高等教育“十三五”规划教材

离散数学

LISAN SHUXUE

张卫国 主编

矿业大学出版社

rsity of Mining and Technology Press

高等教育“十三五”规划教材

离散数学

主　编　张卫国
副主编　李占利　宇亚卫

中国矿业大学出版社

内容简介

本书介绍离散数学的基础理论与基本方法。离散数学是现代数学的一个重要分支，以研究离散量的结构和相互关系为主要研究对象，主要内容包括数理逻辑、集合论、代数系统和图论等。全书由命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数系统和图论共7章组成，每章均配有适量的习题。最后附有部分习题答案或解析提示，便于检验和加深学生对所学内容的理解和掌握。

本书可作为计算机类、数学类、电子信息类等相关专业本科生的教材，也可作为相关专业研究生及科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 张卫国主编. —徐州 ：中国矿业大学出版社，2017.7

ISBN 978-7-5646-3619-7

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①离散数学—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 168643 号

书　　名　离散数学
主　　编　张卫国
责任编辑　褚建萍
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　　(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×960　1/16　**印张** 16.5　**字数** 320 千字
版次印次　2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　33.00 元

前　言

随着计算机科学与技术的迅速发展，其应用日益广泛和深入并深受人们的重视。离散数学不仅是研究计算机科学的有力工具和方法，也是研究信息科学的基本数学工具。离散数学作为现代数学的一个重要分支，主要研究离散量的结构和相互关系。离散数学形成于 20 世纪 70 年代初期，是随着计算机科学的发展而逐步建立与完善的，是计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息与计算科学等专业的重要基础课程。

通过离散数学的学习，不仅有利于提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、归纳构造能力，而且有利于培养学生严谨、规范的科学态度。

本书是在作者多年从事离散数学教学的基础上，经过多次修改和提炼而成的。教材力求体现以下特色：第一，通俗易懂。离散数学有其自身的抽象性，本书尽可能用图解的方法形象地描述一些概念、关系和算法，由浅入深，由直观到抽象，做到通俗易懂。如在逻辑推理中，使用证明树，使推理思路更加清晰。第二，推理严谨。离散数学中概念、性质、定理和算法多，在性质和定理的证明上，力求逻辑清晰、推理严谨。第三，注重算法分析与设计能力培养。离散数学中有许多算法，尤其是图论部分，基于严密的数学理论的算法在数学和计算机科学中扮演着重要的角色。第四，注重应用。本书有许多例题体现了离散数学的理论与方法在计算机学科不同领域的应用，如逻辑推断、Hash 函数、计数问题、容斥原理、Hamilton 回路等。第五，习题丰富。同其他数学类课程一样，练习是掌握知识的重要途径。本书除在内容讲解的过程中配有大量例题外，在每章最后都有综合练习题，其中部分题目是一些知名院校的考研题，有一定的难度。附录中给出了部分习题答案或解析提示。

本书包括数理逻辑、集合论、代数系统和图论四部分内容，共分 7 章，第一部分包括第 1 章命题逻辑、第 2 章谓词逻辑，第二部分包括第 3 章集合、第 4 章关系、第 5 章函数，第三部分即第 6 章代数系统，第四部分即第 7 章图论。各部分内部联系紧密，但各部分之间相对独立。

本书由张卫国任主编，李占利、宇亚卫任副主编。具体编写分工如下：第3、4、5、6章由张卫国编写，第1、2章由李占利编写，第7章由宇亚卫编写，附录由宇亚卫和贾艳艳编写。

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，真诚希望使用本教材的老师、同学和广大读者对存在的问题不吝指正并提出修改意见。

编　者

2017.3

目　　录

第1章　命题逻辑

逻辑学是研究思维形式及思维规律的科学，分为辩证逻辑和形式逻辑两种。辩证逻辑是以辩证法认识论为基础的逻辑学，形式逻辑主要是对思维的形式结构和规律进行研究的类似于语法的一门工具性学科。思维的形式和结构包括了概念、判断和推理之间的结构和联系。概念是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答，这就是判断。由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式，就是推理。数理逻辑是用数学方法研究逻辑演绎规律的科学。所谓数学方法，主要指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑。

现代数理逻辑的主要分支有：模型论、证明论、递归论和公理化集合论。本书仅介绍命题逻辑、谓词逻辑和集合论的基础知识。本章主要内容有：命题及命题联结词、逻辑恒等式与永真蕴涵式、命题范式、命题推理等。

1.1　命题及命题联结词

1.1.1　命题

定义 1-1　具有真假意义的陈述语句叫作**命题**。若命题与客观事实相符，则命题的真值为真，记作 1，并称该命题为**真命题**；若命题与客观事实不符，则命题的真值为假，记作 0，并称该命题为**假命题**。通常用大写字母 P、Q、R 等表示命题。

例 1-1　下述都是命题：

(a) 月亮围绕地球转。

(b) 雪是黑色的。

(c) 明天天下雨。

(d) 除地球外有些星球上有人类。

(e) 离散数学很枯燥。

所谓“真假意义”，是指陈述的内容符合或不符合客观事实，不以人的意志为转移；真或假有且只有一个成立。

如对例 1-1 中的(c)“明天天下雨”，虽然还不能准确判断其真假，但客观上有且只有一个成立；(d)虽然有待于科学家进一步探索，但它是有真假意义的；(e)要根据考虑的人来判断，若未说明针对哪些人，可理解为说话者本人，其真假

性也是客观的。

例 1-2 下述都不是命题：

(a) 快点走！

(b) 你喜欢红色吗？

(c) 多美啊！

(d) $x+y>3$。

(e) 买三张周六去北京的机票。

前三个分别是祈使句、疑问句和感叹句，显然不是命题。对于(d)，由于 x 和 y 是可变的，故 $x+y>3$ 的真假性不确定，从而不是命题。对于(e)，是个祈使句，既不为真也不为假，不是命题。

例 1-3 一个人说："我正在说谎"。

他是在说谎还是在说真话呢？如果他是说谎，那么他的话是假，因为他承认他是说谎，所以实际上他是说真话。另外，如果他讲真话，那么他说的是真，也就是他在说谎。

命题可分为原子命题和复合命题，一个命题如果不能分解为更简单的命题，则这个命题叫作**原子命题**，否则叫**复合命题**。如"林平和林红爱看书"是复合命题，可分解为"林平爱看书"和"林红爱看书"。但"林平和林红是姐妹"却不能分解，是原子命题。

1.1.2 命题联结词

在日常语言中常使用"并且"、"或"、"如果……，那么……"、"当且仅当"等联结词，在数理逻辑中有相应的命题联结词与之对应。下面介绍六种常见的命题联结词。

(1) 否定联结词$\neg$

定义 1-2 命题 P 的否定是一个复合命题，记作$\neg P$，读作"非 P"或"P 的否定"。$\neg P$ 的真值规定如下：若 P 为真，则$\neg P$ 为假；若 P 为假，则$\neg P$ 为真。如表 1-1 所列。

表 1-1

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$	$P\oplus Q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

例 1-4 P:上海处处都干净。

$\neg P$:并非上海处处都干净。或$\neg P$:上海有些地方不干净。

(2) 合取联结词$\wedge$

定义 1-3 命题P和Q的合取是复合命题,记作$P\wedge Q$,读作"P并且Q"或"P与Q"。$P\wedge Q$的真值规定如下:$P\wedge Q$为真当且仅当P与Q都为真。如表1-1所列。

例 1-5 P:今天下雨,Q:明天下雨。

$P\wedge Q$:今天下雨且明天下雨。

例 1-6 P:今天天气晴朗,Q:今天天气不太热。

$P\wedge Q$:今天天气晴朗但不太热。

例 1-7 P:孔子是教育家,Q:树上有两只鸟。

$P\wedge Q$:孔子是教育家且树上有两只鸟。

例1-6中有转折的意思,仍然可用合取来联结。例1-7中的复合命题在日常语言中没有意义,因为前后没有内在联系,但仍是复合命题。

(3) 析取联结词$\vee$

定义 1-4 命题P和Q的析取是一个复合命题,记作$P\vee Q$,读作"P或Q",$P\vee Q$的真值规定如下:$P\vee Q$为真当且仅当P或Q至少有一个为真。如表1-1所列。

这里联结词"$\vee$"与汉语中"或"的意义有所不同,汉语中"或"既可表示"可兼或",也可表示"排斥或"。

例 1-8 今天下雨或刮风。

例 1-9 今晚7点我去看电影或是在家看书。

显然,例1-8是"可兼或",例1-9是"排斥或"。对于例1-8,若令P:今天下雨,Q:今天刮风,则可表示为$P\vee Q$。

对于例1-9,若令P:今晚7点我去看电影,Q:今晚7点我在家看书,用$P\vee Q$表示例1-9是不合适的,因为例1-9中含有"我不可能同时看电影且在家看书"的意思,而根据"$\vee$"的定义不含这层意思,所以例1-9的复合命题也可表示为:

$$(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\text{或}(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

(4) 蕴涵联结词$\rightarrow$

定义 1-5 给定两个命题P和Q,P蕴涵Q是一个复合命题,记作$P\rightarrow Q$,读作"P蕴涵Q"或"如果P,那么Q"或"若P则Q",$P\rightarrow Q$的真值规定如下:仅当P为真,Q为假时,$P\rightarrow Q$为假,其余情况$P\rightarrow Q$均为真。如表1-1所列。

对于蕴涵式$P\rightarrow Q$,称(假设)条件P是充分条件,结论Q是必要条件。"如果P,则Q"逻辑上与"P仅当Q"是相同的。习惯上,"如果P,则Q"强调假设,而

“P 仅当 Q”强调结论，这仅是风格上的差异。

例 1-10 P：李明是大三或大四的学生，Q：李明通过了 CET6。

$P \to Q$：如果李明是大三或大四的学生，那么李明通过了 CET6。也可理解为：

仅当李明通过 CET6，他才会是大三或大四的学生。

例 1-11 把“因为实函数 $f(x)$ 是可导的，所以 $f(x)$ 是连续的”用命题符号表示。

解 令 P：$f(x)$ 是可导的，Q：$f(x)$ 是连续的，则原命题可符号化为 $P \to Q$。

在日常语言中，“如果”与“那么”是有因果联系的，否则就没有意义。但对条件命题来说，只要 P 和 Q 是命题，$P \to Q$ 就是命题。此外在日常语言中“如果……，那么……”这样的语句，当前提为假时，这语句常常无意义。而在条件命题中，若前提为假，命题的真值恒为真，即蕴涵式既可包括日常语言中的语句，又可包括非日常语言中的语句。

例 1-12 P：马克龙是法国最年轻的总统，Q：特朗普当选美国第 58 届总统。

$P \to Q$：如果马克龙是法国最年轻的总统，那么特朗普当选美国第 58 届总统。

(5) 等值联结词 $\leftrightarrow$

定义 1-6 给定两个命题 P 和 Q，P 等值于 Q 是复合命题，记作 $P \leftrightarrow Q$，读作“P 等值于 Q”或“P 当且仅当 Q”。$P \leftrightarrow Q$ 的真值规定如下：$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 的真值相同。如表 1-1 所列。

例 1-13 两三角形相似，当且仅当三组对应角相等。

令 P：两三角形相似，Q：两三角形三对应角相等，则原句即为 $P \leftrightarrow Q$。

例 1-14 牛不吃草当且仅当 $1+1=3$。

令 P：牛不吃草，Q：$1+1=3$，则原句译为 $P \leftrightarrow Q$。

(6) 异或联结词 $\oplus$

定义 1-7 给定两个命题 P 和 Q，P 和 Q 的异或是复合命题，记作 $P \oplus Q$，读作 P 与 Q 的“排斥或”或“异或”。$P \oplus Q$ 的真值规定如下：$P \oplus Q$ 为真当且仅当 P，Q 中恰有一个为真。如表 1-1 所列。

例 1-15 今天是 3 月 8 日或 3 月 9 日。

令 P：今天是 3 月 8 日，Q：今天是 3 月 9 日，则上述命题可翻译为 $P \oplus Q$。

命题联结词作为命题演算的运算符，也有优先顺序。上述常见的六种命题联结词运算优先级由高到低规定为：

$$\neg、\wedge、\vee/\oplus、\to、\leftrightarrow$$

相同的两个运算符出现在公式中时先左后右，如果要改变先后顺序可以使用圆括号。例如若 P 为 1，Q 为 0，R 为 0，$\neg(\neg Q \vee P) \rightarrow R$ 的真值为 1，而 $\neg\neg Q \vee P \rightarrow R$ 为 0。

例 1-16 设 P：天下雨，Q：他乘公交车上班。将下列命题符号化。

(1) 天没有下雨，他也没有乘公交车上班；

(2) 如果天下雨，他就乘公交车上班；

(3) 只有天下雨，他才乘公交车上班；

(4) 除非天下雨，否则他不乘公交车上班。

解 (1) $\neg P \wedge \neg Q$；(2) $P \rightarrow Q$；(3) $Q \rightarrow P$；(4) $\neg P \rightarrow \neg Q$。

1.2 命题公式与真值表

1.2.1 命题公式

前面用 P、Q 等表示命题，其真值已确定，称之为命题常元。若用 P、Q 等表示任意命题，则称它们为命题变元。因为命题变元不能确定真值，所以不是命题。当命题变元 P 用一确定命题取代时，P 才具有确定的真值。对命题变元指定真值时称对命题变元进行指派。一个命题变元有两种不同的真值指派。

所谓命题公式是指命题变元、命题常元用命题联结词及括号连接起来有意义的式子。

定义 1-8 命题公式的递归定义如下：

(1) 单个命题常元、命题变元是命题公式。

(2) 如果 A 和 B 是命题公式，则 $(\neg A)$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$、$(A \oplus B)$ 均为命题公式。

(3) 只有有限次应用(1)和(2)生成的公式才是命题公式。

例如 $(P \leftrightarrow P \vee Q)$，$(\neg(P \rightarrow Q))$，$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$，$(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T))$ 都是关于命题变元 P、Q、R、S、T 的命题公式。通常省略最外层括号。

正如命题变元不是命题，命题公式一般也不是复合命题。若对命题公式中所有命题变元指派以特定的命题(即真或假)，则命题公式就是复合命题。

1.2.2 真值表

定义 1-9 设 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是关于命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的命题公式，命题变元的真值有 2^n 种不同的组合，每一种组合称为一种**指派**。对每一种指派，可求出 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 的真值，列成表格，称为公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

的真值表。

例 1-17 给出$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\to Q)\to\neg P$，$(P\vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$的真值表。

解 如表 1-2、表 1-3、表 1-4 所列。为易于理解，表中写出了一些中间结果。

表 1-2

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

表 1-3

P	Q	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\to\neg P$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1

表 1-4

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

1.3 逻辑恒等式与永真蕴涵式

从命题公式的真值表可以看到，有些命题公式，无论其命题变元如何指派，其真值总为真，这种特殊的命题公式在今后的命题演算中极为重要。

1.3.1 永真式

定义 1-10 设$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$是一命题公式，对命题变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$

的 2^n 种指派的任一指派,若 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值总是为真,则称该命题公式为**永真式或重言式**;若 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值总为假,则称 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是**永假式或矛盾式**。若 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 既不是重言式也不是矛盾式,则称 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是**偶然式**。若至少有一指派使 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值为真,则称 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是**可满足式**。

例如:$P\vee\neg P$ 是永真式,$P\wedge\neg P$ 是永假式,显然若 A 是一永真式,则 $\neg A$ 是一永假式,若 B 是永假式,则 $\neg B$ 是永真式。

定理 1-1(代入规则) 将永真式中同一命题变元的每一处均用同一命题公式去代替,所得的结果仍然是永真式。

由于永真式的值不依赖于变元的值,所以该规则的正确性是显然的。

例如:$\neg Q\vee(P\to Q)\vee(\neg P\to Q)$ 是永真式,用公式 $(P\wedge R\to S)$ 代替上式中的 Q 得

$$\neg(P\wedge R\to S)\vee(P\to(P\wedge R\to S))\vee(\neg P\to(P\wedge R\to S))$$

仍是永真式。

之所以重点研究永真式,是因为永真式具有以下特点:

(1) 永真式的否定式是永假式,永假式的否定式是永真式;

(2) 永真式的合取、析取、蕴涵、等值都是永真式;

(3) 永真式中有许多非常有用的逻辑恒等式和永真蕴涵式。

1.3.2 逻辑恒等式

定义 1-11 给定两个命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 和 $B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$,若两个命题公式的真值表相同,即对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的任一指派,A 和 B 的真值都相同,亦即 $A\leftrightarrow B$ 为永真式,则称公式 A 和 B 为**逻辑恒等式**。记作 $A\Leftrightarrow B$,读作"A 逻辑恒等于 B"。

定理 1-2 设 A、B 为两个命题公式,$A\Leftrightarrow B$ 的充分必要条件是 $A\leftrightarrow B$ 为永真式。

证 若 $A\Leftrightarrow B$,则对命题变元的任一指派,A 与 B 的真值相等,即对命题变元的任一指派,$A\leftrightarrow B$ 的真值为真,说明 $A\leftrightarrow B$ 为永真式;反之,若 $A\leftrightarrow B$ 为永真式,则对所有命题变元的任一指派,A 与 B 的真值相等,这说明 $A\Leftrightarrow B$。

常用的逻辑恒等式如表 1-5 所列,其正确性不难用真值表进行证明。

下面用真值表来证明表 1-5 中分配律 $P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$、德·摩根定律 $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$、蕴涵表达式 $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$、逆反律 $P\to Q\Leftrightarrow\neg Q\to\neg P$ 和归谬律 $(P\to Q)\wedge(P\to\neg Q)\Leftrightarrow\neg P$,分别从表 1-6、表 1-7、表 1-8、表 1-9 和表 1-10 比较真值可知它们成立。

表 1-5　　常用的逻辑恒等式

1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双否定律
2	$P \wedge P \Leftrightarrow P, P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
3	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P, P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
4	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	分配律
5	$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$	结合律
6	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P, P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
7	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	德·摩根定律
8	$P \wedge 1 \Leftrightarrow P, P \vee 0 \Leftrightarrow P$	同一律
9	$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0, P \vee 1 \Leftrightarrow 1$	零　律
10	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0, P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$	矛盾律,排中律
11	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴含表达式
12	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	等值表达式
13	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	逆反律
14	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	归谬律
15	$P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	输出律

注意:“$\Leftrightarrow$”不是逻辑联结词,它表示两个命题公式真值的恒等性,类似于算术运算中的等于“=”,$A \Leftrightarrow B$ 不是命题公式。

表 1-6

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

表 1-7

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

表 1-8

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1-9

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1-10

P	Q	$P \to Q$	$P \to \neg Q$	$\neg P$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

利用真值表可以证明两个命题公式是否逻辑恒等（也可称为逻辑等价），但当公式中命题变元较多时，由于不同的指派太多，用这种方法比较麻烦，可以利用替换规则结合表 1-5 给出的常用逻辑恒等式证明其他的逻辑恒等式。

定义 1-12 如果 C 是命题公式 A 的一部分，且 C 本身是命题公式，则称 C 是命题公式 A 的**子公式**。

定理 1-3(替换规则) 若命题公式 A 有子公式 C，而 $C \Leftrightarrow D$，若用 D 替换 A 中的 C 得到 B，则 $A \Leftrightarrow B$。

事实上，因为 $C \Leftrightarrow D$，所以对所有命题变元的任一指派，公式 C 与 D 的真值相同，从而公式 A 与 B 的真值也相同，即 $A \Leftrightarrow B$。

代入规则与替换规则有以下区别：

(1) 代入规则是面向重言式的，而替换规则是面向任意命题公式的；

(2) 代入规则被替代的对象是命题变元，而替换规则被替代的对象可以是子公式；

(3) 代入规则的替代对象是任意公式，而替换规则的替代对象必须是等价式；

(4) 代入规则必须处处代入，而替换规则可以部分替换，也可处处替换。

例 1-18 证明 $P \wedge (\neg Q) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$。

证 $P \wedge (\neg Q) \vee Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)$ 分配律

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge 1$ 排中律

$\Leftrightarrow (P \vee Q)$ 同一律

例 1-19 证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$。

证 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 等值表达式

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ 蕴涵表达式

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P)$ 分配律

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P))$

分配律

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee 0) \vee (0 \vee (Q \wedge P))$ 矛盾律

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$ 同一律

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 交换律

例 1-20 证明以下命题公式都是等价的：

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$；

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$；

(3) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$；

(4) $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$；

(5) $\neg P \vee \neg Q \vee R$。

证 容易证明前 4 个公式均与公式(5)等价，从而它们彼此等价。

(1) $\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

(2) $\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R) \Leftrightarrow (1 \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$