经全国中小学教材审定委员会
2006年初审通过

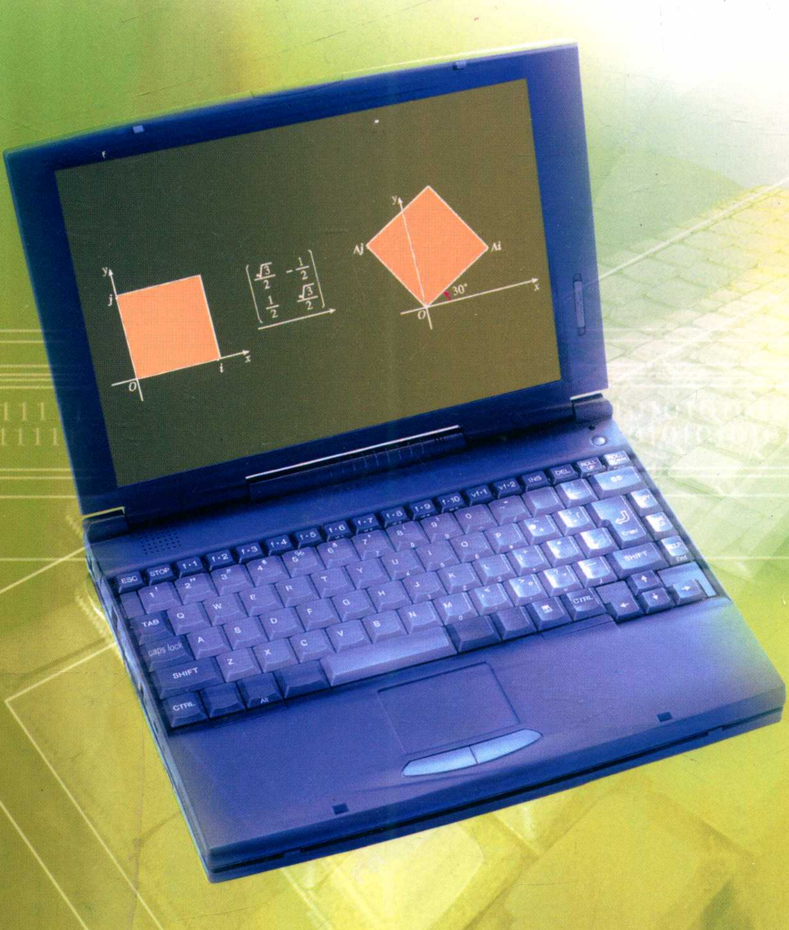
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

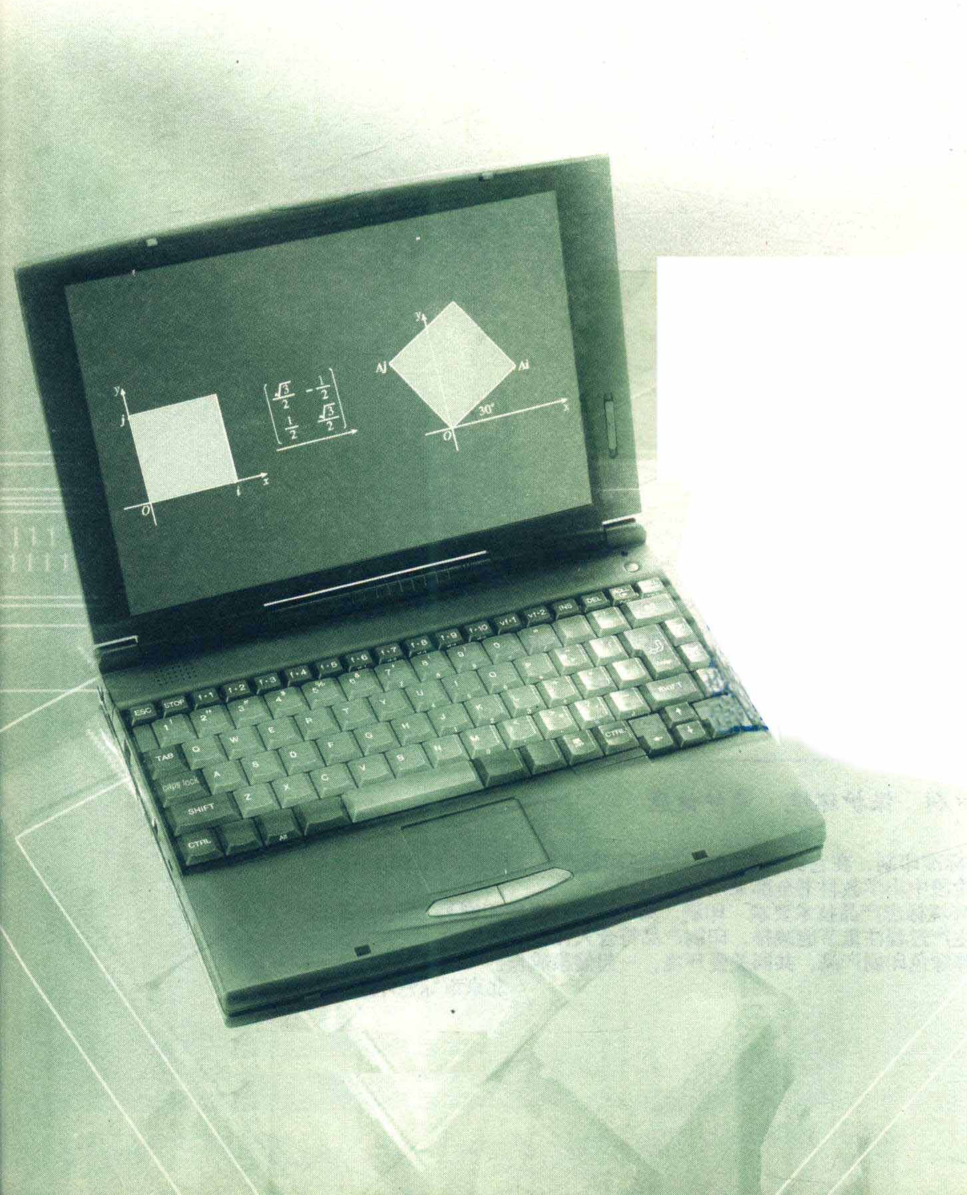
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-2

矩阵与变换

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修　4-2　A版　矩阵与变换
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　北京天宇星印刷厂
版　　次　2008年12月第3版
印　　次　2017年7月第24次印刷
开　　本　890毫米×1240毫米　1/16
印　　张　5.25
字　　数　114千字
书　　号　ISBN 978-7-107-19623-2
定　　价　5.30元
价格依据文件号：京发改规［2016］13号

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求　印刷　第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

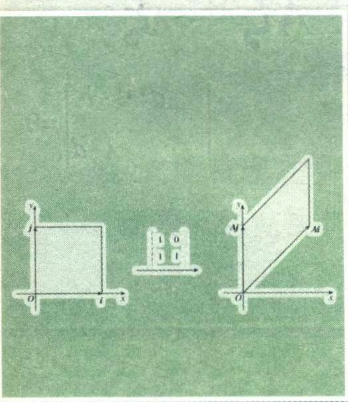
北京市绿色印刷工程

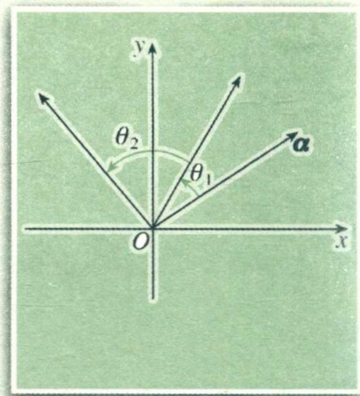
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要作者：李龙才　章建跃
责任编辑：俞求是

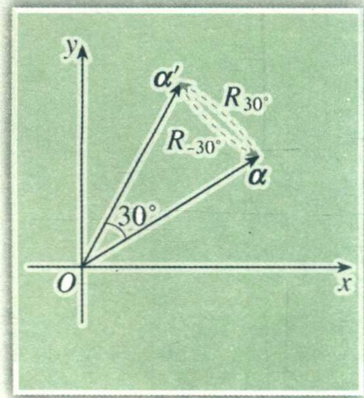
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

目 录

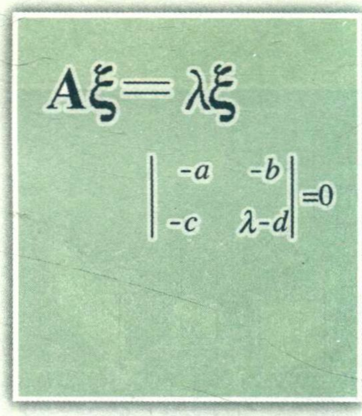




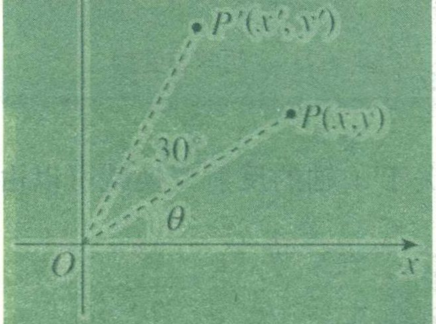
y
θ2
θ1
α
O
x

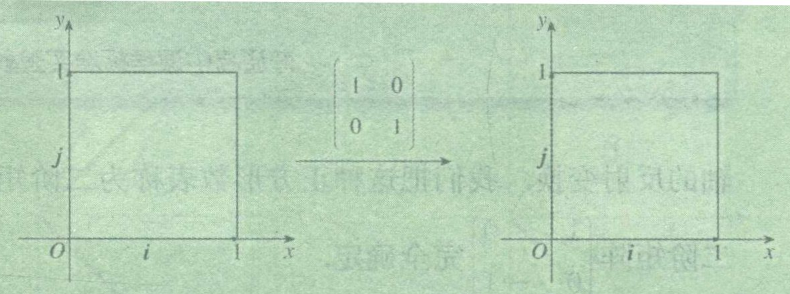


y
α′
R30°
R-30°
α
30°
O
x



Aξ= λξ
-a -b
-c λ-d
=0





引言

在初中，我们已学过轴对称、旋转、相似等平面图形的变换．例如，我们知道，把一个平面图形沿着平面上一条直线 l 折叠，可以得到它关于直线 l 对称的图形，这个图形和原图形全等，新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点，连接任意一对对称点的线段被直线 l 垂直平分．像这样，由一个平面图形（如图 0-1 中的$\triangle ABC$）得到它关于某条直线 l 的轴对称图形（图 0-1 中的$\triangle A'B'C'$）叫做平面图形的轴对称变换．

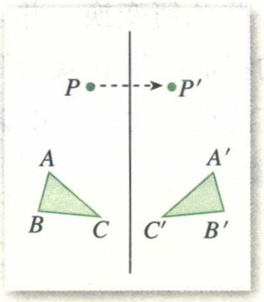


图 0-1

我们也可以这样来看平面图形的轴对称变换：如图 0-1，设直线 l 在平面 α 内，那么对于平面 α 内任意一点 P，都存在平面 α 内唯一一点 P'，使 P' 与 P 关于直线 l 对称．我们称这样的对应关系为平面 α 关于直线 l 的反射变换．这样，经过这个反射变换，平面 α 内的$\triangle ABC$ 就被对应到$\triangle A'B'C'$．

进一步地，如果在平面 α 内建立直角坐标系 Oxy，那么平面内的点和有序实数对（x，y）之间就建立了一一对应．这样，我们又可以从代数的角度来研究反射变换．例如，关于 x 轴的反射变换，把平面 α 内的任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于 x 轴的对称点 $P'(x', y')$．对于坐标 $P(x, y)$ 与 $P'(x', y')$，可以得到

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases} \qquad ①$$

显然，表达式①完全刻画了关于 x 轴的反射变换．因此，也称表达式①为关于 x 轴的反射变换．

我们将反射变换①变形为

$$\begin{cases} x'=x+0y, \\ y'=0x-y. \end{cases} \qquad ②$$

由于②式由右端式子中 x，y 的系数唯一确定，我们把它们按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，就得到正方形数表 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$．这个正方形数表也完全刻画了关于 x

轴的反射变换．我们把这种正方形数表称为二阶矩阵．这样关于 x 轴的反射变换就可以由二阶矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$完全确定．

类似地，在直角坐标系 Oxy 中，平面内的许多变换都具有形式

$$\begin{cases}x'=ax+by,\\y'=cx+dy,\end{cases} \tag{③}$$

其中 a，b，c，d 均为常数．变换③可以由二阶矩阵$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$完全确定．

数学中经常通过引入新的工具，建立不同对象之间的联系来研究问题．例如，引入平面直角坐标系后，我们可以通过方程来研究平面曲线，也可以通过平面曲线来研究方程．在引进二阶矩阵概念后，能否对二阶矩阵与平面内的某些几何变换进行类似的研究呢？这就是本专题要解决的主要问题．

本专题将以矩阵为工具，研究一些几何变换，并以平面图形的变换为背景，讨论二阶矩阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量的概念等，用变换的观点理解解二元一次方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性，为进一步学习打下基础．

第一讲 线性变换与二阶矩阵

在平面直角坐标系中，平面内的点和有序实数对有一一对应关系．这样，借助直角坐标系，我们可以用代数方法表示几何变换，进而就可以从代数的角度研究几何变换．本讲中，我们将在建立一些几何变换的代数表示的基础上，引入线性变换的概念，通过线性变换引入二阶矩阵，并进一步建立线性变换和二阶矩阵的联系，用矩阵研究线性变换的基本性质．

一 线性变换与二阶矩阵

（一）几类特殊线性变换及其二阶矩阵

1. 旋转变换

探究

将直角坐标系中所有点绕原点沿逆时针方向旋转一个角度 α．设平面内点 $P(x, y)$ 经过旋转后变成点 $P'(x', y')$，那么如何用 P 的坐标 (x, y) 表示 P' 的坐标 (x', y')？

我们先从简单情形开始．

如图 1.1-1 所示，在直角坐标系 Oxy 内，每个点都绕原点 O 按逆时针方向旋转 $180°$．设点 $P(x, y)$ 经过旋转后变成点 $P'(x', y')$，x'，y' 与 x，y 有什么关系呢？

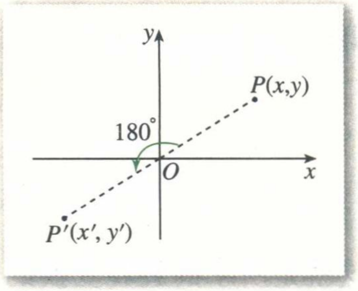


图 1.1-1

可以得到，$x'=-x$，$y'=-y$，即

$$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=-y. \end{cases} \quad ①$$

我们将①称为旋转角为 $180°$ 的旋转变换的表达式，它建立了平面内的每个点 P 到其对应点 P' 的对应关系，我们称 P' 是 P 在这个旋转变换作用下的像．

例 1 在直角坐标系 Oxy 内，将每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 $30°$ 的变换称为旋

转角是 30°的旋转变换.

（1）求点 $A(1,0)$ 在这个旋转变换作用下的像 A'；

（2）写出这个旋转变换的表达式.

解：（1）如图 1.1-2，不难看出，点 A' 的横坐标和纵坐标分别为

$$\begin{aligned} x &= |OA|\cos 30^\circ \\ &= 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y &= |OA|\sin 30^\circ \\ &= 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此，点 $A(1,0)$ 在这个旋转变换作用下的像为 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$；

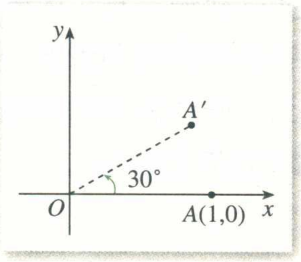


图 1.1-2

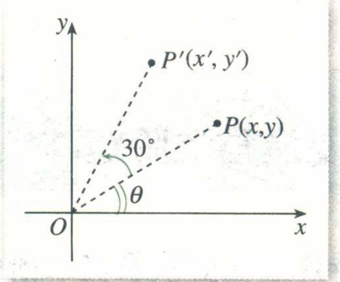


图 1.1-3

（2）如图 1.1-3，分别连接 OP，OP'，设 $OP=OP'=r$，记 θ 是以 x 轴的正半轴为始边、以射线 OP 为终边的角. 由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r\cos(\theta+30^\circ), \\ y'=r\sin(\theta+30^\circ). \end{cases}$$

由两角和的三角函数公式得

$$\begin{cases} x'=x\cos 30^\circ-y\sin 30^\circ, \\ y'=x\sin 30^\circ+y\cos 30^\circ, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y, \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases} \qquad ②$$

这就是所求的旋转变换的表达式.

由于②式由其右端式子中 x，y 的系数唯一确定，我们把这些系数按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，得到一个正方形数表 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. 可以发现，这个正

方形数表由旋转角是30°的旋转变换唯一确定；反之，旋转角是30°的旋转变换也可以由这个正方形数表唯一确定．所以，这个正方形数表唯一刻画了旋转角是30°的旋转变换．

事实上，在平面直角坐标系Oxy内，很多几何变换都具有下列形式：

$$\begin{cases}x'=ax+by,\\ y'=cx+dy.\end{cases} \quad ③$$

其中系数a，b，c，d均为常数．我们把形如③的几何变换叫做线性变换❶（linear transformation），③式叫做这个线性变换的坐标变换公式．$P'(x', y')$是$P(x, y)$在这个线性变换作用下的像．

❶ 在表达式③中，x'，y'都是关于x，y的常数项为0的一次式，通常称“一次表达式”为“线性表达式”．

与例1的解答一样，我们引进正方形数表$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，那么线性变换③可以由$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$唯一确定；反之，$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$也可以由线性变换③唯一确定．

像这样，由4个数a，b，c，d排成的正方形数表$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$称为二阶矩阵❷(matrix)，数$a$，$b$，$c$，$d$称为矩阵的元素．在二阶矩阵中，横的叫行，从上到下依次称为矩阵的第一行、第二行；竖的叫列，从左到右依次称为矩阵的第一列、第二列．矩阵通常用大写的英文字母$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示．

❷ 二阶矩阵仅仅是一个包含两行、两列的数表，它既不是数，也不是代数式．

元素全为0的二阶矩阵$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$称为零矩阵，简记为$\mathbf{0}$．矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$称为二阶单位矩阵，记为$\boldsymbol{E}_2$．

有了二阶矩阵$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，我们就可以利用它来研究线性变换③．

与例1(2)的解答过程一样，我们可以得到直角坐标系Oxy内的每个点绕原点O按逆时针方向旋转α角的旋转变换（通常记为R_α）的坐标变换公式：

如图1.1-4，分别连接OP，OP'，设$OP=OP'=r$，记θ是以x轴的正半轴为始边、以射线OP为终边的角．由三角函数的定义得

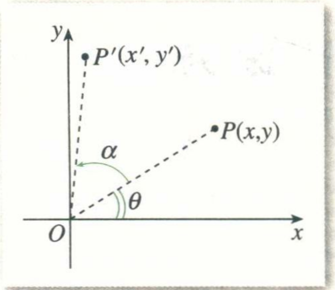


图1.1-4

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'=r\cos(\theta+\alpha),\\ y'=r\sin(\theta+\alpha).\end{cases}$$

所以，绕原点O按逆时针方向旋转α角的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{cases} \quad ④$$

对应的二阶矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

2. 反射变换

在引言中我们已经看到，关于 x 轴的反射变换把直角坐标系 Oxy 内的任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于 x 轴的对称点 $P'(x', y')$，相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases}$$

与之对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

同样，关于 y 轴的反射变换把直角坐标系 Oxy 内的任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于 y 轴的对称点 $P'(x', y')$. 相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

我们知道，在直角坐标系 Oxy 内，任意一点 $P(x, y)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P'(y, x)$. 所以，关于直线 $y=x$ 的反射变换把直角坐标系内任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于直线 $y=x$ 的对称点 $P'(x', y')$，相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

一般地，我们把平面上的任意一点 P 变成它关于直线 l 的对称点 P' 的线性变换叫做关于直线 l 的**反射**（reflection）.

探究

在直角坐标系 Oxy 内，直线 l 过原点，倾斜角为 α. 你能求出关于直线 l 的反射变换的坐标变换公式吗？

3. 伸缩变换

在直角坐标系 Oxy 内，将每个点的横坐标变为原来的 k_1 倍，纵坐标变为原来的 k_2 倍，其中 k_1，k_2 均为非零常数，我们称这样的几何变换为**伸缩变换**(stretching).

例 2　在直角坐标系 Oxy 内，将每一点的纵坐标变为原来的 2 倍，横坐标保持不变.

(1) 试确定该伸缩变换的坐标变换公式及其对应的二阶矩阵；

(2) 求点 $A(1,\ -1)$ 在该伸缩变换作用下的像 A'.

解：(1) 设在这个伸缩变换作用下，直角坐标系 Oxy 内的任意一点 $P(x,\ y)$ 变成点 $P'(x',\ y')$，则

$$x'=x,\ y'=2y.$$

因此，所求的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases}$$

从而，对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；

(2) 将点 $A(1,\ -1)$ 的坐标代入坐标变换公式，得

$$\begin{cases} x'=1, \\ y'=2\times(-1)=-2. \end{cases}$$

从而 A' 的坐标为 $(1,\ -2)$.

一般地，在直角坐标系 Oxy 内，将每个点的纵坐标变为原来的 k 倍（k 是非零常数），横坐标保持不变的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

将每个点的横坐标变为原来的 k 倍（k 是非零常数），纵坐标保持不变的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

将每个点的横坐标变为原来的 k_1 倍，纵坐标变为原来的 k_2 倍(k_1，k_2 均为非零常数)的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=k_1x, \\ y'=k_2y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$.

4. 投影变换

设 l 是平面内一条给定的直线. 对平面内的任意一点 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 P'，则称点 P' 为点 P 在直线 l 上的投影. 将平面上每一点 P 变成它在直线 l 上的投影 P'，这个

变换称为关于直线 l 的投影（projection）变换.

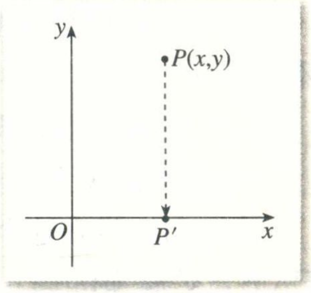


图 1.1-5

如果以直线 l 为 x 轴建立直角坐标系 Oxy，则所有的投影变换都可以看成关于 x 轴的投影变换.

例 3 如图 1.1-5，在直角坐标系 Oxy 内，过任意一点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 P'，我们称点 P' 为点 P 在 x 轴上的（正）投影. 如果一个变换把直角坐标系内的每一点变成它在 x 轴上的（正）投影，那么称这个变换为关于 x 轴的（正）投影变换.

设在关于 x 轴的（正）投影变换的作用下，点 $P(x，y)$ 变成点 $P'(x'，y')$，则

$$x'=x，\ y'=0.$$

因此，该变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=0.\end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

5. 切变变换

如图 1.1-6，在直角坐标系 Oxy 内，将每一点 $P(x，y)$ 沿着与 x 轴平行的方向平移 ky 个单位变成点 P'，其中 k 是非零常数，称这类变换为平行于 x 轴的切变（shears）变换.

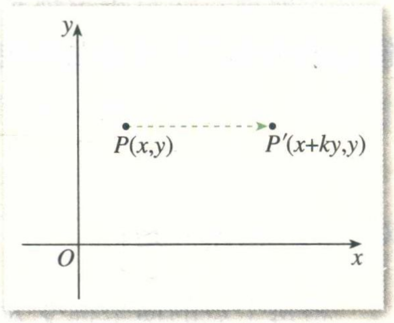


图 1.1-6

设 $P'(x'，y')$，则

$$x'=x+ky，\ y'=y.$$

因此，平行于 x 轴的切变变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x+ky,\\ y'=y.\end{cases}$$

从而，对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

类似的，平行于 y 轴的切变变换是指将直角坐标系内的每一点 $P(x，y)$ 沿着与 y 轴平行的方向平移 kx 个单位（其中 k 是非零常数）的线性变换. 其坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=kx+y.\end{cases}$$

对应的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$.

（二）变换、矩阵的相等

我们知道，在直角坐标系 Oxy 内，把每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{3\pi}{2}$，与把每个点绕原点 O 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的变换效果是一样的. 实际上，旋转角是 $\frac{3\pi}{2}$ 的旋转变换的

坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\dfrac{3\pi}{2}-y\sin\dfrac{3\pi}{2}, \\ y'=x\sin\dfrac{3\pi}{2}+y\cos\dfrac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{bmatrix} \cos\dfrac{3\pi}{2} & -\sin\dfrac{3\pi}{2} \\ \sin\dfrac{3\pi}{2} & \cos\dfrac{3\pi}{2} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

旋转角是$-\dfrac{\pi}{2}$的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)-y\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), \\ y'=x\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+y\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{bmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，这两个旋转变换的坐标变换公式及对应的二阶矩阵是分别相同的. 这时我们称这两个旋转变换相等.

变换与函数类似. 函数把实数对应到实数；变换把点对应到点.

一般地，设σ，ρ是同一个直角坐标平面内的两个线性变换. 如果对平面内的任意一点P，都有$\sigma(P)=\rho(P)$，则称这两个线性变换相等，简记为$\sigma=\rho$.

设σ，ρ所对应的二阶矩阵分别为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

如果 $\sigma=\rho$，那么它们对应的系数分别相等，即 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$，$d_1=d_2$. 这时我们也称二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，即

对于两个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果它们的对应元素都分别相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & x-1\\ y & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}p-1 & -2\\ 2 & q\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 p，q，x，y.

解：由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases}1=p-1,\\ x-1=-2,\\ y=2,\\ 0=q.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}p=2,\\ q=0,\\ x=-1,\\ y=2.\end{cases}$$

习题1.1

1. 在直角坐标系 Oxy 内，如果把绕原点 O 按逆时针方向旋转 α 角的旋转变换记为 R_α，试给出下列旋转变换的坐标变换公式以及对应的矩阵：

   (1) $R_{45°}$； (2) $R_{90°}$； (3) $R_{360°}$.

2. 如果一个几何变换把直角坐标系 Oxy 内任意一点变成这一点关于坐标原点 O 的对称点，那么称这个几何变换为关于坐标原点 O 的反射变换，试求出这个反射变换的变换公式及其矩阵.

3. 过直角坐标系 Oxy 内的一点 A 作一条与 $x+y=0$ 平行的直线交 x 轴于点 A'，则称 A' 点为过 A 点沿着平行于直线 $x+y=0$ 的方向在 x 轴上的投影. 设一个几何变换把直角坐标系 Oxy 内的任意一点变成过这一点沿着平行于直线 $x+y=0$ 的方向在 x 轴上的投影. 试求

   (1) 点 $A(2, 1)$ 在这个投影变换下的像；

   (2) 这个投影变换的坐标变换公式及其矩阵.

4. 对于旋转变换 $R_{\frac{3\pi}{2}}$，除了 $R_{-\frac{\pi}{2}}=R_{\frac{3\pi}{2}}$ 以外，你还能再找出一些与 $R_{\frac{3\pi}{2}}$ 相等的平面变换吗？

5. 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2 & 9\\ x & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}2 & -y\\ 3 & z\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，求 x，y，z.

6. (1) 求直角坐标系 Oxy 内关于直线 l：$y=2x$ 的反射变换的坐标变换公式及其矩阵；

(2) 如果直线 l 为 $Ax+By=0$(其中 A，B 不全为 0)，那么关于直线 l 的反射变换的坐标变换公式及其矩阵分别是什么？

二　二阶矩阵与平面向量的乘法

我们知道，线性变换与二阶矩阵是一一对应的．能否直接用二阶矩阵表示线性变换呢？

在直角坐标系 Oxy 内，如果规定每个向量都以坐标原点 O 为起点，那么任何一个向量 $\overrightarrow{OA}$ 就由其终点 A 唯一确定；反之，对直角坐标系 Oxy 内的任意一点 A，有唯一的向量 $\overrightarrow{OA}$ 与之对应．从而，直角坐标系内的向量与点是一一对应的．因为平面内的点与有序实数对是一一对应的，从而平面内的向量与有序实数对也是一一对应的．今后，为了方便，我们对向量、点以及有序实数对这三者不加区别．例如，我们称点 A 的坐标 (x, y) 就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标，或直接把向量 $\overrightarrow{OA}$ 叫做向量 (x, y)．

向量 (x, y) 是一对有序数组，x，y 叫做它的两个分量．我们把这两个分量按照 x 在上，y 在下的次序写成一列 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，这种形式的向量称为列向量．相应的，形如 (x, y) 的向量称为行向量．在本专题中，规定所有的平面向量都写成列向量的形式．

为了得到用二阶矩阵表示线性变换的方法，我们先考察上一节例 1 中得到的旋转角是 $30°$ 的旋转变换公式

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

上式表明，在旋转变换的作用下，直角坐标系内的向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 变成了新的向量 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$．我们设想 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$ 是二阶矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 与向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ “相乘”的结果，即如果引进二阶矩阵与平面向量的乘法，使得乘积为

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix},$$