



普通高等教育“十三五”规划教材
应用技术型大学数学课程系列教材

微积分与数学模型 (上册)

(第二版)

电子科技大学成都学院大学数学教研室 编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
应用技术型大学数学课程系列教材

微积分与数学模型(上册)

(第二版)

电子科技大学成都学院大学数学教研室 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是由电子科技大学成都学院数学建模与工程教育研究项目组的教师,依据教育部颁发的“关于高等工业院校微积分课程的教学基本要求”,以培养应用型科技人才为目标而编写的.与本书配套的系列教材还有《微积分与数学模型》(下册)、《线性代数与数学模型》、《概率统计与数学模型》.

本书共5章,主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分等一元函数微积分学的基本内容,同时还介绍了极限模型、导数模型、优化与微分模型、定积分模型.每节后面配备有适当的习题,每章配备有复习题,最后附有参考解答与提示.本书注重应用,在介绍微积分基本内容的基础上,融入很多模型及应用实例.

本书可作为普通高校、独立学院及成人教育、自考等各类本科微积分课程的教材或相关研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型.上册/电子科技大学成都学院大学数学教研室编.
—2版.—北京:科学出版社,2017.8

普通高等教育“十三五”规划教材·应用技术型大学数学课程系列教材
ISBN 978-7-03-053870-3

I. ①微… II. ①电… III. ①微积分-高等学校-教材 ②数学模型-高等学校-教材 IV. ①O172 ②O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 146513 号

责任编辑:王胡权/ 责任校对:邹慧卿

责任印制:白 洋/ 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年8月第 二 版 印张:17

2017年8月第五次印刷 字数:337 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“应用技术型大学数学课程系列教材”编委会

主任 彭年斌 陈骑兵

副主任 帅 鲲 张诗静

编委 (以下按姓名笔画排列)

向 飞 李 琼 李宝平 李建军

李秋敏 李政文 张 强 张利凤

张秋燕 杨 森 武伟伟 钱 茜

廖 果 康淑菊 薛 凤

第二版前言

本书是科学出版社第一批普通高等教育“十三五”规划教材,也是四川省 2013~2016 年高等教育人才培养质量和教改建设项目成果。本书第一版自 2014 年出版以来,受到同类院校的广泛关注,并被多所学校选为教材或参考资料。经过几年的教学实践,并广泛征求同行的宝贵意见,在保持第一版教材的框架和风格的基础上,此次再版修改了以下几个方面内容:

- (1) 对部分内容进行了优化与增删,使一些计算过程更加简明;
- (2) 对原教材中的例题、习题进行了精选,并增添了一些典型例题、习题;
- (3) 对文字叙述进行了加工,使其表达更加简明;
- (4) 对原教材中的少数印刷错误进行了勘误。

本书由陈骑兵,康淑菊主编,上册执笔者是:张秋燕、康淑菊(第 1 章)、武伟伟(第 2 章)、彭年斌、康淑菊(第 3 章)、张诗静(第 4、5 章)编写,全书由陈骑兵负责统稿。

这次修订中,我们获得了许多宝贵的意见和建议,借本书再版机会,向对我们工作给予关心、支持的学院领导、广大同行表示诚挚的谢意,新版中存在的问题,欢迎专家、同行和读者批评指正。

编 者

2017 年 6 月于成都

第一版前言

为了培养应用型科技人才,我们在大学数学的教学中以工程教育为背景,坚持将数学建模、数学实验的思想与方法融入数学主干课程教学,收到了好的效果.通过教学实践我们认为将原来的高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程分别改设为微积分与数学模型、线性代数与数学模型、概率统计与数学模型课程,对转变师生的教育理念,引领学生热爱数学学习、重视数学应用很有帮助,对理工类应用型本科学生工程数学素养的培养很有必要.

“将数学建模思想全面融入理工类数学系列教材的研究”是电子科技大学成都学院“以 CDIO 工程教育为导向的人才培养体系建设”项目中的课题,也是四川省 2013~2016 年高等教育人才培养质量和教改建设项目.

本套系列教材主要以应用型科技人才培养为导向,以理工类专业需要为宗旨,在系统阐述微积分、线性代数、概率统计课程的基本概念、基本定理、基本方法的同时融入了很多经典的数学模型,重点强调数学思想与数学方法的学习,强调怎样将数学应用于工程实际.

本书主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、一元函数积分学等内容以及极限模型、导数模型、优化与微分模型、定积分模型.

本书的编写具有如下特点:

(1) 在保证基础知识体系完整的前提下,力求通俗易懂,删除了繁杂的理论性证明过程;教材体系和章节的安排上,严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律;在对内容深度的把握上,考虑应用型科技人才的培养目标和学生的接受能力,做到深浅适中、难易适度.

(2) 在重要概念和公式的引入上尽量根据数学发展的脉络还原最质朴的案例,教材中引入的很多案例都是数学建模活动中或讨论课上学生最感兴趣的问题,其内容丰富、生动有趣、视野开阔、宏微兼具.这对于提高学生分析问题和解决问题的能力都很有帮助.

(3) 按节配备了难度适中的习题,按章配备了复习题,并附有答案或提示.

全书讲授与模型讨论需要 80 学时.根据不同层次的需要,课时和内容可酌情取舍.

本书由彭年斌、张秋燕主编,第 1 章由张秋燕编写,第 2 章由武伟伟编写,第 3 章由彭年斌编写,第 4 章和第 5 章由张诗静编写.全书由彭年斌负责统稿.

在本书的编写过程中,我们参阅了大量的教材与文献资料,在此向这些作者表

目 录

第二版前言

第一版前言

绪论	1
第 1 章 函数、极限与连续	4
1.1 函数的基本概念	4
1.1.1 准备知识	4
1.1.2 函数定义	4
1.1.3 函数特性	6
习题 1.1	7
1.2 初等函数	8
1.2.1 基本初等函数	8
1.2.2 函数的复合	11
1.2.3 初等函数	12
习题 1.2	12
1.3 极限的概念	13
1.3.1 极限引例	13
1.3.2 极限的直观定义	14
1.3.3 极限的精确定义	14
习题 1.3	17
1.4 极限的性质与运算	18
1.4.1 极限的性质	18
1.4.2 极限的运算	19
习题 1.4	24
1.5 无穷小量	25
1.5.1 无穷小量与无穷大量	25
1.5.2 无穷小量的运算性质	26
1.5.3 无穷小量的比较	27
习题 1.5	29
1.6 函数的连续性	30
1.6.1 连续函数的概念	30

1.6.2 间断点及其分类	31
1.6.3 连续函数的运算性质与初等函数的连续性	32
习题 1.6	33
1.7 闭区间上连续函数的性质	34
1.7.1 最值定理	34
1.7.2 介值定理	34
习题 1.7	35
1.8 极限模型应用举例	36
1.8.1 斐波那契数列与黄金分割	36
1.8.2 交流电路中的电流强度	38
习题 1.8	38
复习题 1	39
第 2 章 导数与微分	41
2.1 导数的概念	41
2.1.1 导数的产生背景	41
2.1.2 导数的概念	42
2.1.3 单侧导数	45
2.1.4 导数的几何意义	46
2.1.5 函数可导与连续的关系	47
习题 2.1	47
2.2 导数的运算法则	48
2.2.1 导数的四则运算法则	49
2.2.2 反函数的求导法则	50
2.2.3 复合函数的求导法则	52
2.2.4 基本初等函数的导数公式	54
习题 2.2	55
2.3 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数	57
2.3.1 隐函数的导数	57
2.3.2 由参数方程所确定的函数的导数	61
2.3.3 相关变化率	63
习题 2.3	63
2.4 高阶导数	64
习题 2.4	69
2.5 微分	70

2.5.1	微分的概念	70
2.5.2	微分的运算法则	72
2.5.3	函数的线性近似	74
	习题 2.5	76
2.6	导数与微分模型举例	77
2.6.1	实际问题中的导数模型	77
2.6.2	人口增长模型	78
2.6.3	经营决策模型	79
	习题 2.6	80
	复习题 2	81
第 3 章	微分中值定理与导数的应用	83
3.1	微分中值定理	83
3.1.1	罗尔定理	83
3.1.2	拉格朗日定理	85
3.1.3	柯西定理	88
	习题 3.1	89
3.2	洛必达法则	90
3.2.1	关于 $\frac{0}{0}$ 型不定式的洛必达法则	90
3.2.2	关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的洛必达法则	92
3.2.3	其他不定型	93
	习题 3.2	95
3.3	泰勒公式	96
3.3.1	函数逼近简介	96
3.3.2	具有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式	97
3.3.3	具有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式	98
3.3.4	将函数展开为泰勒公式	99
3.3.5	泰勒公式的应用	101
	习题 3.3	104
3.4	函数的单调性与极值	104
3.4.1	函数单调性的判定法	104
3.4.2	函数的极值	108
3.4.3	函数的最大值与最小值	111
	习题 3.4	114

3.5 函数的凹凸性与曲线的拐点	116
3.5.1 函数的凹凸性	116
3.5.2 曲线的拐点	118
习题 3.5	121
3.6 函数图形的描绘	121
3.6.1 曲线的渐近线	122
3.6.2 函数图形的描绘	124
习题 3.6	126
3.7 优化与微分模型举例	127
3.7.1 经营优化问题	127
3.7.2 运输问题	129
3.7.3 库存问题	131
3.7.4 森林救火问题	132
习题 3.7	134
复习题 3	135
第 4 章 不定积分	137
4.1 不定积分的概念与性质	137
4.1.1 原函数与不定积分的概念	137
4.1.2 不定积分的几何意义	139
4.1.3 基本积分表	140
4.1.4 不定积分的性质	140
习题 4.1	143
4.2 换元积分法	144
4.2.1 第一类换元法(凑微分法)	145
4.2.2 第二类换元法	152
习题 4.2	156
4.3 分部积分法	157
习题 4.3	163
4.4 有理函数的积分	164
4.4.1 有理真分式分解为简单分式之和	164
4.4.2 有理函数的积分	166
4.4.3 三角函数有理式积分	167
习题 4.4	169
4.5 不定积分的模型举例	169

4.5.1 在几何中的应用	169
4.5.2 在物理中的应用	170
4.5.3 在经济学中的应用	171
4.5.4 植物生长初步模型	172
复习题 4	174
第 5 章 定积分及其应用	176
5.1 定积分的概念与性质	176
5.1.1 引例	176
5.1.2 定积分的定义	178
5.1.3 可积的充分条件	179
5.1.4 定积分的几何意义	179
5.1.5 定积分的性质	180
习题 5.1	184
5.2 微积分基本公式	185
5.2.1 变速直线运动的位置函数与速度函数之间的联系	185
5.2.2 积分上限函数及其导数	185
5.2.3 牛顿-莱布尼茨公式	188
习题 5.2	190
5.3 定积分的换元法与分部积分法	191
5.3.1 定积分的换元法	191
5.3.2 定积分的分部积分法	195
习题 5.3	197
5.4 广义积分	199
5.4.1 无穷限的广义积分	199
5.4.2 无界函数的广义积分	201
习题 5.4	204
5.5 定积分的几何应用	205
5.5.1 微元法	205
5.5.2 定积分在几何上的应用	206
习题 5.5	215
5.6 定积分模型应用举例	216
5.6.1 功	216
5.6.2 引力	218
5.6.3 质量	221

5.6.4	数值逼近	221
5.6.5	扫雪机清扫积雪模型	223
	习题 5.6	224
	复习题 5	225
	部分习题参考答案	228
	参考文献	247
附录 I	初等数学常用公式	248
附录 II	常用平面曲线及其方程	253
254	254
255	255
256	256
257	257
258	258
259	259
260	260
261	261
262	262
263	263
264	264
265	265
266	266
267	267
268	268
269	269
270	270
271	271
272	272
273	273
274	274
275	275
276	276
277	277
278	278
279	279
280	280
281	281
282	282
283	283
284	284
285	285
286	286
287	287
288	288
289	289
290	290
291	291
292	292
293	293
294	294
295	295
296	296
297	297
298	298
299	299
300	300
301	301
302	302
303	303
304	304
305	305
306	306
307	307
308	308
309	309
310	310
311	311
312	312
313	313
314	314
315	315
316	316
317	317
318	318
319	319
320	320
321	321

绪 论

微积分是研究函数的微分、积分,以及相关概念和应用的数学基础学科.它是17世纪由英国的牛顿(Newton, 1643~1727)和德国的莱布尼茨(Leibniz, 1646~1716)在前人成果的基础上分别而又几乎是同时创立起来的.17世纪的欧洲,正处于工业革命时期,航海、造船业的兴起,运河、渠道的修建,以及各种机械的制造,都促使人们寻求研究物体(包括天体)的运动变化,呼唤人们去探求研究曲线、图形的一般数学方法,并将这些方法应用到实践中去.牛顿-莱布尼茨创立的微积分虽然一开始并不严格,但却直观生动,并且无论是对数学还是对其他科学乃至技术的发展都产生了巨大的影响.

系统地将微积分建立在极限理论基础之上的,是19世纪上半叶的法国数学家柯西(Cauchy, 1789~1857),而现在人们之所以能够运用集合论来处理微积分的问题,应归功于19世纪下半叶的数学家康托尔(Cantor, 1845~1918).微积分的发展经过了漫长的三百多年.

数学模型是用数学语言抽象出的某个现实对象的数量规律.构造数学模型的过程主要有三个步骤.第一步,构造模型:从实际问题中分析、简化、抽象出数学问题;第二步,数学解答:对所提出的数学问题求解;第三步,模型检验:将所求得的答案返回到实际问题中去,检验其合理性并进一步总结出数学规律.

微积分的产生和发展与人类的实际需要密切相关.而借助于微积分,在解决各类问题的同时也建立了很多数学模型.

微积分的产生与下面两个典型模型直接相关.

模型 1 阿基米德(Archimedes, 约公元前 287 年~约公元前 212 年)问题.

如图 0.1 所示,由曲线 $y=x^2$ 与 x 轴,直线 $x=1$ 可以围成一个平面图形 D ,求平面图形 D 的面积 S .

求平面图形的面积,并不是一个新话题.我们熟知三角形、长方形、平行四边形、梯形、圆等平面图形的面积计算公式,也研究过一些其他规则图形的面积,在研究中大多都是将其分割成已知图形面积的和或差.然而,本题中平面图形的面积却不能如法炮制.

实际上,这个问题早在公元前就被古希腊数学家阿基米德解决了.如图 0.2(a)~(d)所示,我们发现每个图中小矩形面积的和是随小矩形个数的变化而变化

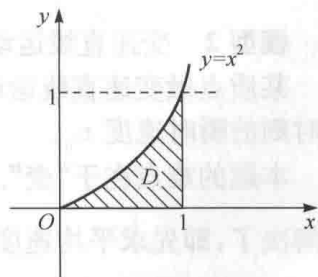


图 0.1

的,而且随小矩形面积个数的增多,小矩形面积的和越来越接近于要求的平面图形的面积.阿基米德的解题思想正是基于此,即将区间 $[0,1]$ 平均分成 n 等份.若把 n 个小矩形面积的和记为 S_n ,则当 n 充分大时, S_n 趋近于 S .

后来的数学家们将此过程细化为四个步骤:分割、近似、求和、取极限,这正是积分的思想.该书第4章有详细叙述.

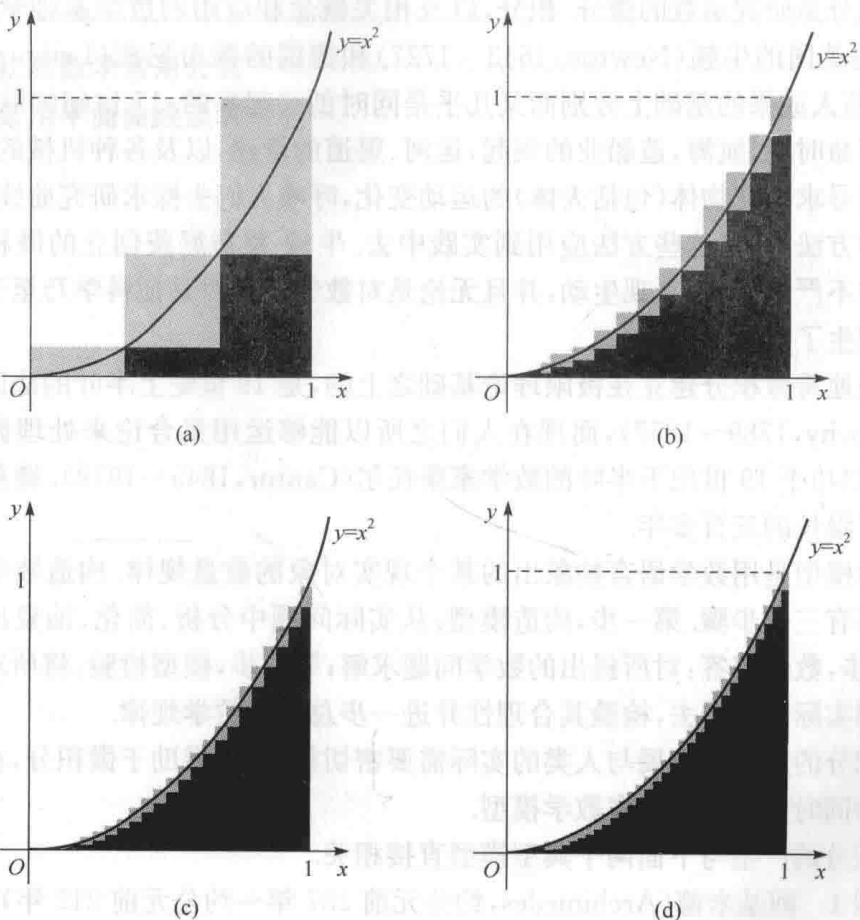


图 0.2

模型 2 变速直线运动的瞬时速度问题.

某质点做变速直线运动,已知 t_0 时刻的位移为 $s(t_0)$, t 时刻的位移为 $s(t)$.求 t_0 时刻的瞬时速度 v_{t_0} .

本题的难点在于“变”.其实,这个问题早在17世纪就已被英国的物理学家牛顿解决了,即先求平均速度 $\bar{v} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$,则当 t 趋近于 t_0 时,平均速度 \bar{v} 就趋近于 v_{t_0} .后来的数学家就将瞬时速度定义为平均速度的极限,即

$$v_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

而这个特殊的极限后来就抽象为导数的定义. 这属于微分学的内容, 将在该书第 2 章中详述.

微积分与数学模型一书主要包括函数、极限与连续; 一元函数微积分学及其模型应用实例; 多元函数微积分学及其模型应用实例; 常微分方程与无穷级数等, 其中重点介绍了极限模型、优化与微分模型、定积分模型、数量值函数积分模型、向量值函数积分模型、微分方程中的模型与经济数学模型. 函数是微积分研究的基本对象, 极限是微积分的基本工具, 微分和积分方法是基本技能, 众多的结合工程实际的数学模型应用是基本训练.

从数学发展的历史可以看出, 微积分的产生, 是由常量数学向变量数学转变的一件具有划时代意义的大事, 它是学习数学和掌握任何一门自然科学与工程技术的基础, 读者要充分认识到学习微积分与数学模型的重要性, 要注重研究和掌握微积分与数学模型学习的特点, 认真理解基本概念, 熟悉基本定理, 掌握基本技能, 应用基本模型, 以期使自己的思想方法从不变到变、从有限到无限、从有形到无形、从特殊到一般、从直观到抽象, 产生一个质的飞跃.

微积分生动有趣但又深邃严谨, 贴近生活但又复杂多变, 希望读者在学习时勤于思考、善于发现, 在掌握基本的数学方法的同时, 不断提高工程应用能力.

第 1 章 函数、极限与连续

函数是数学中的一个基本概念,它反映了客观世界中变量变化之间的相依关系,是微积分的主要研究对象.极限是研究微积分的重要工具.本章介绍函数的概念及特性,极限的概念、性质与运算,函数的连续性.它是学习微积分的基础,也是数学应用中建立数学模型的基础.

1.1 函数的基本概念

1.1.1 准备知识

1. 集合

集合是某些指定对象组成的总体.通常用大写字母 A, B, C, \dots 表示集合.构成集合的成员称为元素,一般用小写字母 a, b, c, \dots 表示.并且,若 a 是集合 A 的元素,则可记作 $a \in A$,读作“ a 属于 A ”.不含任何元素的集合称为空集,记作 \emptyset .本书所涉及的集合主要是数集.一般地,自然数集合用 \mathbf{N} 表示;正整数集合用 \mathbf{N}^* 表示;整数集合用 \mathbf{Z} 表示;有理数集合用 \mathbf{Q} 表示;实数集合用 \mathbf{R} 表示.

2. 区间

设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,则数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a, b) ;数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记作 $[a, b]$.类似地, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 和 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 都称为半开区间.以上这些区间的长度是有限的,统称为有限区间.否则,称为无限区间,如 $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$.

另外,还有一类特殊的区间在本书的数学表述中经常遇到,就是邻域.开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$.

在以后的数学表述中,有两个常用的逻辑量词符号“ \forall ”和“ \exists ”.“ \forall ”表示“任意”.“ \exists ”表示“存在”.

1.1.2 函数定义

生活中充满了许多变化的量,而这些量的变化往往不是独立的,它们是遵循一定规律相互关联的.例如,自由落体运动中物体下落的距离 s 随时间 t 而变化;圆的面积 A 随半径 r 的改变而改变……为更好地把握变量变化之间的客观规律,我