·典藏版 — 1

# 变分法及有限元

(上册)

钱伟长 著

LX



科学出版社

力学丛书·典藏版 1

# 变分法及有限元

(上册)

钱伟长 著

科学出版社

## 内 容 简 介

本书系统地论述了作为有限元法基础的变分原理,以广义变分原理贯穿全书。其中相当一部分内容是作者多年来的工作成果。

全书分上、下二册。上册为前九章,内容包括:变分法的基本理论;梁、板小挠度和大挠度的静力学、动力学问题;板的热弹性问题;弹性体小位移变形和大位移变形的静力学、动力学问题;热弹性力学和塑性力学问题等等。

本书可供有关科学研究人员、工程技术人员和高等院校师生参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

变分法及有限元. 上册 / 钱伟长著. —北京: 科学出版社, 2016.1  
(力学丛书)

ISBN 978-7-03-046896-3

I. ①变… II. ①钱… III. ①变分法 ②有限元 IV. ① 0176  
② 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 004443 号

力学丛书

变分法及有限元

(上册)

钱伟长 著

\*

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1980年第一版

2016年印刷

开本: 850×1168 1/32

印张: 19 1/4

插页: 2

字数: 511,000

定价: 158.00元

## 《力学丛书》编委会

主 编：张 维

副主编：钱令希 林同驥 郑哲敏

编 委：（按姓氏笔划为序）

丁 懋

朱照宣

张涵信

苟清泉

钱伟长

郭尚平

黄克智

卞荫贵

刘延柱

周光炯

胡海昌

徐芝纶

谈镐生

程贯一

庄逢甘

孙训方

欧阳鬯

柳春图

徐华舫

黄文熙

朱兆祥

李 灏

季文美

贾有权

郭仲衡

黄克累

## 序 言

本书的主要目的,是为广大教师、科技工作者提供变分法和有限元的最新成果,从而使读者对教学、科研和生产中的理论问题和实际问题能更好地开展计算工作。作者以此来热烈响应党中央的号召,为社会主义祖国早日实现四个现代化贡献自己的力量。

本书的内容涉及变分法和有限元的各个方面,广泛地吸收了几十年来在国际上对实际计算有价值的先进材料。当然,其中相当一部分是我们自己三十年来在这方面的工作成果。本书对广义变分原理给予高度的重视,贯穿于全书。现在广义变分原理对有限元的利用,显示了越来越大的重要性。但是还可以说,广义变分原理的作用,迄今仍未得到充分的发挥。

本书论述的科学技术范围,不仅限于弹塑性力学,而且也涉及到其它许多学科。特别是在下册中,将为流体力学、电磁学、量子力学等学科设专章讲述。

本书是根据原《变分法及有限元》讲义改写而成的。自1977年10月至1978年10月,作者曾在清华大学开设《变分法及有限元》讲座,并为此写成一份讲义。参加讲座的除清华大学和各院校教师外,还有北京及外地的研究所、设计院的有关科技工作者。1978年暑假应云南昆明工学院的邀请,又向十七个省市近六十个院校、工矿科研单位的同志,进行了同样内容的简要讲述。今年三月在武昌华中工学院、四月将在无锡702研究所,分别为有关院校和科研单位进行讲述。在以往的讲述实践中,得到同志们的启发和帮助,使讲义的内容不断有所增益和修改,各单位也已广为翻印和复制。为满足广大科技工作者的要求,决心全部改写,现在已完成上册付梓,下册亦将在年内完成。

在本书的编写出版过程中,得到北京地质力学研究所潘立宙

同志的大力协助校审,并得首钢钱元凯同志制作全部插图,在此一并表示感谢。

本书在写作上必然会有一些不足和缺欠,甚至于可能还有差错,深望读者不吝提出批评指正。

钱伟长

一九七九年三月五日,  
于清华园内照澜院。

# 目 录

<b>第一章 变分法的一些基本概念</b> .....	1
§ 1.1 历史上有名的变分命题, 泛函, 较一般的变分命题 .....	1
§ 1.2 变分及其特性 .....	8
§ 1.3 泛函的极值问题求解, 变分法的基本预备定理, 欧拉方程 ..	14
§ 1.4 多个待定函数的泛函, 哈密顿原理 .....	26
§ 1.5 含有多个自变量的函数的泛函及其极值问题 .....	37
<b>第二章 条件极值问题的变分法</b> .....	62
§ 2.1 函数的条件极值问题, 拉格朗日乘子 .....	62
§ 2.2 泛函在约束条件 $\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 下的极值问题 .....	68
§ 2.3 泛函在约束条件 $\int_{x_1}^{x_2} \phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx =$ $\alpha_i$ ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 下的极值问题 .....	74
§ 2.4 超音速流中细长体的最小流阻问题 .....	80
§ 2.5 弹性薄板弯曲问题的广义变分原理 .....	85
§ 2.6 斯脱姆-刘维耳 (Sturm-Liouville) 型二阶微分方程的变分推 导, 瑞利 (Rayleigh) 原理, 特征值问题的瑞利-立兹 (Rayleigh- Ritz) 法 .....	95
§ 2.7 斯脱姆-刘维耳四阶微分方程的变分推导及其应用 .....	111
<b>第三章 边界待定的变分问题</b> .....	116
§ 3.1 最简单的, 泛函为 $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ 的, 边界待定的变分问 题, 交接条件 .....	116
§ 3.2 泛函 $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ 的极值曲线有折点的情况, 光的折射 和反射 .....	129
§ 3.3 泛函 $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx$ 的边界待定的变分问题 .....	137

§ 3.4	泛函 $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')dx$ 的边界待定的变分问题	140
§ 3.5	泛函 $\int_S F(x, y, w, w_x, w_y)dx dy$ 的边界待定的变分问题; 薄膜接触问题	158
§ 3.6	泛函 $\int_S F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy})dx dy$ 的边界待定的变分问题, 薄板接触问题	168
<b>第四章</b>	<b>泛函变分的几种近似算法 (一) 立兹法和伽辽金法</b>	<b>179</b>
§ 4.1	泛函极值的近似和极值函数的近似	179
§ 4.2	泛函 $(Au, u)$ 的正定性, 泛函的极值和极值函数	193
§ 4.3	立兹变分近似法	220
§ 4.4	柱体扭转问题的立兹法	233
§ 4.5	弹性板的弯曲的立兹近似法	247
§ 4.6	伽辽金法, 权函数	251
<b>第五章</b>	<b>泛函变分的几种近似算法 (二) 康托洛维奇法, 屈列弗兹法及其它</b>	<b>260</b>
§ 5.1	康托洛维奇近似变分法	260
§ 5.2	悬空边矩形板的康托洛维奇解法	271
§ 5.3	平面滑块间的油膜润滑理论的康托洛维奇解法	279
§ 5.4	屈列弗兹扭转上限法	285
§ 5.5	关于静电场的变分问题、立兹法和屈列弗兹法的应用	296
§ 5.6	固定边界薄板在横向载荷下弯曲问题的屈列弗兹解	307
§ 5.7	圆薄板大挠度问题	312
§ 5.8	限制误差近似法	323
§ 5.9	用限制误差近似法求解固定正方板的弯曲问题	328
<b>第六章</b>	<b>特征值问题变分近似法</b>	<b>335</b>
§ 6.1	特征值问题变分近似法的一些基本理论问题	335
§ 6.2	薄膜振动的频率, 瑞利-立兹法	342
§ 6.3	薄板振动的频率, 瑞利-立兹法	354
§ 6.4	薄板平面内受力时的振动频率	359
§ 6.5	特征值问题的边界条件放松法 (万因斯坦-钱伟长) 或特征值问题的下限法	363



§ 6.6	板内有张力的方板的振动特征值的下限问题 .....	374
§ 6.7	有关瑞利-立兹法特征方程的定理 .....	379
§ 6.8	重演法求特征方程的解 .....	389
<b>第七章</b>	<b>小位移变形弹性理论及有关问题的变分原理 .....</b>	<b>408</b>
§ 7.1	小位移变形弹性理论的最小位能原理和最小余能原理 .....	408
§ 7.2	弹性平面问题的变分原理 .....	419
§ 7.3	最小余能原理对固定矩形板的应用 .....	428
§ 7.4	小位移变形的弹性理论的广义变分原理 .....	433
§ 7.5	混合边界条件的广义变分原理 .....	442
§ 7.6	平面应力问题的广义变分, 带有边框的矩形板墙的平面弹性力学问题 .....	445
§ 7.7	弹性理论小位移变形问题的各级不完全的广义变分原理 .....	460
§ 7.8	弹性理论小位移变形问题的分区完全或不完全的广义变分原理 .....	465
§ 7.9	任意形状薄板在复杂边界条件下的广义变分原理 .....	476
<b>第八章</b>	<b>大位移变形弹性理论和热弹性理论的变分原理 .....</b>	<b>490</b>
§ 8.1	大位移变形弹性理论的最小位能原理 .....	490
§ 8.2	薄板大挠度问题的变分原理 .....	493
§ 8.3	薄壳大挠度弯曲理论的广义变分原理 .....	501
§ 8.4	大位移变形弹性理论的余能驻值原理 .....	513
§ 8.5	大位移非线性弹性理论的广义变分原理 .....	515
§ 8.6	大位移变形弹性理论的不完全的广义变分原理 .....	519
§ 8.7	大位移变形非线性弹性理论的分区完全和不完全的广义变分原理 .....	522
§ 8.8	弹性动力学问题的变分原理 .....	528
§ 8.9	弹性体自由振动的广义变分原理 .....	533
§ 8.10	定常温度场的热弹性理论问题的变分原理 .....	535
§ 8.11	非定常温度场热弹性理论的变分原理(耦合的热弹性理论的变分原理) .....	542
§ 8.12	弹性薄板的耦合热弹性变分原理 .....	551
<b>第九章</b>	<b>塑性力学的变分原理 .....</b>	<b>566</b>
§ 9.1	塑性力学形变理论的变分原理 .....	566

§ 9.2 塑性力学形变理论的广义变分原理 .....	576
§ 9.3 塑性流动理论的变分原理 .....	578
§ 9.4 刚塑性体极限分析的变分原理 .....	591
<b>索引 .....</b>	<b>600</b>
<b>人名、译名对照索引 .....</b>	<b>606</b>

# 第一章

## 变分法的一些基本概念

### § 1.1 历史上有名的变分命题,泛函,较一般的变分命题

在科学技术上,常常需要确定某一函数  $z = f(x)$  的极大值或极小值;这种计算分析是微积分里大家所熟知的。但是,我们经常还要去确定一类特殊的量——即所谓泛函——的极大值或极小值。这就是变分法所处理的范围。为了便于理解变分的命题,便于理解所谓泛函,我们将从历史上有名的三个变分命题讲起。

#### 第一个变分命题,最速降线问题 (brachistochrone)

设有两点  $A$  和  $B$ , 不在同一铅垂线上,设在  $A, B$  两点上连结着某一曲线,有一重物沿曲线从  $A$  到  $B$  受重力作用自由下滑。如果略去重物和线之间的摩擦阻力,从  $A$  到  $B$  自由下滑所需时间随这一曲线的形状不同而各不相同。问下滑时间最短的曲线是那一条曲线? 它就是最速降线(图 1.1)。显而易见,最快的路线决不是连结  $A, B$  两点的直线段。当然,这条直线段在  $A, B$  两点间的路程最短,但沿这条直线自由下落时,运动速率的增长是比较慢的。如果我们取一条较陡的路程,则虽然路程是加长了,但在路程相当大的一部分中,物体运动的速率较大,所需总时间反而较少。

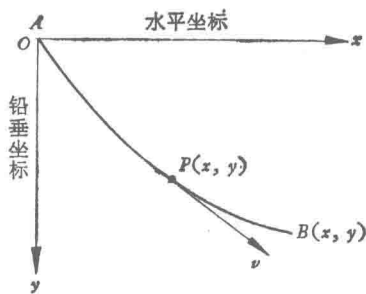


图 1.1 最速降线,  $A, B$  两点固定,  $A$  点和坐标原点重合

最速降线问题是约翰·伯努利 (Johann Bernoulli) 在 1696 年以公开信的形式提出来的<sup>[1]</sup>, 曾引起广泛的注意; 历经莱比尼兹 (Leibniz)、牛顿 (Newton) 和约可毕·伯努利 (Jacob Bernoulli) 等的多方努力<sup>[2,3]</sup>, 才得到较完善的解答。

现在让我们把最速降线问题, 写成数学形式。

设  $A$  点和原点重合,  $B$  点的坐标为  $(x_1, y_1)$ , 重物从  $A$  点下滑到  $P(x, y)$  点时, 其速度为  $v$ ; 如果重体的质量为  $m$ , 引力加速度为  $g$ , 则重物从  $A$  到  $P$ , 失去势能  $mgy$ , 而获得动能  $\frac{1}{2}mv^2$ 。由能量守恒定律

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{或} \quad v = \sqrt{2gy} \quad (1.1)$$

如果以  $s$  表示曲线从  $A$  点算起的弧长, 则

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad (1.1a)$$

而且弧长元素为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.2)$$

于是, 从 (1.1a), 和 (1.2), 有

$$dt = \frac{ds}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx \quad (1.3)$$

从  $A$  到  $B$  积分, 设总降落时间为  $T$ , 即得

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx \quad (1.4)$$

对于不同的  $y(x)$ ,  $T$  也不同。所以,  $T$  是  $y(x)$  的某种广义的函数, 人们称这一类型的广义函数为**泛函**。亦即  $T$  是  $y(x)$  的一种泛函。凡变量的值是由一个或多个函数的选取而确定的, 这个变量称为这些函数的泛函。最速降线问题, 于是可以说成:

在满足  $y(0) = 0$ ,  $y(x_1) = y_1$  的一切  $y(x)$  函数中, 选取一个函数, 使 (1.4) 式的泛函  $T$  为最小值. 这个特定的函数就是最速降线的函数表达式. 这就是最速降线问题的变分命题. 所以, 变分命题在实质上就是求泛函的极大值或极小值的问题. 在这里我们应该指出下列各点:

(甲) 在泛函的积分线上,  $x = 0$ ,  $x = x_1$  都是定值, 亦即是说, 在变分中,  $y(x)$  的两端界限已定不变, 其端值也不变, 即  $y(0) = 0$ ,  $y(x_1) = y_1$ ; 这种变分称为边界已定的变分.

(乙) 在 (1.4) 式中,  $\frac{dy}{dx}$  不言而喻应该是存在的, 至少是逐段连续的.

(丙) 这种变分, 除端点为定值的边界条件外, 没有其他条件, 这是一种最简单的变分.

### 第二个变分命题, 短程线 (Geodesic line) 问题

设  $\varphi(x, y, z) = 0$  为一已知曲面, 求曲面  $\varphi(x, y, z) = 0$  上所给两点  $(A, B)$  间长度最短的曲线. 这个最短曲线叫短程线 (图 1.2). 球面 (如地球表面) 上两点间的短程线即为通过两点的大圆. 这是一个典型的变分问题. 按曲面  $\varphi(x, y, z) = 0$  上  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$  两点间的曲线长度为

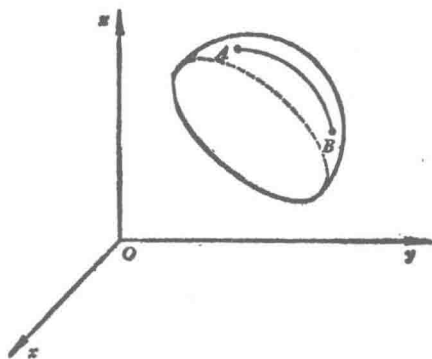


图 1.2 曲面上两点  $A, B$  间的短程线

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (1.5)$$

其中  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  满足  $\varphi(x, y, z) = 0$  的条件。于是，我们的变分命题可以写为：

在  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  满足  $\varphi(x, y, z) = 0$  的条件下，从一切  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  的函数中，选取一对  $y(x)$ ,  $z(x)$ ，使泛函  $L$  [即 (1.5) 式] 为最小。

这个变分命题和最速降线问题有下列相同和不同之点：

(甲) 它也是一个泛函求极值的问题，但这个泛函有两个可以选取的函数，即  $y(x)$ ,  $z(x)$ 。

(乙) 边界也是已定不变的，也有端点定值，即  $y(x_1) = y_1$ ,  $z(x_1) = z_1$ ;  $y(x_2) = y_2$ ,  $z(x_2) = z_2$ 。

(丙)  $y(x)$ ,  $z(x)$  之间必需满足：

$$\varphi[x, y(x), z(x)] = 0 \quad (1.6)$$

它是一个在 (1.6) 式条件下的变分求极值问题，不是像最速降线问题那样是无条件的。我们称这种命题为条件变分命题。这个问题已经在 1697 年为约翰·伯努利所解决<sup>[2]</sup>。但是这一类问题的普遍理论直到后来通过欧拉 [L. Euler (1744)]<sup>[4]</sup>，拉格朗日 [L. Lagrange (1762)]<sup>[5]</sup> 的努力才解决的。

### 第三个变分命题，等周问题 (isoperimetric problem)

在长度一定的封闭曲线中，什么曲线所围面积最大。这个问题在古希腊时已经知道答案是一个圆，但它的变分特性是一直到十八世纪才被欧拉察觉出来的 (1744)<sup>[4]</sup>。

将所给曲线用参数形式表达为  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ，因为这条曲线是封闭的，所以  $x(s_0) = x(s_1)$ ,  $y(s_0) = y(s_1)$ ，这条曲线的周长为：

$$L = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds \quad (1.7)$$

其所围面积  $R$  为 [根据格林 (Green) 公式]：

$$\begin{aligned}
 R &= \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_c (x dy - y dx) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left( x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) ds \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

等周问题于是可以写成:

在满足  $x(s_0) = x(s_1)$ ,  $y(s_0) = y(s_1)$  和 (1.7) 式条件下, 从一切  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  的函数中选取一对  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  函数, 使泛函  $R$  [即 (1.8) 式] 为最大。

这也是一个条件变分命题, 但其条件本身也是一个泛函 [即 (1.7) 式]; 同时, 其边界(这里是端点)也是已定不变的; 而且它是两个函数  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  所确定的泛函。

这三个历史上有名的变分命题, 都是17世纪末期提出的, 又都是18世纪上半叶解决的。解决过程中, 欧拉和拉格朗日创立了现在大家都熟知的变分法。这个变分法后来广泛地用在力学的各个方面, 对力学的发展起了很重要的作用。

十八世纪中叶, 柏林科学院内发生过一件和变分法有关的政治事件, 实质上是一件唯物主义和唯心主义的斗争事件<sup>[2, 6, 7]</sup>。当时的科学院院长马波托斯 [Maupertuis (1698—1759)] 为了拍普鲁士皇帝弗烈德立赫二世的马屁, 歌功颂德, 提出了一个宗教命题, 说什么“世界最优美, 他按最完善的可能创造万物”。并宣称这也是已故前院长莱比尼兹 (1646—1716) 的思想。有个荷兰数学家柯尼格 (Samuel Kőenig), 在1756年提出了莱比尼兹的一封信 (1707, 但没有发信地址), 说莱比尼兹并不赞成这种说法, 并以院士的身份写了一篇数学论文, 在院报上发表, 证明了在某些条件下, 并不像院长声称的那样, 走向最大, 而是走向最小的。马波托斯恼羞成怒, 借口莱比尼兹的信没有发信地址, 硬说这封信是柯尼格伪造的, 并把柯尼格的院士职位也撤消了。那时欧拉虽是变分法的创始人, 熟知极大极小和不稳定平衡问题, 作为科学院副院长, 但也公开支持这个决议。数学家伏尔泰 (Voltaire) 那时也是柏林科学院院士, 对此深为不满, 写了一篇讽刺论文“院长博士 (Dr. Akakia)”, 把马波托斯写得既傲慢又愚蠢, 把欧拉写得既天真又奴态十足, 但皇帝禁止出版这篇论文, 后来伏尔泰也逃离了普鲁士, 这篇论文是在荷兰出版的。

上述三个历史上有名的变分命题，都有从泛函求极值的共同性，端点或边界都是已定不变的，但有的有条件（第二、第三命题），有的没有条件（第一命题）。在有条件的变分命题中，有的条件是通常的函数条件（第二命题），有的条件则本身也是一种泛函（第三命题）。当然，边界已定不变的、没有条件的变分（第一命题）是最简单的，而且也是很有用的。这种边界已定不变的无条件变分还有许多例子。现在再举三个例子如下：

#### 第四个变分命题，最小旋转面问题

设有一正值函数  $y = y(x) > 0$ ，它所代表的曲线通过  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  两点，当这条曲线绕  $x$  轴旋转时，得一旋转面，求旋转面的面积最小的那个函数  $y = y(x)$ 。

即在  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$  的端点条件下求使泛函

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (1.9)$$

最小的函数  $y(x)$ 。

#### 第五个变分命题，费马（Fermat）原理

费马原理说：通过介质的光路，使光线通过这一段光路所需时间为最小值。以二维空间为例。设介质的折光率为  $\mu(x, y)$ ，而光线通过介质的速度  $v(x, y) = \frac{c}{\mu(x, y)}$ ，其中  $c$  为真空中的光速，是一个常数。从原点  $(0, 0)$  到  $(x, y)$  点的光行时间为

$$T = \int_0^l \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_0^{x_1} \mu(x, y) \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (1.10)$$

其中  $y = y(x)$  为待定的光线通过的路线。费马定理成为：“求  $y(x)$ ，使泛函  $T$  [(1.10) 式] 成为最小值”。

下面再增加一个条件变分命题的例子。

#### 第六个变分命题，悬索形状问题

求长度已知的均匀悬索的悬线形状。悬线形状是由悬线达到



最低位能的要求来决定的,而悬线的位能则由悬线的重心决定.设悬线各点的铅垂坐标为  $y(x)$ , 并通过  $A(0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$  两点, 悬索长度为

$$L = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.11)$$

悬索重心高度为

$$y_c = \frac{1}{L} \int_0^L y ds = \frac{1}{L} \int_0^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.12)$$

这个变分命题是: 在通过  $y(0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$  两点, 并满足(1.11)式的条件的一切曲线  $y = y(x)$  中, 求使  $y_c$  [即(1.12)式] 为极小的函数  $y = y(x)$ . 这是一个端点已定不变的条件变分命题.

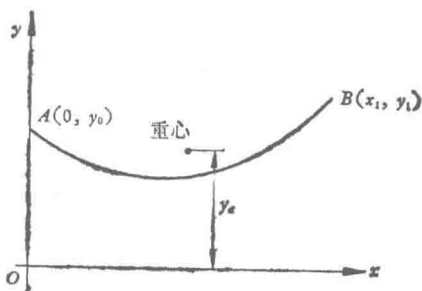


图 1.3 悬索的形状和坐标

归纳起来, 我们可以把最简单的边界已定不变的变分命题写为:

在通过  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$  两点的条件下, 选取  $y(x)$ , 使泛函

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (1.13)$$

为极值.

其中  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ ,  $F(x, y, y')$  为一已知的  $x, y, y'$  的函数,  $F(x, y, y')$  当然还有一些可微的条件.  $y(x)$  也视所处理的问题