运筹与管理科学丛书 28

参数可信性优化方法

刘彦奎　白雪洁　杨 凯　著

科学出版社

运筹与管理科学丛书 28

参数可信性优化方法

Parametric Credibilistic Optimization Methods

刘彦奎　白雪洁　杨　凯　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

在采用优化方法解决实际工程与管理问题时，由于实际问题本身的复杂性，模型中不确定参数的精确可能性分布通常无法获得. 本书基于 2 型模糊理论这一公理化体系，提出了当精确可能性分布无法获得时，如何从可变参数可能性分布这一新视角对实际决策问题进行建模，弥补了文献中基于名义可能性分布优化方法的不足. 本书介绍了参数可信性优化方法的最新研究进展，包括理论基础、模型的建立与分析以及参数优化方法的应用等.

本书可供从事运筹学、管理科学、应用数学、信息科学研究的科研人员阅读参考，同时也可作为相关专业的高年级本科生或研究生的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

参数可信性优化方法/刘彦奎，白雪洁，杨凯著. —北京：科学出版社，2017.12
(运筹与管理科学丛书；28)
ISBN 978-7-03-054959-4

Ⅰ. ①参… Ⅱ. ①刘… ②白… ③杨… Ⅲ. ①模糊代数–研究… Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 260563 号

责任编辑：胡庆家 / 责任校对：张凤琴
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

2017 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2017 年 12 月第一次印刷 印张：15
字数：286 000

定价：89.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:“运筹帷幄之中, 决胜千里之外. ”

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于 20 世纪 50 年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前　言

通过对国内外学者在模糊优化领域研究现状的分析，我们发现目前优化模型中不确定参数的可能性分布大都要求是固定的. 在求解实际决策问题时，决策者忽略可能性程度的微小波动，好像优化模型中不确定参数的可能性分布是能够精确确定的.

然而作者最近的研究表明，当不确定参数的可能性分布无法精确获得时，文献中基于名义可能性分布的优化方法存在一定的不足. 也就是说，在名义可能性分布具有微小波动情形下，名义最优解的最优性甚至可行性通常会遭到破坏.

本书基于 2 型模糊理论这一公理化体系，提出当精确可能性分布无法获得时，如何从可变参数可能性分布这一新视角对实际决策问题进行建模. 本书共分 6 章介绍参数可信性优化方法的最新研究进展，包括理论基础、模型的建立与分析以及参数优化方法的应用等.

第 1 章介绍 2 型模糊理论中的基本概念，回顾期望值、最小风险和风险值三类可信性优化模型，并给出了最小风险与风险值两类优化模型之间的联系.

第 2 章讨论简约第二可能性分布的可能性与可信性风险值方法. 首先定义正规模糊变量的风险值，并将其作为第二可能性分布的代表值，提出风险值简约方法. 进而本章还研究了风险值简约模糊变量的半偏差和二阶矩等数字特征.

第 3 章主要介绍投资组合问题的均值–矩方法. 首先讨论了收益具有固定可能性分布情形下的均值–矩优化模型，进而研究收益服从参数可能性分布的参数可信性优化方法.

第 4 章主要介绍模糊环境下的 p 枢纽中心问题. 首先，本章采用可信性测度理论建立固定可能性分布下的 p 枢纽中心问题的数学模型. 其次，本章采用 2 型模糊理论建立可变可能性分布下的模糊 p 枢纽中心问题的数学模型.

第 5 章主要介绍模糊环境下供应链网络设计问题. 本章通过模糊变量刻画现实供应链网络设计问题中的不确定参数，在固定可能性分布和可变参数可能性分布两种不同情形下研究供应链网络设计问题.

第 6 章主要介绍模糊环境下的应急物资预置问题. 在不确定运输费用、出救点的供应量、受灾点的需求量和道路容量服从可变参数可能性分布的情形下，讨论如何制定最优的应急物资预置计划.

本书作者所在“风险管理与金融工程”实验室的研究生以及青年教师，他们在学习和讨论本书过程中，对某些内容提出过很好的意见和建议，借此机会表示感谢.

本书的研究工作得到国家自然科学基金 (No.61374184) 以及河北省自然科学青年基金 (No.A2016204057) 的资助, 在此表示衷心的感谢.

作 者

2017 年 6 月

目　录

第1章 预 备 知 识

本章介绍 2 型模糊理论中的基本概念 [80], 包括模糊可能性测度、模糊可能性空间、2 型模糊变量、2 型可能性分布、2 型模糊变量的独立性, 并给出 2 型模糊变量的保型运算. 此外, 本章回顾三类重要的可信性优化模型 —— 期望值模型、最小风险模型和风险值模型, 并讨论两阶段最小风险模型与风险值模型之间的关系 [73].

1.1 基 本 概 念

本节介绍模糊可能性理论的相关概念. 模糊可能性空间由论域、备域和模糊可能性测度三部分组成. 模糊可能性测度是一个定义在备域上取正规模糊变量值的集函数, 而 2 型模糊变量是一个由论域到实数集合的映射. 模糊可能性理论进一步发展了传统的模糊集理论 (见文献 [52, 89, 95, 125, 127, 149, 150, 151]). 关于模糊可能性理论, 有兴趣的读者可以参考文献 [158].

1.1.1 模糊可能性空间

定义 1.1 设 Γ 是一个非空的论域, 备域 $\mathcal{A}$ 是一个由 Γ 的子集所构成的集类, 并且满足下面的条件:

(A1) $\Gamma \in \mathcal{A}$;

(A2) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\Gamma \setminus A \in \mathcal{A}$;

(A3) 若 $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, 则 $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$, 其中 I 是任意的指标集,

称二元组 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 为一个备域空间.

定义 1.2 设 Γ 是一个非空的论域, $\mathcal{A}$ 是 Γ 上的一个备域, Pos 是定义在备域 $\mathcal{A}$ 上的一个集函数. 如果 Pos 满足下面的条件:

(Pos1) $\mathrm{Pos}(\varnothing) = 0$, 且 $\mathrm{Pos}(\Gamma) = 1$;

(Pos2) 对 $\mathcal{A}$ 的任意子类 $\{A_i \mid i \in I\}$, 有

$$\mathrm{Pos}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup_{i\in I} \mathrm{Pos}(A_i),$$

称它是一个可能性测度, 称三元组 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Pos})$ 为一个可能性空间.

定义 1.3[66] 设 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 是一个备域空间, Cr 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的一个集函数. 如果对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\mathrm{Cr}(A) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Pos}(A) - \mathrm{Pos}(A^c)\right),$$

则称 Cr 是一个可信性测度, 称三元组 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Cr})$ 为一个可信性空间.

定义 1.4 设 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Pos})$ 是一个可能性空间, 如果 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$ 是一个由可能性空间到空间 $(\Re^m, \mathcal{P}(\Re^m))$ 上的向量值函数, 并且满足对任意的 $B \in \mathcal{P}(\Re^m)$, 有

$$\boldsymbol{\xi}^{-1}B = \{\gamma \in \Gamma \mid \boldsymbol{\xi}(\gamma) \in B\} \in \mathcal{A},$$

则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为定义在可能性空间的一个 m 维模糊向量.

当 $m = 1$ 时, 称 ξ 为一个模糊变量.

定义 1.5[80] 设 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Pos})$ 是一个可能性空间. 如果 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$ 是一个由可能性空间到空间 $[0,1]^m$ 上的可测映射, 即对任意的 $\gamma \in \Gamma$, 有

$$\boldsymbol{\xi}(\gamma) = (\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), \cdots, \xi_m(\gamma)) \in [0,1]^m,$$

则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为定义在可能性空间的一个 m 维正规模糊向量.

当 $m = 1$ 时, 称 ξ 为一个正规模糊变量, 记作 RFV.

下面我们用 $\mathcal{R}([0,1])$ 表示 $[0,1]$ 上的全体 RFV.

定义 1.6[80] 设 Γ 是一个非空的论域, $\mathcal{A}$ 是 Γ 上的一个备域, $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{R}([0,1])$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的一个集函数, 且 $\{\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}(A) | \text{原子} A \in \mathcal{A}\}$ 是一族相互独立的正则模糊变量. 如果 $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}$ 满足下面两个条件:

(Pos1) $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}(\varnothing) = \tilde{0}$;

(Pos2) 对于 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 的任意子类 $\{A_i \mid i \in I\}$(有限, 可数或不可数), 有

$$\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}(A_i),$$

则称 $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}$ 为一个模糊可能性测度.

进一步, 若 $\mu_{\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}(\Gamma)}(1) = 1$, 则称 $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}$ 是一个正则模糊可能性测度. 称三元组 $(\Gamma, \mathcal{A}, \tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os})$ 为一个模糊可能性空间, 记作 FPS.

1.1.2 2 型模糊变量及分布

定义 1.7[80] 假设 $(\Gamma, \mathcal{A}, \tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os})$ 是一个模糊可能性空间. 如果对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \Re^m$, 集合 $\{\gamma \in \Gamma \mid \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\gamma) \leqslant x\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, 即

$$\left\{\gamma \in \Gamma \mid \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\gamma) \leqslant x\right\} = \left\{\gamma \in \Gamma \mid \tilde{\xi}_1(\gamma) \leqslant x_1, \cdots, \tilde{\xi}_m(\gamma) \leqslant x_m\right\} \in \mathcal{A},$$

则称映射 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m):\Gamma\mapsto\Re^m$ 是一个 m 维的2 型模糊向量.

当 $m=1$ 时, 则称映射 $\widetilde{\xi}:\Gamma\mapsto\Re$ 为一个2 型模糊变量.

在文献 [85] 中, 2 型模糊集通常是由 2 型隶属函数来定义的; 而在模糊可能性理论中, 2 型可能性分布定义如下.

定义 1.8 [80] 设 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m)$ 是定义在模糊可能性空间 $(\Gamma,\mathcal{A},\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os})$ 上的一个 2 型模糊向量. $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的第二可能性分布函数, 记为 $\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x)$, 是一个由 $\Re^m$ 到集合 $\mathcal{R}[0,1]$ 上的映射, 且满足

$$\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x)=\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}\left\{\gamma\in\Gamma\middle|\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\gamma)=x\right\},\quad x\in\Re^m;$$

而 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的2 型可能性分布函数, 记为 $\mu_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x,u)$, 是一个由 $\Re^m\times J_x$ 到 $[0,1]$ 上的映射, 且满足

$$\mu_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x,u)=\mathrm{Pos}\left\{\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x)=u\right\},\quad (x,u)\in\Re^m\times J_x,$$

其中 Pos 是一个由 $\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x)$ 的分布诱导出的可能性测度, $J_x\subset[0,1]$ 是 $\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x)$ 的支撑, 即 $J_x=\{u\in[0,1]\mid\mu_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x,u)>0\}$.

2 型模糊向量 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m)$ 的第二可能性分布函数和 2 型可能性分布函数分别称为 $\widetilde{\xi}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的第二联合可能性分布函数和 2 型联合可能性分布函数.

2 型模糊变量和 2 型可能性分布, 把对抽象空间 $(\Gamma,\mathcal{A},\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os})$ 的研究转化为对具体空间 $(\Re^m,\mathcal{P}(\Re^m),\tilde{\Pi})$ 的研究, 其中 $\tilde{\Pi}$ 是由 $\boldsymbol{\xi}$ 通过下式

$$\tilde{\Pi}(A)=\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}(\{\gamma\in\Gamma\mid\boldsymbol{\xi}(\gamma)\in A\}),\quad A\in\mathcal{P}(\Re^m)$$

诱导出的 $\mathcal{P}(\Re^m)$ 上的模糊可能性测度. 与抽象模糊可能性空间相比, 空间 $(\Re^m,\mathcal{P}(\Re^m),\tilde{\Pi})$ 更容易理解和应用. 这种基于函数论的观点研究 2 型模糊性, 为我们采用现代数学工具去研究模糊性带来便利.

在本书以后的讨论中, 当谈及 2 型模糊向量, 通常是指: (1) 它是定义在某个模糊可能性空间上的向量; (2) 它的第二可能性分布和 2 型可能性分布是已知的.

定义 1.9 [80] 2 型模糊向量 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}\,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=\left\{(x,u)\in\Re^m\times[0,1]\middle|\mu_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x,u)>0\right\},$$

其中 $\mu_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x,u)$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的 2 型可能性分布函数.

1.1.3 边缘分布及独立性

假设 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m)$ 是一个定义在模糊可能性空间 $(\Gamma,\mathcal{A},\widetilde{\mathrm{Pos}})$ 上的 2 型模糊向量. 已知它的第二可能性分布函数为

$$\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\widetilde{\mathrm{Pos}}\left\{\gamma\in\Gamma\middle|\widetilde{\xi}_1(\gamma)=x_1,\cdots,\widetilde{\xi}_m(\gamma)=x_m\right\},$$

其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\Re^m$. 一般地, 称 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的子向量的第二可能性分布为第二边缘可能性分布. 下面我们要研究的问题是根据联合分布 $\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x)$ 确定 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的子向量的第二可能性分布.

当 $1\leqslant r\leqslant m$ 且 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_{i_1}(\gamma)=x_{i_1},\widetilde{\xi}_{i_2}(\gamma)=x_{i_2},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r}(\gamma)=x_{i_r}\}\\=&\bigcup_{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_{m-r}}}\left\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_1(\gamma)=x_1,\widetilde{\xi}_2(\gamma)=x_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m(\gamma)=x_m\right\}\in\mathcal{A},\end{aligned}$$

因此 $(\widetilde{\xi}_{i_1},\widetilde{\xi}_{i_2},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r})$ 是定义在模糊可能性空间 $(\Gamma,\mathcal{A},\widetilde{\mathrm{Pos}})$ 上的一个 2 型模糊向量. 而且, 对于任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\Re^m$, $\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_1(\gamma)=x_1,\widetilde{\xi}_2(\gamma)=x_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m(\gamma)=x_m\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个事件, 所以, 可得如下定义.

定义 1.10[80] 假设 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m)$ 是一个定义在 $(\Gamma,\mathcal{A},\widetilde{\mathrm{Pos}})$ 上的 2 型模糊向量. 对于任意 $1\leqslant r\leqslant m$ 和 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m$, $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 关于 $(\widetilde{\xi}_{i_1},\widetilde{\xi}_{i_2},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r})$ 的第二边缘可能性分布函数 定义为: 对于任意 $(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})\in\Re^r$, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mu}_{(\widetilde{\xi}_{i_1},\widetilde{\xi}_{i_2},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r})}(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})\\=&\sup_{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_{m-r}}}\widetilde{\mathrm{Pos}}\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_1(\gamma)=x_1,\widetilde{\xi}_2(\gamma)=x_2,\cdots,\widetilde{\xi}_m(\gamma)=x_m\}\\=&\sup_{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_{m-r}}}\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x_1,x_2,\cdots,x_m),\end{aligned}$$

其中 $\{j_1,\cdots,j_{m-r}\}=\{1,\cdots,m\}\backslash\{i_1,\cdots,i_r\}$, $\sup_{x_{j_1},\cdots,x_{j_{m-r}}}$ 是 $\widetilde{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $\Re^{m-r}$ 上的上确界.

$\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 关于 $(\widetilde{\xi}_{i_1},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r})$ 的 2 型边缘可能性分布定义为: 对于任意 $(x_{i_1},\cdots,x_{i_r},u)\in\Re^{m-r}\times J_{(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})}$, 有

$$\begin{aligned}&\mu_{(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_r})}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r},u)\\=&\mathrm{Pos}\left\{\mu u_{(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_r})}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r})=u\right\},\end{aligned}$$

其中 Pos 是一个由 $\widetilde{\mu}_{(\widetilde{\xi}_{i_1},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r})}(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})$ 的分布诱导出的可能性测度, $J_{(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})}\subset[0,1]$ 是 $\widetilde{\mu}_{(\widetilde{\xi}_{i_1},\cdots,\widetilde{\xi}_{i_r})}(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})$ 的支撑.

在本节中, 我们已经讨论由联合分布确定边缘分布. 假设 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是定义在 $(\Gamma,\mathcal{A},\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os})$ 上的 2 型模糊变量, 并且假定 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的第二可能性分布已知. 下面要讨论如何根据边缘分布来确定 2 型模糊向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$ 的第二联合可能性分布函数. 为此先引入2 型模糊变量独立性的概念.

定义 1.11 [80] 假设 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是定义在模糊可能性空间 $(\Gamma,\mathcal{A},\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os})$ 上的一个 2 型模糊变量. 若对于任意的 $B_i\subset\Re, i=1,2,\cdots,m$, 有

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}\left(\left\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_1(\gamma)\in B_1,\cdots,\widetilde{\xi}_m(\gamma)\in B_m\right\}\right)\\
&=\min_{1\leqslant i\leqslant m}\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}\left(\left\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_i(\gamma)\in B_i\right\}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}(\{\gamma\in\Gamma\mid\widetilde{\xi}_i(\gamma)\in B_i\})(i=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的正规模糊变量, 则称 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的.

如果对于任意整数 $m\geqslant 2$ 和 $i_1<i_2<\cdots<i_m$, 2 型模糊变量 $\widetilde{\xi}_{i_k}(k=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的, 则称 2 型模糊变量族 $\{\widetilde{\xi}_i\mid i\in I\}$ 为相互独立的.

一般地, 在一个 2 型模糊向量的第二边缘可能性分布函数之间的关系确定之前, 第二联合可能性分布是不能由第二边缘可能性分布确定的. 但是当 2 型模糊变量相互独立时, 它们的第二边缘可能性分布就可以确定第二联合可能性分布.

1.2 2 型模糊变量的保型运算

下面介绍三种常见的 2 型模糊变量.

假设 $r_i\in\Re(i=1,2,3)$ 满足 $r_1<r_2<r_3$, 对应的可能性分布为

$$
\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{x-r_1}{r_2-r_1}, & x\in[r_1,r_2],\\[2mm] \dfrac{r_3-x}{r_3-r_2}, & x\in(r_2,r_3].\end{cases}\tag{1.1}
$$

称 ξ 为 2 型三角模糊变量, 如果对任意 $x\in[r_1,r_3]$, 它的第二可能性分布 $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ 为正规模糊变量

$$
(\mu(x)-\theta_l\min\{1-\mu(x),\mu(x)\},\mu(x),\mu(x)+\theta_r\min\{1-\mu(x),\mu(x)\}),
$$

其中参数 $\theta_l,\theta_r\in[0,1]$ 用来刻画 ξ 取值为 x 的不确定程度, 称 $\mu(x)$ 为名义可能性分布函数, 由 (1.1) 式确定. 简便起见, 我们把满足上述分布的 2 型三角模糊变量 ξ 记为 $(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{r}_3;\theta_l,\theta_r)$.

假设 $r_i \in \Re(i=1,2,3,4)$ 满足 $r_1 < r_2 \leqslant r_3 < r_4$, 对应的可能性分布为

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{x-r_1}{r_2-r_1}, & x\in[r_1,r_2],\\ 1, & x\in(r_2,r_3],\\ \dfrac{r_4-x}{r_4-r_3}, & x\in(r_3,r_4].\end{cases} \tag{1.2}$$

称 ξ 为 2 型梯形模糊变量, 如果对任意 $x \in [r_1, r_4]$, 它的第二可能性分布 $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ 为正规模糊变量

$$(\mu(x)-\theta_l\min\{1-\mu(x),\mu(x)\},\mu(x),\mu(x)+\theta_r\min\{1-\mu(x),\mu(x)\}),$$

其中参数 $\theta_l, \theta_r \in [0,1]$ 用来刻画 ξ 取值为 x 的不确定程度, 称 $\mu(x)$ 为名义可能性分布函数, 由 (1.2) 式确定. 简便起见, 我们把满足上述分布的 2 型梯形模糊变量 ξ 记为 $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4; \theta_l, \theta_r)$.

假设 $x \in \Re$, 对应的可能性分布为

$$\mu(x)=\exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}. \tag{1.3}$$

称 ξ 为 2 型正态模糊变量, 如果对任意 $x \in \Re$, 它的第二可能性分布 $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ 为正规模糊变量

$$(\mu(x)-\theta_l\min\{1-\mu(x),\mu(x)\},\mu(x),\mu(x)+\theta_r\min\{1-\mu(x),\mu(x)\}),$$

其中参数 θ_l, $\theta_r \in [0,1]$ 用来刻画 ξ 取值为 x 的不确定程度, 称 $\mu(x)$ 为名义可能性分布函数, 由 (1.3) 式确定. 简便起见, 我们把满足上述分布的2 型正态模糊变量 ξ 记为 $\tilde{n}(\mu, \sigma^2; \theta_l, \theta_r)$.

2 型三角模糊变量、2 型梯形模糊变量和 2 型正态模糊变量的线性组合具有下面的保型性.

定理 1.1 [74] 假设 $\tilde{\xi}_i = (\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, \tilde{r}_{i3}; \theta_{il}, \theta_{ir})(i=1,2,\cdots,n)$ 是定义在模糊可能性空间 $(\Gamma_i, \mathcal{A}_i, \widetilde{\mathrm{Pos}}_i)$ 上的 2 型三角模糊变量, 且 $\tilde{\xi}_i$ 的名义可能性分布函数相互独立. 那么对任意实数 x_i, $\tilde{\xi} = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{\xi}_i$ 是 2 型三角模糊变量 $(r_1(x), r_2(x), r_3(x); \theta_l, \theta_r)$, 其中

$$r_1(x)=\sum_{i=1}^n\left(x_i^+r_{i1}-x_i^-r_{i3}\right),\quad r_2(x)=\sum_{i=1}^n x_ir_{i2},\quad r_3(x)=\sum_{i=1}^n\left(x_i^+r_{i3}-x_i^-r_{i1}\right),$$

$$\theta_l=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\theta_{il},\quad \theta_r=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\theta_{ir},\quad x_i^+=\max\{x_i,0\},\quad x_i^-=\max\{-x_i,0\}.$$

定理 1.2 [74] 假设 $\tilde{\xi}_i = (\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, \tilde{r}_{i3}, \tilde{r}_{i4}; \theta_{il}, \theta_{ir})(i=1,2,\cdots,n)$ 是定义在模糊可能性空间 $(\Gamma_i, \mathcal{A}_i, \widetilde{\mathrm{Pos}}_i)$ 上的 2 型梯形模糊变量, 且 $\tilde{\xi}_i$ 的名义可能性分布函数相

互独立. 那么对任意实数 x_i, $\tilde{\xi}=\sum_{i=1}^n x_i\tilde{\xi}_i$ 是 2 型梯形模糊变量 $(r_1(x), r_2(x), r_3(x), r_4(x);\theta_l,\theta_r)$, 其中

$$r_1(x)=\sum_{i=1}^n\left(x_i^+r_{i1}-x_i^-r_{i4}\right),\quad r_2(x)=\sum_{i=1}^n\left(x_i^+r_{i2}-x_i^-r_{i3}\right),$$

$$r_3(x)=\sum_{i=1}^n\left(x_i^+r_{i3}-x_i^-r_{i2}\right),\quad r_4(x)=\sum_{i=1}^n\left(x_i^+r_{i4}-x_i^-r_{i1}\right),$$

$$\theta_l=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\theta_{il},\quad \theta_r=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\theta_{ir},$$

$$x_i^+=\max\{x_i,0\},\quad x_i^-=\max\{-x_i,0\}.$$

定理 1.3[74] 假设 $\tilde{\xi}_i=\tilde{n}(\mu_i,\sigma_i^2;\theta_{il},\theta_{ir})(i=1,2,\cdots,n)$ 是定义在模糊可能性空间 $(\Gamma_i,\mathcal{A}_i,\widetilde{\mathrm{Pos}}_i)$ 上的 2 型正态模糊变量, 且 $\tilde{\xi}_i$ 的名义可能性分布函数 $n(\mu_i,\sigma_i^2)$ 相互独立. 那么对任意实数 x_i, $\tilde{\xi}=\sum_{i=1}^n x_i\tilde{\xi}_i$ 是 2 型正态模糊变量 $\tilde{n}(\mu,\sigma^2;\theta_l,\theta_r)$, 其中

$$\mu=\sum_{i=1}^n x_i\mu_i,\quad \sigma=\sum_{i=1}^n x_i\sigma_i,\quad \theta_l=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\theta_{il},\quad \theta_r=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\theta_{ir}.$$

1.3 基本可信性优化模型

可信性优化是指基于可信性测度理论的优化方法. 本节主要介绍三类重要的可信性优化模型: 期望值模型、最小风险模型和风险值模型. 每一类优化模型又分为单阶段和两阶段模型.

1.3.1 期望值模型

假设 x 为决策向量, $\boldsymbol{\xi}$ 为模糊向量, $f(x,\boldsymbol{\xi})$ 为目标函数, $g_j(x,\boldsymbol{\xi})$ 表示约束条件,$j=1,2,\cdots,p$. 具有以下形式的模型

$$\begin{array}{ll}\max & f(x,\boldsymbol{\xi})\\ \text{s.t.} & g_j(x,\boldsymbol{\xi})\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,p\end{array}\tag{1.4}$$

意义不明确. 这是因为在 (1.4) 式中最大化模糊目标函数 $f(x,\boldsymbol{\xi})$ 不明确; 在 (1.4) 式中约束条件 $g_j(x,\boldsymbol{\xi})\leqslant 0$ 意义也不明确.

为了给出明确的可信性优化模型, 可以取模糊变量的期望, 将模糊规划问题转化成为确定数学规划问题. 标准的单阶段期望值模型 [66] 可以表示成下面的形式:

$$\begin{array}{ll}\max & \mathrm{E}[f(x,\boldsymbol{\xi})]\\ \text{s.t.} & \mathrm{E}[g_j(x,\boldsymbol{\xi})]\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,p,\end{array}$$