高等数学竞赛题解析教程（2018）

GAODENGSHUXUE JINGSAITI JIEXI JIAOCHENG (2018)

陈仲 主编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

陈仲，南京大学数学系教授。曾参加国家理科“高等数学”试题库建设；曾任江苏省普通高校高等数学竞赛命题组组长；曾获江苏省一类优秀课程奖，两次获江苏省优秀教学成果二等奖；曾获南京大学“十佳教师”，连续三年被南京大学学生评为“我最喜爱的老师”，获“浦苑恒星”。著作有：

《微分方程》

《微积分学引论（上、[illegible]

《大学数学典型题解析》

《大学数学教程（上、下）》

《微分方程与线性代数》

《高等数学（上、下）》

《硕士生入学考试历年数学试题解析》等。

建议上架 大学数学／考研辅导

ISBN 978-7-5641-7466-8

9 787564 174668 >

定价：43.80元

责任编辑 吉雄飞
责任印制 周荣虎
封面设计 顾晓阳

高等数学竞赛题解析教程(2018)

主编：陈　仲
编者：陈　仲　张玉莲　林小围
王夕予　王　培

东南大学出版社
·南京·

内 容 简 介

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲，并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成，内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题，每个专题含"基本概念与内容提要"、"竞赛题与精选题解析"、"练习题"三个部分。其中，竞赛题选自江苏(1—14届)、北京(1—15届)、浙江(1—10届)、广东、陕西、上海、天津等省市大学生数学竞赛试题；全国大学生数学竞赛试题(1—8届预赛和决赛)；清华大学、南京大学、上海交通大学等高校大学生数学竞赛试题；莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。

高等数学竞赛能激励大学生们学习高等数学的兴趣，活跃思想。高等数学竞赛试题中既含基本题，又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题，这些题目构思绝妙，方法灵活，技巧性强，本书逐条解析，并对重要题目深入分析，总结解题方法与技巧。

本书可供准备高等数学竞赛的老师和学生作为应试教程，也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书，特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛题解析教程. 2018 / 陈仲主编. —南京：东南大学出版社，2017.11

ISBN 978-7-5641-7466-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 263657 号

高等数学竞赛题解析教程(2018)

出版发行 东南大学出版社
社　　址 南京四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人 江建中
责任编辑 吉雄飞(联系电话：025－83793169)
经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 700mm×1000mm　1/16
印　　张 22
字　　数 431 千字
版　　次 2017 年 11 月第 1 版
印　　次 2017 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN　978-7-5641-7466-8
定　　价 43.80 元

前 言

高等数学(或称大学数学)是一年级大学生的基础课程,江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会自1991年以来已成功组织了十四届全省性的大学生高等数学竞赛,参赛学校为全省普通高等学校,含师范学院、地方工学院、独立学院、各重点高校的二级学院、各类职业技术学院、高等专科学校、职业大学等,共计100多所,考生达13000多人,参赛类别分为本科一级、本科二级、本科三级、本科四级、专科等五类。

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于本科要注重素质教育的指示,加强普通高校的数学教学工作,推动高等数学的教学改革,提高教学质量。高等数学竞赛能激励大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思想,它要求学生比较系统地理解高等数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲,并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含“基本概念与内容提要”、“竞赛题与精选题解析”、“练习题”三个部分。其中,竞赛题选自江苏(1—14届)、北京(1—15届)、浙江(1—10届)、广东、陕西、上海、天津等省市大学生数学竞赛试题;全国大学生数学竞赛试题(1—8届预赛和决赛);清华大学、南京大学、上海交通大学、西安交通大学、天津大学、北京邮电大学等高校大学生数学竞赛试题;莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。这些试题中既含基本题,又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题,它们构思绝妙,方法灵活,技巧性强,本书逐条解析,并对重要题目深入分析,总结解题方法与技巧。还有一些“好题”在高数竞赛中没有出现过,为此本书在每个专题中都补充了不少“精选题”,大大丰富了本书的内涵。

本书自2012年起陆续推出多个版本,皆受到广大教师和学生的赞许。此次修订的重点是“竞赛题与精选题解析”部分,删去了旧版中的一些陈题,增选了江苏省第十四届、全国大学生(第八届预赛和决赛)数学竞赛试题,并修正了以往解析中的一些疏漏。

本书可供准备高等数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提

高高等数学水平。

在本书编写过程中，编者得到南京大学许绍溥、姜东平、姚天行、丁南庆、朱晓胜、周国飞等教授的支持与帮助，得到东南大学王栓宏、陈文彦、陈恩水、黄骏，成贤学院董梅芳，扬州大学刘金林、蒋国强，江南大学曹菊生，南通大学郭跃华，江苏大学卢殿臣、李医民，苏州大学侯绳照，南京理工大学邱志鹏，南京航空航天大学唐月红，解放军陆军工程大学姚泽清，南京工业大学施庆生、颜超，南京邮电大学胡国雷，南京信息工程大学夏大峰，河海大学朱永忠，南京林业大学蒋华松，中国矿业大学张兴永，常州大学石澄贤，淮阴工学院吴延东，盐城工学院陈万勇，淮海工学院谭飞等教授的一贯支持，编者谨此一并表示衷心的感谢。编者还要感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校，使本书质量大有提高。

书中错误难免，敬请智者不吝赐教。

陈　仲

2017 年 8 月于南京大学

目　录

专题 1　函数与极限

1.1　基本概念与内容提要

1.1.1　一元函数基本概念

1）利用已知条件求函数的表达式.

2）函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性.

3）基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数）和初等函数.

4）反函数、复合函数、参数式函数、隐函数.

5）分段函数.

1.1.2　数列的极限

1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ 的定义：$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

2）收敛数列的性质

定理 1（惟一性）　若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，则其极限 A 是惟一的.

定理 2（有界性）　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

定理 3（保向性）　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A > 0(< 0)$，则 $\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，有

$$x_n > 0\quad(< 0)$$

1.1.3　函数的极限

1）六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x\to a}f(x) = A,\quad \lim_{x\to a+}f(x) = A,\quad \lim_{x\to a-}f(x) = A$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x) = A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x) = A$$

例如　$\lim\limits_{x\to a}f(x) = A$ 的定义：$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\sigma > 0$，当 $0 < |x - a| < \sigma$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

定理 1　$\lim\limits_{x\to a}f(x) = A \iff f(a-) = A,\quad f(a+) = A.$

定理 2　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A \iff f(-\infty) = A,\quad f(+\infty) = A.$

2）函数极限的性质

定理 3（惟一性）　在某一极限过程下，若函数 $f(x)$ 的极限存在，则其极限是惟一的.

定理 4（有界性）　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，则存在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}$，使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}$ 上有界.

定理 5（保向性）　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$，则存在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}$，使得 $x\in\mathring{U}$ 时 $f(x)>0(<0)$.

1.1.4　证明数列或函数极限存在的方法

定理 1（夹逼准则）　设三个数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

定理 2（夹逼准则）　设三个函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域中满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

注　对于其他的极限过程，类似的结论留给读者自己写出.

定理 3（单调有界准则）　若数列 $\{x_n\}$ 单调增加，并有上界（或单调减少，并有下界），则数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

1.1.5　无穷小量

1）若在某极限过程中（$x\to a,x\to a+,x\to a-,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$ 中任一个），某变量或函数 $\alpha(x)\to 0$，则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程下的**无穷小量**，简称**无穷小**. 在同一极限过程中的有限个无穷小量之和仍为无穷小量；在同一极限过程中的有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量；无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量. 例如

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\quad\left(\text{因 } x\to 0,\sin\frac{1}{x}\text{ 有界}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\quad\left(\text{因}\frac{1}{x}\to 0,\sin x\text{ 有界}\right)$$

定理　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，这里 $x\to a$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

2）无穷小的比较

假设在某极限过程中（以 $x\to a$ 为例），α,β 都是无穷小量.

(1) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to\infty$，则称 α 是 β 的**低阶无穷小**.

(3) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to c(c\neq 0,c\in\mathbf{R})$，则称 α 与 β 为**同阶无穷小**. 特别，当 $c=1$ 时，称 α 与 β 为**等价无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta(x\to a)$.

(4) 若$\dfrac{\alpha}{x^k} \to c(c \neq 0, k > 0)$，则称$\alpha$是$x$的 **$k$ 阶无穷小.** 此时$\alpha \sim cx^k$，称cx^k为α的**无穷小主部.**

1.1.6　无穷大量

1) 当$n \to \infty$时，下列数列无穷大的阶数由低到高排序：

$$\ln n, \quad n^\alpha(\alpha > 0), \quad n^\beta(\beta > \alpha > 0), \quad a^n(a > 1), \quad n^n$$

2) 当$x \to +\infty$时，下列函数无穷大的阶数由低到高排序：

$$\ln x, \quad x^\alpha(\alpha > 0), \quad x^\beta(\beta > \alpha > 0), \quad a^x(a > 1), \quad x^x$$

1.1.7　求数列或函数的极限的方法

1) 四则运算法则
2) 利用夹逼准则求极限
3) 先利用单调有界准则证明数列的极限存在，再求其极限
4) 利用两个重要极限求极限

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \qquad \lim_{\square \to 0}(1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}$$

例如　$\lim\limits_{x \to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \lim\limits_{x \to 0}(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \mathrm{e}$　（这里$\square = \cos x - 1$）

5) 利用等价无穷小代换求极限

定理　当$\square \to 0$时，有下列无穷小的等价性：

$$\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan x \sim \arctan \square \sim \ln(1 + \square) \sim \mathrm{e}^{\square} - 1$$

$$(1 + \square)^\lambda - 1 \sim \lambda \square \quad (\lambda > 0)$$

$$1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2$$

6) 利用洛必达法则求极限(关于洛必达法则见第 2.1 节)
7) 利用马克劳林展开求极限(关于马克劳林展式见第 2.1 节)
8) 利用导数的定义求极限
9) 利用定积分的定义求极限

1.1.8　函数的连续性

1) 函数$f(x)$连续的定义：设$f(x)$在$x = a$的某邻域内有定义，若$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，则称$f(x)$ **在 $x = a$ 处连续**；若$f(x)$在某区间(a,b)上每一点皆连续，称 **$f(x)$ 在(a,b)上连续**，记为$f \in C(a,b)$；若$f(x)$在(a,b)上连续，且$f(x)$在$x = a$处**右连续**(即$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$)，在$x = b$处**左连续**(即$\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$)，则称$f(x)$**在**

$[a,b]$ 上连续，记为 $f \in C[a,b]$.

2) 连续函数的四则运算性质

3) 复合函数的极限与连续性

定理 1 若$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$，函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处连续，则

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to a}\varphi(x))=f(b)$$

定理 2 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，函数 $f(x)$ 在 $x=b=\varphi(a)$ 处连续，则 $f(\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处连续，即有

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=f(\varphi(a))$$

定理 3 初等函数在其有定义的区间上连续.

4) 间断点的分类

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**间断点**. 间断点分为两类：

(1) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 皆存在时，称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 若 $f(a-)=f(a+)$，称 $x=a$ 为**可去型**；若 $f(a-)\neq f(a+)$，称 $x=a$ 为**跳跃型**.

(2) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中至少有一个不存在时，称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

5) 闭区间上的连续函数的性质

定理 4(有界定理) 若 $f\in C[a,b]$，则 $\exists K>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，$|f(x)|\leqslant K$.

定理 5(最值定理) 若 $f\in C[a,b]$，则 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使得

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

定理 6(零点定理) 若 $f\in C[a,b]$，$f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$(称 $x=\xi$ 为函数 $f(x)$ 的零点).

1.2 竞赛题与精选题解析

1.2.1 求函数的表达式(例 1.1—1.3)

例 1.1(江苏省 2004 年竞赛题) 已知函数 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数，且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时 $f(x)=\sin x-\cos x+2$，则当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时 $f(x)=$ ________.

解析 因 $f(x)$ 为奇函数，所以当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时

$$\begin{aligned}f(x)&=-f(-x)=-(\sin(-x)-\cos(-x)+2)\\&=\sin x+\cos x-2\end{aligned}$$

又因为 $f(x)$ 是周期为 π 的函数，所以当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x-\pi) = \sin(x-\pi) + \cos(x-\pi) - 2 \\ &= -\sin x - \cos x - 2\end{aligned}$$

例 1.2(江苏省 1991 年竞赛题)　函数 $y = \sin x \mid \sin x \mid \left(其中 \mid x \mid \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$的反函数为________.

解析　当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时 $y = \sin^2 x$,即 $\sin x = \sqrt{y}\ (0 \leqslant y \leqslant 1)$,所以 $x = \arcsin\sqrt{y}(0 \leqslant y \leqslant 1)$;当$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$时 $y = -\sin^2 x(-1 \leqslant y \leqslant 0)$,所以$\sin^2 x = -y$, $\sin x = -\sqrt{-y}$, $x = \arcsin(-\sqrt{-y}) = -\arcsin(\sqrt{-y})\ (-1 \leqslant y \leqslant 0)$. 于是所求反函数为

$$y = \begin{cases} \arcsin\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\arcsin(\sqrt{-x}), & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

注　若利用公式 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,类似的分析可得所求反函数为

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\arccos(1-2x), & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\dfrac{1}{2}\arccos(1+2x), & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

例 1.3(莫斯科经济统计学院 1975 年竞赛题)　求

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

的表达式,并作函数 $f(x)$ 的图象.

解析　当 $0 \leqslant | x | < 1$ 时,$f(x) = (1+0+0)^0 = 1$;

当 $x = 1$ 时,$f(1) = (2+0)^0 = 1$;

当 $x = -1$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1 + (-1)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = (2+0)^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{1 + (-1)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

所以 $x = -1$ 时 $f(x)$ 无定义;

当 $1 < x < 2$ 时

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x$$

当 $x = 2$ 时

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[n]{2+\frac{1}{2^n}}=2(2+0)^0=2$$

当 $|x|>2$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=\frac{x^2}{2}$$

当 $-2<x<-1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+x^{2n}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}(-x)\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$$
$$=(-x)(0+1+0)^0=-x$$

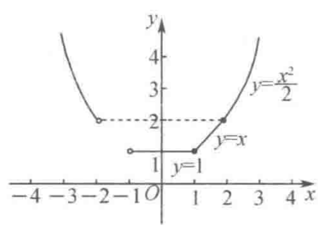
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[2n+1]{\frac{1}{x^{2n+1}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}$$
$$=x\cdot(0+1+0)^0=x$$

所以 $-2<x<-1$ 时 $f(x)$ 无定义；

当 $x=-2$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-2)^{2n}+(2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{2^{2n}}+2}=2\cdot(0+2)^0=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-2)^{2n+1}+2^{2n+1}}=1^0=1$$



所以 $x=-2$ 时 $f(x)$ 无定义.

函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.

1.2.2　利用四则运算求极限(例 1.4—1.16)

例 1.4(江苏省 2008 年竞赛题)　当 $a=$________，$b=$________时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

解析　因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=\frac{a+2}{b-1}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

所以 $a+2=1-b$；又因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=\frac{a-2}{b+1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

所以 $a-2=b+1$.

由上，解得 $a=1,b=-2$.