

飞行器动力学 与控制Simulink仿真

Feixingqi donglixue yu Kongzhi Simulink Fangzhen

■ 姚红 程文华 张雅声 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

飞行器动力学与控制 Simulink 仿真

姚红 程文华 张雅声 编著



国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书介绍了飞行器动力学与控制及其 Simulink 仿真实现的一些相关理论和技术问题。本书共分6章;第1章介绍了飞行器动力学与控制的基础知识并给出了仿真实例;第2章介绍了弹道导弹姿态控制系统的设计以及六自由度全弹道仿真;第3章介绍了高超声速再入滑翔飞行器的平衡滑翔弹道以及跳跃滑翔弹道;第4章介绍了航天器编队的相对运动模型和多脉冲控制方法;第5章介绍了航天器姿态动力学、姿态确定与控制;第6章介绍了磁悬浮转子的动力学模型及其控制。

本书适合具有飞行器动力学、控制以及仿真基础知识的高年级本科生和研究生使用,对从事飞行器控制与总体设计的相关工程技术人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

飞行器动力学与控制 Simulink 仿真 / 姚红,程文华,张雅声编著. —北京:国防工业出版社,2018.1

ISBN 978-7-118-11476-8

I. ①飞… II. ①姚… ②程… ③张… III. ①飞行器-姿态飞行控制-动力学-自动控制系统-系统仿真 IV. ①V412.4-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 302164 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 8 $\frac{3}{4}$ 字数 171 千字

2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—1500 册 定价 60.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

飞行器动力学是航空航天技术的基础理论学科之一,而仿真作为一种重要的研究手段,是深入学习和掌握飞行器动力学理论的重要途径。Simulink 是 MATLAB 软件的重要组成部分,它提供了丰富的模块库帮助用户快速建立动态系统模型,并能扩展应用于半实物实时仿真,已经广泛应用于导弹、航天器以及无人机等飞行器的动力学与控制。基于 Simulink 的系统建模与仿真技术是飞行器动力学与控制数值仿真的有力工具,不仅能模拟飞行器的运动过程,还能开展制导以及控制算法的设计应用。

本书是编者所在课题组近年来对飞行器动力学与控制研究工作的提炼,撰写过程中也参考了国内外多部重要文献。本书不强调飞行器动力学与控制建模和仿真的基本概念和基本理论,而是着重介绍典型对象的动力学与控制理论模型和具体的仿真实现,帮助读者在较短时间内理解研究对象的动力学理论并掌握实用的仿真技术手段,提高分析问题和解决问题的能力。

本书的研究对象包括弹道导弹、高超声速再入飞行器、航天器,研究范围涵盖了飞行器动力学与控制的多个研究热点。具体内容分为 6 章:第 1 章飞行器动力学与仿真基础,介绍了飞行器绕质心运动和质心运动基础知识,给出了动力学仿真实例;第 2 章弹道导弹姿控系统 Simulink 仿真,介绍了导弹姿控系统小偏差线性化模型,开展了姿控系统的 CAD 辅助设计以及六自由度弹道仿真;第 3 章飞行器再入滑翔弹道 Simulink 仿真,对平衡滑翔弹道进行了理论分析,对跳跃滑翔弹道进行了仿真分析;第 4 章航天器编队飞行 Simulink 仿真,建立了航天器

编队相对运动模型,对多脉冲编队控制方法进行了仿真验证;第5章航天器姿态控制系统 Simulink 仿真,介绍了航天器姿态控制对象、姿态确定与控制、大角度姿态机动,并对相关算法进行了仿真验证;第6章磁悬浮 CMG 及姿态控制 Simulink 仿真,介绍了磁悬浮轴承控制系统模型,设计了控制律并进行了处理器在回路的仿真,对航天器运动产生的干扰力矩进行了前馈补偿。

本书的编写过程中得到了许多同领域专家和学者的支持与帮助,在此表示诚挚的感谢!

由于编者水平有限,相关研究工作还有待深入开展,书中难免存在一些不足和错误,恳请广大读者批评指正。

编者

2016年11月

目 录

第 1 章 飞行器动力学与仿真基础	1
1.1 飞行器姿态描述	1
1.1.1 方向余弦阵	1
1.1.2 欧拉角	2
1.1.3 四元数	3
1.2 姿态运动学方程	4
1.2.1 方向余弦阵	4
1.2.2 欧拉角	6
1.2.3 四元数	6
1.3 姿态动力学方程	8
1.3.1 动量矩和惯量矩阵	8
1.3.2 欧拉动力学方程	9
1.4 飞行器质心运动方程	10
1.5 动力学仿真实例	11
1.5.1 姿态运动 MATLAB 仿真	11
1.5.2 姿态运动 Simulink 仿真	17
第 2 章 弹道导弹姿控系统 Simulink 仿真	21
2.1 导弹姿控系统的结构和特征	21
2.1.1 导弹姿控系统的结构	21
2.1.2 导弹姿控系统的典型特征	22
2.2 导弹姿态运动数学模型的建立	24
2.2.1 刚体小扰动俯仰运动方程	25
2.2.2 弹性振动方程	28
2.3 导弹姿控系统设计的性能指标	29
2.3.1 稳定性指标	29

2.3.2	精度指标	30
2.3.3	动态性能指标	30
2.3.4	抗干扰指标	31
2.4	ACSCAD 软件的功能结构以及图形界面	31
2.4.1	ACSCAD 软件的功能结构	32
2.4.2	ACSCAD 软件的图形界面	33
2.5	导弹六自由度仿真的 Simulink 建模	36
2.5.1	导弹六自由度仿真建模特征	36
2.5.2	导弹六自由度仿真总体结构	37
2.5.3	六自由度仿真典型子系统建模	38
第 3 章	飞行器再入滑翔弹道 Simulink 仿真	43
3.1	高超声速飞行器再入弹道概述	43
3.1.1	再入拉起段	43
3.1.2	滑翔飞行段	43
3.2	平衡滑翔弹道特性理论分析	45
3.2.1	简化运动模型	45
3.2.2	速度、高度与速度倾角之间的解析关系	46
3.2.3	动压、过载与热流密度随速度变化规律	48
3.2.4	常升阻比时运动状态之间的解析表达式	49
3.3	跳跃滑翔弹道特性简化仿真分析	51
3.3.1	初始高度对弹道的影响	52
3.3.2	初始速度对弹道的影响	52
3.3.3	初始速度倾角对弹道的影响	53
3.4	飞行器再入滑翔质心运动数学模型	54
3.4.1	坐标系定义及其转换	54
3.4.2	在半速度坐标系中的质心运动方程	55
3.5	飞行器再入滑翔弹道 Simulink 建模与仿真	60
3.5.1	再入滑翔弹道 Simulink 建模	60
3.5.2	再入滑翔弹道仿真实例	62
第 4 章	航天器编队飞行 Simulink 仿真	64
4.1	基于 C-W 方程的相对运动描述	64
4.1.1	Hill 动力学方程的建立	64

4.1.2	相对运动的解析解	66
4.2	基于轨道根数的相对运动描述	69
4.2.1	由轨道根数计算相对运动状态	69
4.2.2	由相对运动状态计算轨道根数	73
4.3	地球静止轨道航天器相对运动	75
4.3.1	无奇异轨道根数	75
4.3.2	基于 E/I 矢量的相对运动描述	76
4.4	航天器编队构形的控制	79
4.4.1	编队控制转化为交会控制	79
4.4.2	平面内构形的三冲量控制	80
4.5	航天器编队飞行的 Simulink 仿真	82
4.5.1	编队飞行 Simulink 仿真模型的搭建	82
4.5.2	编队维持控制的仿真实例	83
第 5 章	航天器姿态控制系统 Simulink 仿真	86
5.1	航天器姿态控制对象模型	86
5.1.1	动力学设计对象模型	86
5.1.2	干扰力矩模型	87
5.2	航天器姿态确定	99
5.2.1	卡尔曼滤波理论	99
5.2.2	连续系统状态方程	100
5.3	航天器姿态稳定控制	103
5.3.1	反馈控制律设计	103
5.3.2	飞轮角动量磁卸载	104
5.4	大角度姿态机动控制	104
5.5	航天器姿态控制 Simulink 仿真	107
第 6 章	磁悬浮 CMG 及姿态控制 Simulink 仿真	111
6.1	磁悬浮系统原理及模型	111
6.1.1	磁悬浮系统工作原理	111
6.1.2	电磁力的线性化模型	112
6.2	磁悬浮轴承控制对象模型	113
6.2.1	磁悬浮转子动力学模型	113
6.2.2	弹性支承转子的运动特征	115

6.3	磁悬浮飞轮控制律设计	119
6.3.1	交叉反馈控制律设计	119
6.3.2	控制律的解耦作用	120
6.4	处理器在回路的控制仿真	121
6.4.1	RTDX 通信原理	121
6.4.2	面向 DSP 的控制律实现	122
6.4.3	仿真运行结果	124
6.5	航天器姿态运动对转子的干扰	125
6.5.1	姿态运动产生的干扰力矩	125
6.5.2	姿态控制仿真运行结果	128
参考文献		129

第 1 章 飞行器动力学与仿真基础

飞行器刚体动力学是研究飞行器运动规律的科学,由质心动力学和绕质心动力学组成。质心运动描述了飞行器在惯性坐标系或者非惯性坐标系中的平移运动情况,遵循牛顿运动定律;绕质心运动描述了飞行器围绕其质心的转动运动情况,遵循动量矩定理。根据力学原理建立飞行器质心运动和绕质心运动的动力学和运动学微分方程,是开展飞行器运动规律理论研究和数值仿真研究的前提。

1.1 飞行器姿态描述

飞行器姿态描述了飞行器绕质心运动的基本特征,飞行器的姿态就是与其固联的体坐标系相对于某个参考坐标系的方位关系。描述这些方位关系的量称为姿态参数,它有多种描述形式,基本的姿态参数是这两个坐标系之间的方向余弦矩阵。但这种方法不直观,缺乏明显的几何概念。通常用欧拉角表示飞行器绕质心运动的姿态,另外,为避免运动学方程的奇异性,还引入了四元数等。由于飞行器姿态是确定的,因此用各种方法求出的姿态参数可以相互转换。

1.1.1 方向余弦阵

考虑两个坐标系 A 和 B ,坐标系 A 的 3 个正交轴的单位矢量为 $\{a_1, a_2, a_3\}$,坐标系 B 的 3 个正交轴的单位矢量为 $\{b_1, b_2, b_3\}$,矢量 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 由坐标系 A 的单位轴矢量表示为

$$\begin{cases} b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 \\ b_2 = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3 \\ b_3 = c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

式中: c_{ij} 为单位矢量 b_i 和单位矢量 a_j 夹角的余弦值,简称为方向余弦, $c_{ij} = b_i \cdot a_j = b_i^T a_j$ 。

坐标系 A 到 B 的方向余弦阵表示为

$$C_A^B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} [a_1 \ a_2 \ a_3] \quad (1.2)$$

同理可得坐标系 B 到 A 的方向余弦阵为

$$\mathbf{C}_B^A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] \quad (1.3)$$

方向余弦阵简单地记为 \mathbf{C} , 由于坐标轴矢量为正交基矢量, 易得 \mathbf{C} 为正交矩阵, 即 $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$ 。方向余弦阵也称为旋转矩阵或坐标转换矩阵。对于任意的矢量 \mathbf{h} , 分别表示在坐标系 A 和坐标系 B 中, 有

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{a}_1 + h_2 \mathbf{a}_2 + h_3 \mathbf{a}_3 = h'_1 \mathbf{b}_1 + h'_2 \mathbf{b}_2 + h'_3 \mathbf{b}_3 \quad (1.4)$$

进而, 有

$$h'_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{h} = \mathbf{b}_1^T \mathbf{h} = \mathbf{b}_1^T (h_1 \mathbf{a}_1 + h_2 \mathbf{a}_2 + h_3 \mathbf{a}_3) \quad (1.5)$$

$$h'_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{h} = \mathbf{b}_2^T \mathbf{h} = \mathbf{b}_2^T (h_1 \mathbf{a}_1 + h_2 \mathbf{a}_2 + h_3 \mathbf{a}_3) \quad (1.6)$$

$$h'_3 = \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{h} = \mathbf{b}_3^T \mathbf{h} = \mathbf{b}_3^T (h_1 \mathbf{a}_1 + h_2 \mathbf{a}_2 + h_3 \mathbf{a}_3) \quad (1.7)$$

写为矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_A^B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

如果 $\mathbf{a}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{a}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{a}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$, 则方向余弦阵为

$$\mathbf{C}_A^B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

当坐标系 A 到坐标系 B 仅在 X 轴或 Y 轴或 Z 轴方向存在旋转角度 θ 时, 对应的方向余弦阵即坐标转换矩阵分别为

$$\mathbf{C}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

1.1.2 欧拉角

方向余弦阵在表示飞行器姿态时要用到 9 个参数, 很不方便。在工程应用中, 使用 3 个独立的欧拉角姿态参数更为简洁并具有明显的几何意义。根据欧拉定理, 刚体绕固定点的转动可以是绕该点的若干次有限转动的合成, 若参考坐

标系经过3次或绕X轴或绕Y轴或绕Z轴的连续旋转后与体坐标系重合,则每次旋转对应的角度称为欧拉姿态角,简称欧拉角。

假设3次绕单位轴的欧拉角旋转对应的方向余弦阵分别为 C_1 、 C_2 和 C_3 ,其乘积就是参考坐标系到体坐标系的方向余弦阵 $C_A^B = C_3 C_2 C_1$ 。两个坐标系之间的方向余弦阵是唯一确定的,但欧拉角的确定并不唯一,它取决于3次坐标轴旋转的次序,也就是不同的旋转次序可能对应不同的欧拉角,一共有12种旋转次序,即X-Y-Z、X-Z-Y、X-Y-X、X-Z-X、Y-X-Z、Y-Z-X、Y-X-Y、Y-Z-Y、Z-Y-X、Z-X-Y、Z-X-Z、Z-Y-Z,比较常见的是Z-Y-X即321的旋转次序。

以321的旋转次序为例,假设3次旋转对应的欧拉角表示为 ψ 、 θ 和 φ ,则参考坐标系到体坐标系的方向余弦阵为

$$C_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

1.1.3 四元数

理论力学中有如下定理:刚体绕固定点的任意转动方位,可以由绕通过此点的某一固定轴转动一定角度得到。此定理来源于正交坐标转换矩阵 C 的一个性质:对于实正交矩阵 C 存在一个单位矢量 E 满足等式 $E = CE$ 。此式表明,代表刚体转轴方向的矢量 E 在刚体体坐标系和在参考坐标系中的分量相同。因此,姿态的描述可以由4个参数来完成,即旋转轴单位矢量的3个坐标分量 e_x 、 e_y 、 e_z 以及旋转角度 θ 。

定义姿态四元数为 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ 。其中 $q_0 = \cos(\theta/2)$, $q_1 = e_x \sin(\theta/2)$, $q_2 = e_y \sin(\theta/2)$, $q_3 = e_z \sin(\theta/2)$ 。四元数的标量部分为 q_0 ,矢量部分为 $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k = E \sin(\theta/2)$ 。四元数的各参数之间并不是完全独立的,满足约束关系 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ 。 i 、 j 、 k 满足运算规则 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ji = k$ 。定义姿态四元数的乘法为

$$pq = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

$$= p_0 q_0 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + (p_1 i + p_2 j + p_3 k)q_0 + p_0(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

$$+ [(p_2 q_3 - p_3 q_2)i + (p_3 q_1 - p_1 q_3)j + (p_1 q_2 - p_2 q_1)k] \quad (1.12)$$

也可写为

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (1.13)$$

由于 $\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, 故 $pq \neq qp$, 即四元数乘法不满足交换律。

四元数乘法也可写为矩阵的形式:

$$pq = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

或

$$pq = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

根据四元数的定义, 理论研究表明, 由参考坐标系 A 到飞行器体坐标系 B 的坐标转换矩阵可以通过四元数表示为

$$C_A^B = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0[\mathbf{q} \times] \quad (1.16)$$

$$\text{式中: } [\mathbf{q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}。$$

上述坐标转换矩阵进一步整理, 得

$$C_A^B = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & -2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ -2q_0q_3 + 2q_1q_2 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ 2q_0q_2 + 2q_1q_3 & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

根据四元数乘法的定义, 理论研究表明, 如果飞行器体坐标系从参考坐标系开始, 进行连续多次的坐标系旋转, 则参考坐标系一次性旋转到最终体坐标系所对应的四元数就是每次旋转四元数的乘积。例如, 3 次连续旋转对应的四元数是 q' 、 q'' 、 q''' , 则参考坐标系到最终体坐标系的旋转四元数为

$$q = q'q''q''' \quad (1.18)$$

1.2 姿态运动学方程

1.2.1 方向余弦阵

考虑体坐标系 B 和参考坐标系 A , 体坐标系 B 相对参考坐标系 A 存在旋转

运动,旋转角速度 ω 表示在体坐标系 B 中为

$$\omega = \omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 + \omega_3 b_3 \quad (1.19)$$

设参考坐标系 A 到体坐标系 B 的坐标转换矩阵为 C , 根据前面的论述,有

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

由于以坐标系 A 为参考框架,式(1.20)两边微分,得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} &= \dot{C}^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} + C^T \begin{bmatrix} \dot{b}_1^T \\ \dot{b}_2^T \\ \dot{b}_3^T \end{bmatrix} = \dot{C}^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} + C^T \begin{bmatrix} (\omega \times b_1)^T \\ (\omega \times b_2)^T \\ (\omega \times b_3)^T \end{bmatrix} \\ &= \dot{C}^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} + C^T \begin{bmatrix} ((\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 + \omega_3 b_3) \times b_1)^T \\ ((\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 + \omega_3 b_3) \times b_2)^T \\ ((\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 + \omega_3 b_3) \times b_3)^T \end{bmatrix} \\ &= \dot{C}^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} + C^T \begin{bmatrix} -\omega_2 b_3^T + \omega_3 b_2^T \\ \omega_1 b_3^T - \omega_3 b_1^T \\ -\omega_1 b_2^T + \omega_2 b_1^T \end{bmatrix} = \dot{C}^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} - C^T \begin{bmatrix} -\omega_3 b_2^T + \omega_2 b_3^T \\ \omega_3 b_1^T - \omega_1 b_3^T \\ -\omega_2 b_1^T + \omega_1 b_2^T \end{bmatrix} \\ &= \dot{C}^T \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} - C^T \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} = (\dot{C}^T - C^T \Omega) \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.21)$$

由此,得

$$\dot{C}^T - C^T \Omega = 0 \quad (1.22)$$

进一步,得

$$\dot{C} + \Omega C = 0 \quad (1.23)$$

其中反对称矩阵为

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

1.2.2 欧拉角

以欧拉角表示的姿态运动学方程与坐标系的旋转顺序有关,以 321 的转序为例,假设 3 次旋转对应的欧拉角表示为 ψ 、 θ 和 φ ,也就是首先绕 Z 轴旋转角度 ψ ,然后绕 Y 轴旋转角度 θ ,最后绕 X 轴旋转角度 φ 。飞行器总的瞬时旋转角速度是 3 次欧拉角速度的叠加,表示在当前的体坐标系中为

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_X(\varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_X(\varphi) C_Y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

式(1.25)做求逆运算可得欧拉角运动学微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

注意到上式中当 $\theta = \pm\pi/2$ 时存在计算奇异性。

另外,如果以 313 的转序为例,也就是首先绕 Z 轴旋转角度 φ ,然后绕 X 轴旋转角度 θ ,最后再绕 Z 轴旋转角度 ψ ,则表示在当前体坐标系中的瞬时旋转角速度为

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + C_Z(\psi) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_Z(\psi) C_X(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

同样,式(1.27)做求逆运算可得欧拉角运动学微分方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi\sin\theta & -\sin\psi\sin\theta & 0 \\ -\sin\psi\cos\theta & -\cos\psi\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

注意到式(1.28)当 $\theta = 0, \pi$ 时存在计算奇异性。

1.2.3 四元数

欧拉角表示的姿态运动学方程存在计算奇异性,而四元数表示的姿态运动学方程能够避免这个问题。根据之前方向余弦阵的运动学方程,得

$$\begin{cases} \dot{c}_{11} = \omega_3 c_{21} - \omega_2 c_{31}, & \dot{c}_{12} = \omega_3 c_{22} - \omega_2 c_{32}, & \dot{c}_{13} = \omega_3 c_{23} - \omega_2 c_{33} \\ \dot{c}_{21} = \omega_1 c_{31} - \omega_3 c_{11}, & \dot{c}_{22} = \omega_1 c_{32} - \omega_3 c_{12}, & \dot{c}_{23} = \omega_1 c_{33} - \omega_3 c_{13} \\ \dot{c}_{31} = \omega_2 c_{11} - \omega_1 c_{21}, & \dot{c}_{32} = \omega_2 c_{12} - \omega_1 c_{22}, & \dot{c}_{33} = \omega_2 c_{13} - \omega_1 c_{23} \end{cases} \quad (1.29)$$

容易验证,有

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{c}_{21} c_{31} + \dot{c}_{22} c_{32} + \dot{c}_{23} c_{33} \\ \omega_2 = \dot{c}_{31} c_{11} + \dot{c}_{32} c_{12} + \dot{c}_{33} c_{13} \\ \omega_3 = \dot{c}_{11} c_{21} + \dot{c}_{12} c_{22} + \dot{c}_{13} c_{23} \end{cases} \quad (1.30)$$

用四元数各分量表示方向余弦阵的各分量及其微分,式(1.30)进一步整理,得

$$\begin{cases} \omega_1 = 2(q_0 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_0 - q_2 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_2) \\ \omega_2 = 2(q_0 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_1) \\ \omega_3 = 2(q_0 \dot{q}_3 - q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1 - q_3 \dot{q}_0) \end{cases} \quad (1.31)$$

另外,根据四元数各分量平方和等于1的约束条件,有

$$0 = 2(q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3) \quad (1.32)$$

联合上述等式并写为矩阵的形式,有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

又根据四元数的性质有如下等式:

$$\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (1.34)$$

联合式(1.33)和式(1.34)两式,得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

式(1.35)的等价形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

1.3 姿态动力学方程

1.3.1 动量矩和惯量矩阵

假设刚体飞行器在惯性系中运动,这个运动可以描述为其质心的平移运动和绕质心运动。描述质心平移运动的重要物理量是动量,而描述绕质心运动的重要物理量是动量矩。

如图 1.1 所示,正交的三轴本体坐标系,其原点位于刚体的质心, i, j, k 分别为本体坐标系各轴的单位矢量。对于刚体上任意一点 m_i , 有 $R_i = R_0 + r_i$, 矢量 R_i 的微分为

$$\dot{R}_i = \dot{R}_0 + \dot{r}_i + \omega \times r_i = V_0 + \omega \times r_i \quad (1.37)$$

式中: ω 为刚体相对于惯性系的角速度矢量。

质点 m_i 的动量矩定义为

$$h_i = r_i \times m_i (V_0 + \omega \times r_i) = -m_i V_0 \times r_i + m_i r_i \times (\omega \times r_i) \quad (1.38)$$

整个刚体的动量矩为

$$h = \sum h_i = -V_0 \times \sum m_i r_i + \sum r_i \times (\omega \times r_i) m_i \quad (1.39)$$

因为刚体质心位置在坐标系原点,有

$$\sum m_i r_i = 0 \quad (1.40)$$

这样,有

$$h = \sum r_i \times (\omega \times r_i) m_i = \begin{bmatrix} \omega_1 \sum (y_i^2 + z_i^2) m_i - \omega_2 \sum y_i x_i m_i - \omega_3 \sum x_i z_i m_i \\ \omega_2 \sum (x_i^2 + z_i^2) m_i - \omega_1 \sum x_i y_i m_i - \omega_3 \sum y_i z_i m_i \\ \omega_3 \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i - \omega_1 \sum x_i z_i m_i - \omega_2 \sum y_i z_i m_i \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

再根据刚体惯量张量也就是惯量矩阵的定义:

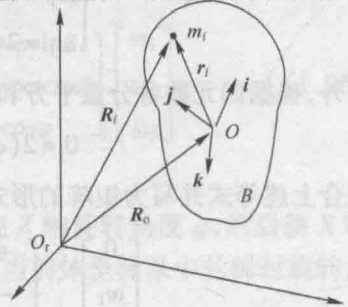


图 1.1 刚体的动量矩