

高等学校通信工程专业“十二五”规划教材

电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO

雷文太 赵亚湘 董 健 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等学校通信工程专业“十二五”规划教材

电磁场与电磁波

雷文太 赵亚湘 董 健 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是高等学校通信工程专业“十二五”规划教材。内容包括：电磁场的基本规律、静态电磁场、静态场边值问题及其解、正弦平面电磁波、均匀平面波的反射与透射、电磁辐射。矢量分析部分的内容，安排在本系列教材《通信工程应用数学》中进行先期学习。这一安排，保证了在有限学时中可对电磁场与电磁波的知识点进行较为全面的讲解与学习。本书内容丰富，注重对电磁场与电磁波的物理概念及其本质的阐述和分析，课后习题有助于加深学生对空间电磁规律的理解。

本书适合作为普通高等院校电子信息类专业的教材，也可供通信工程、电子信息工程、微波工程等专业工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与电磁波/雷文太, 赵亚湘, 董健主编.

—北京: 中国铁道出版社, 2018. 1

高等学校通信工程专业“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-24028-8

I. ①电… II. ①雷… ②赵… ③董… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 284514 号

书 名: 电磁场与电磁波

作 者: 雷文太 赵亚湘 董 健 主编

策 划: 周海燕 曹莉群

读者热线: (010) 63550836

责任编辑: 周海燕 鲍 闻

封面设计: 一克米工作室

封面制作: 刘 颖

责任校对: 张玉华

责任印制: 郭向伟

出版发行: 中国铁道出版社 (100054, 北京市西城区右安门西街 8 号)

网 址: <http://www.tdpress.com/51eds/>

印 刷: 虎彩印艺股份有限公司

版 次: 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16 印张: 10.25 字数: 238 千

书 号: ISBN 978-7-113-24028-8

定 价: 32.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书, 如有印制质量问题, 请与本社教材图书营销部联系调换。电话: (010) 63550836

打击盗版举报电话: (010) 51873659

高等学校通信工程专业“十二五”规划教材

主 任：施荣华 李 宏

副主任：王国才 彭 军

主 审：邹逢兴

委 员：（按姓氏笔画排序）

王 玮 王 浩 石金晶 李 尹

李曦柯 杨政宇 张晓勇 赵亚湘

郭丽梅 康松林 梁建武 彭春华

董 健 蒋 富 雷文太

在社会信息化的进程中,信息已成为社会发展的重要资源,现代通信技术作为信息社会的支柱之一,在促进社会发展、经济建设方面,起着重要的核心作用。信息的传输与交换的技术即通信技术是信息科学技术发展迅速并极具活力的一个领域,尤其是数字移动通信、光纤通信、射频通信、Internet 网络通信使人们在传递信息和获得信息方面达到了前所未有的便捷程度。通信技术在国民经济各部门和国防工业以及日常生活中得到了广泛的应用,通信产业正在蓬勃发展。随着通信产业的快速发展和通信技术的广泛应用,社会对通信人才的需求在不断增加。通信工程(也作电信工程,旧称远距离通信工程、弱电工程)是电子工程的一个重要分支,电子信息类子专业,同时也是其中一个基础学科。该学科关注的是通信过程中的信息传输和信号处理的原理和应用。本专业学习通信技术、通信系统和通信网等方面的知识,能在通信领域中从事研究、设计、制造、运营及在国民经济各部门和国防工业中从事开发、应用通信技术与设备的相关工作。

社会经济发展不仅对通信工程专业人才有十分强大的需求,同样通信工程专业的建设与发展也对社会经济发展产生重要影响。通信技术发展的国际化,将推动通信技术人才培养的国际化。目前,世界上有3项关于工程教育学历互认的国际性协议,签署时间最早、缔约方最多的是《华盛顿协议》,也是世界范围知名度最高的工程教育国际认证协议。2013年6月19日,在韩国首尔召开的国际工程联盟大会上,《华盛顿协议》全会一致通过接纳中国为该协议签约成员,中国成为该协议组织第21个成员。标志着中国的工程教育与国际接轨。通信工程专业积极采用国际化的标准,吸收先进的理念和质量保障文化,对通信工程教育改革发展、专业建设,进一步提高通信工程教育的国际化水平,持续提升通信工程教育人才培养质量具有重要意义。

为此,中南大学信息科学与工程学院启动了通信工程专业的教学改革和课程建设,以及2016版通信工程专业培养方案,并与中国铁道出版社联合组织了一系列通信工程专业的教材研讨活动。他们以严谨负责的态度,认真组织教学一线的教师、专家、学者和编辑,共同研讨通信工程专业的教育方法和课程体系,并在总结长期的通信工程专业教学工作的基础上,启动了“高等院校通信工程专业‘十二五’系列教材”的编写工作,成立了高等院校通信工程专业“十二五”规划教材编委会,由中南大学信息科学与工程学院主管教学的副院长施荣华教授、中南大学信息科学与工程学院电子与通信工程系李宏教授担任主任,邀请国家教学名师、国防科技大学邹逢兴教授担任主审。力图编写一套通信工程专业的知识结构简明完整的、符合工程认证教育的教材,相信可以对全国的高等院校通信工程专业的建设起到很好的促进作用。

本系列教材拟分为三期,覆盖通信工程专业的专业基础课程和专业核心课程。教材内容覆盖和知识点的取舍本着全面系统、科学合理、注重基础、注重实用、知

识宽泛、关注发展的原则，比较完整地构建通信工程专业的课程教材体系。第一期包括以下教材：

《信号与系统》《信息论与编码》《网络测量》《现代通信网络》《通信工程导论》《北斗卫星通信》《射频通信系统》《数字图像处理》《嵌入式通信系统》《通信原理》《通信工程应用数学》《电磁场与电磁波》《电磁场与微波技术》《现代通信网络管理》《微机原理与接口技术》《微机原理与接口实验指导》《信号与系统分析》《计算机通信网络安全技术及应用》。

本套教材如有不足之处，请各位专家、老师和广大读者不吝指正。希望通过本套教材的不断完善和出版，为我国计算机教育事业的发展和人才培养做出更大贡献。

高等学校通信工程专业“十二五”规划教材编委会

2015年7月

电磁场与电磁波是一门重要的专业基础学科，与现代信息社会密切相关。1873年，麦克斯韦以严格的数学方程描述了电磁场应遵循的统一规律，建立了麦克斯韦方程组。1887年，赫兹的实验证实了电磁波的存在，揭开了人类利用电磁场和电磁波的新篇章。由此人们逐步开展了无线电通信、广播、雷达、遥控遥测，以及星际通信、光纤通信等应用研究。

电磁场与电磁波这门课程理论性较强，概念较为抽象，对逻辑思维能力有较高要求。为适应新形势下的人才培养要求，本书在编写过程中注重物理概念的引出与物理规律的连贯性推导，便于学生对电磁场与电磁波的物理本质的掌握和理解。

全书分为6章，第1章介绍电磁场的基本规律，包括静电场、恒定电场和恒定磁场的基本规律和方程描述，并介绍电磁感应定律，推导了麦克斯韦方程组。第2章介绍静态电磁场的基础知识，包括电位、电容、磁矢位、磁标位、电感、电场能量、磁场能量等物理概念。第3章介绍静态场边值问题及其解，推导了唯一性定理，介绍镜像法、分离变量法和有限差分法求解边值问题的处理过程。第4章介绍正弦平面电磁波的基本概念和物理特性，给出了电磁场波动方程的描述方法和空间分布与传播规律，分析了导电介质中均匀平面波的传播特点，给出了极化、相速和群速的概念。第5章介绍均匀平面波的反射和透射，给出了均匀平面波垂直入射和斜入射到分界平面时的空间电磁波的分布和传播规律，并介绍了雷达天线罩、光纤通信等典型应用。第6章介绍电磁辐射，给出了电偶极子的辐射特性，推导了方向图乘积定理，给出了面天线辐射特性的分析方法。

本书由雷文太、赵亚湘、董健任主编。具体分工如下：雷文太编写了第2、3、5章，赵亚湘编写了第1、4章，董健编写了第6章，全书由雷文太统稿。本书在编写过程中，得到了中南大学信息科学与工程学院领导和老师们的大力支持，在此致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中疏漏与不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2017年8月

目 录

CONTENTS

第 1 章 电磁场的基本规律	1
1.1 静电场的基本定律与方程	1
1.1.1 电荷与电荷密度	1
1.1.2 库仑定律与电场强度	2
1.1.3 真空中静电场的基本方程	5
1.1.4 介质的极化	7
1.1.5 介质中静电场的基本方程	8
1.2 恒定电场的基本分析	10
1.2.1 电流与电流密度	10
1.2.2 电流连续性方程	11
1.2.3 恒定电场的基本方程	11
1.3 恒定磁场的基本定律与方程	12
1.3.1 安培定律和磁感应强度	12
1.3.2 真空中恒定磁场的基本方程	15
1.3.3 物质的磁化	18
1.3.4 介质中恒定磁场的基本方程	19
1.4 电磁感应定律和位移电流	21
1.4.1 法拉第电磁感应定律	22
1.4.2 位移电流	23
1.5 麦克斯韦方程组与边界条件	25
1.5.1 麦克斯韦方程组	25
1.5.2 电磁场的边界条件	26
习题	29
第 2 章 静态电磁场	32
2.1 静电场的电位	32
2.1.1 静电场电位简介	32
2.1.2 空间电荷的电位	33
2.1.3 静电位的微分方程	33
2.2 导体系统的电容	34
2.2.1 两导体间的电容	34
2.2.2 部分电容	35
2.3 静电场的能量	37
2.3.1 静电场能量的计算方法	37
2.3.2 静电力	40
2.4 稳恒电场和稳恒电流场	41

2.4.1	稳恒电场的基本方程和边界条件	41
2.4.2	稳恒电场的电位	42
2.4.3	解稳恒电流场的静电比拟法	43
2.5	磁矢位	44
2.5.1	磁矢位简介	44
2.5.2	磁矢位的微分方程及其解	44
2.5.3	磁矢位的边界条件	45
2.5.4	利用磁矢位计算磁场	46
2.6	磁标位	48
2.7	电感	48
2.7.1	自感系数和互感系数	48
2.7.2	互感系数和自感系数的计算	49
2.8	磁场的能量和力	51
2.8.1	电流回路系统的能量	51
2.8.2	磁场的能量	53
2.8.3	磁场力	54
	习题	55
第3章	静态场边值问题及其解	58
3.1	唯一性定理	58
3.2	镜像法	59
3.2.1	点电荷对无限大导体平面的镜像	60
3.2.2	点电荷对介质平面的镜像	62
3.2.3	电流对铁板平面的镜像	63
3.2.4	点电荷对导体球的镜像	64
3.2.5	导体圆柱面的镜像	66
3.3	分离变量法	68
3.3.1	直角坐标系中的分离变量	69
3.3.2	圆柱坐标系中的分离变量	70
3.3.3	球坐标系中的分离变量	71
3.4	有限差分法	72
	习题	77
第4章	正弦平面电磁波	79
4.1	电磁场的波动方程	79
4.2	电磁能量和能量守恒定律	80
4.3	时谐电磁场的复数表示	82
4.3.1	时谐场的复数表示	82
4.3.2	复数形式的麦克斯韦方程	84
4.3.3	复数形式的波动方程	84
4.3.4	平均坡印亭矢量	85
4.4	无界理想介质中的均匀平面波	86

4.4.1 亥姆霍兹方程的平面波解	86
4.4.2 理想介质中均匀平面波的传播	87
4.5 导电媒质中的均匀平面波	91
4.5.1 导电媒质中的波动方程	92
4.5.2 导电媒质中均匀平面波的传播特性	92
4.5.3 媒质导电性能对电磁波的影响	94
4.6 电磁波的极化特性	96
4.7 波的相速和群速	99
习题	100
第5章 均匀平面波的反射与透射	103
5.1 均匀平面波对分界平面的垂直入射	103
5.1.1 导电媒质分界面的垂直入射	103
5.1.2 理想导体分界面的垂直入射	105
5.1.3 理想介质分界面的垂直入射	109
5.2 均匀平面波对多层平面分层介质的垂直入射	112
5.3 均匀平面波对分界平面的斜入射	115
5.3.1 垂直极化	115
5.3.2 平行极化	121
习题	124
第6章 电磁辐射	125
6.1 电偶极子的辐射	125
6.1.1 电偶极子的近区场	126
6.1.2 电偶极子的远区场	127
6.2 对偶性原理与磁偶极子天线的辐射	129
6.2.1 对偶性原理	129
6.2.2 磁偶极子天线的辐射	131
6.3 天线的辐射特性和基本参数	132
6.4 常用的线天线	136
6.4.1 对称天线	136
6.4.2 引向天线	138
6.4.3 螺旋天线	138
6.5 天线阵与方向图相乘原理	140
6.6 面天线基础	141
6.6.1 惠更斯原理	141
6.6.2 平面口径的辐射	143
习题	145
附录A 电磁场与电磁波常用公式及单位换算	148
参考文献	152

第1章 电磁场的基本规律

电场和磁场是统一的电磁场理论的两个方面。静止电荷产生静电场,恒定电流生成恒定磁场。静态条件下,它们是相互独立存在的。在时变条件下,法拉第通过大量实验发现了电磁感应定律,揭示了变化的磁场要产生电场;麦克斯韦通过位移电流假说,揭示了变化的电场要产生磁场,进而在总结前人研究成果的基础上,归纳总结出电磁场的基本规律,建立了麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组是经典电磁理论的理论基础。

本章首先介绍静态电磁场的源量和基本实验定律,由此引出电磁场的场量及场量满足的旋度和散度方程,即基本方程,讨论了介质的极化和磁化现象;然后介绍法拉第电磁感应定律,依据有旋电场和位移电流的假说,推导建立麦克斯韦方程组,并分析电磁场的边界条件。

1.1 静电场的基本定律与方程

静电场是指由静止的、电荷量不随时间变化的电荷所产生的电场,静电场的源是静止的电荷。

1.1.1 电荷与电荷密度

自然界中最小的带电粒子是质子和电子,它们分别带正电和负电,电荷量为 $e = 1.602\ 177\ 33 \times 10^{-19}\text{ C}$ 。

微观上看,电荷是以离散的形式分布在空间中的。但由于带电粒子的尺寸远小于带电体的尺寸,且大量的带电粒子密集地分布在一定的空间内。因此,在研究宏观电磁规律时,可以将电荷分布看成是以一定形式连续分布的,可用电荷密度来描述。

1. 体电荷密度

当电荷分布于某一体积 V' 内时,定义该体积内任一源点的体电荷密度 $\rho(\mathbf{r}')$ 为

$$\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V'} = \frac{dq}{dV'} \quad (1.1.1)$$

式中, $\mathbf{r}'$ 为源点位置矢量; Δq 为体积元 $\Delta V'$ 内的电荷量; $\rho(\mathbf{r}')$ 的单位为库/米³(C/m³)。因此,体积 V' 内的总电荷量为 $q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') dV'$ 。

2. 面电荷密度

若电荷分布在一厚度可忽略不计的曲面 S' 上,则可定义面电荷密度 $\rho_s(\mathbf{r}')$ 为

$$\rho_s(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S'} = \frac{dq}{dS'} \quad (1.1.2)$$

式中, Δq 为面积元 $\Delta S'$ 上的电荷量; $\rho_s(\mathbf{r}')$ 的单位为库/米²(C/m²)。因此, 面积 S' 上的总电荷量为 $q = \int_S \rho_s(\mathbf{r}') dS'$ 。

3. 线电荷密度

若电荷分布在横截面积可以忽略不计的细线 l' 上, 则可定义线电荷密度 $\rho_l(\mathbf{r}')$ 为

$$\rho_l(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta l' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l'} = \frac{dq}{dl'} \quad (1.1.3)$$

式中, Δq 为线元 $\Delta l'$ 上的电荷量, $\rho_l(\mathbf{r}')$ 的单位为库/米(C/m)。因此, 细线 l' 上的总电荷量为 $q = \int_l \rho_l(\mathbf{r}') dl'$ 。

4. 点电荷

当电荷 q 可近似看作集中分布于一个点上时, 这时的电荷称为点电荷。点电荷所在处的体电荷密度 $\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta V'} \rightarrow \infty$ 。为了定量描述点体电荷密度的这种特性, 引入 $\delta(\mathbf{r})$ 函数, 其定义为:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \infty & \text{当 } \mathbf{r} = \mathbf{r}' \\ 0 & \text{当 } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \end{cases}$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 1 & \text{当 } \mathbf{r}' \text{ 在体积 } V \text{ 内} \\ 0 & \text{当 } \mathbf{r}' \text{ 在体积 } V \text{ 外} \end{cases}$$

$\delta(\mathbf{r})$ 函数具有抽样特性, 即

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = f(\mathbf{r}') \quad (1.1.4)$$

因此, 可用 $\delta(\mathbf{r})$ 函数表示点电荷 q 的体电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}') = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.5)$$

而在包含 $\mathbf{r}'$ 的任意体积 V 内的总电荷为

$$\int_V \rho(\mathbf{r}') dV = \int_V q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = q$$

对于 $\delta(\mathbf{r})$ 函数, 还可得到一个有用的数学结论, 即

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.6)$$

式中, $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}'$ 分别表示真空中两个点的位置矢量。

1.1.2 库仑定律与电场强度

静电场的基本实验定律是库仑定律, 由库仑定律可引出电场强度矢量的定义式, 它是描述电场的基本物理量。

1. 库仑定律

库仑定律描述了真空中两个静止点电荷间的相互作用力, 可用矢量形式表示为

$$\mathbf{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{qq' e_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\mathbf{F}_{q \rightarrow q'} \quad (1.1.7)$$

式中, q 、 q' 是真空中两个点电荷, 它们之间的距离矢量为 $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}'$ 分别表示点电荷 q 、 q' 所在的位置矢量, 如图 1.1 所示; $\mathbf{e}_R$ 是从 q' 指向 q 的单位矢量; $\mathbf{F}_{q' \rightarrow q}$ 表示点电荷 q' 对 q 的作用力, 单位为牛[顿](N); ϵ_0 是真空中介电常数, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m} = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。

通常 q' 称为源电荷,其所在点 r' 称为“源点”, q 为受力电荷,所在点 r 称为场点或观察点。为了区分方便,今后我们用带撇号的坐标 $r'(x',y',z')$ 表示源点,不带撇号的坐标 $r(x,y,z)$ 表示场点。将 R 用两个点电荷的位置矢量 r',r 代替,式(1.1.7)可写为

$$F_{q' \rightarrow q} = \frac{qq'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1.8)$$

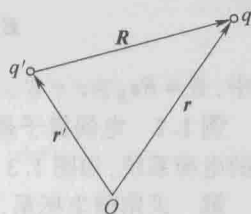


图 1.1 点电荷的位置矢量

2. 电场强度 E

实验表明,任何电荷都会在其周围空间产生电场,电场对处于场中的电荷具有电场力的作用,电场用电场强度矢量 E 来描述,定义如下:

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_{q' \rightarrow q}}{q} \quad (1.1.9)$$

式中, q 为试验电荷,取极限 $q \rightarrow 0$ 是为避免引入试验电荷对原电场分布的影响。由式(1.1.9)可得点电荷 q' 在空间一点 r 处产生的电场强度为

$$E = \frac{q'e_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{R} = \frac{q'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1.10)$$

由于有关系式

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{e}_R \frac{1}{R^2}$$

故式(1.1.10)也可写为

$$E = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \quad (1.1.11)$$

E 的单位为伏/米(V/m),它的物理意义是单位正电荷在点 r 处所受的电场力。式(1.1.11)表明,点电荷在其周围空间产生的电场大小与点电荷量成正比,与距离的平方成反比。

当空间存在 N 个点电荷 $q'_i (i=1,2,\dots,N)$,且分别位于位置 $r'_i (i=1,2,\dots,N)$ 时,根据叠加原理,场中 r 处的电场强度应为各点电荷独自在该点产生的场强的矢量之和,即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{R_i^3} \mathbf{r}_i \quad (1.1.12)$$

对于分布电荷,如果已知电荷密度函数分别为 $\rho(r'),\rho_s(r')$ 和 $\rho_l(r')$,则可在电荷分布区域内任取一足够小的带电单元。将该带电单元看成一点电荷 dq' ,对于体电荷、面电荷和线电荷分布, dq' 应分别等于 $\rho(r')dV',\rho_s(r')dS'$ 和 $\rho_l(r')dl'$ 。图 1.2 所示为体电荷分布情形,则带电单元产生的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{R} \quad (1.1.13)$$

将所有带电单元产生的 $d\mathbf{E}$ 矢量相加,得到体电荷、面电荷和线电荷在场点 r 处产生的电场强度分别为

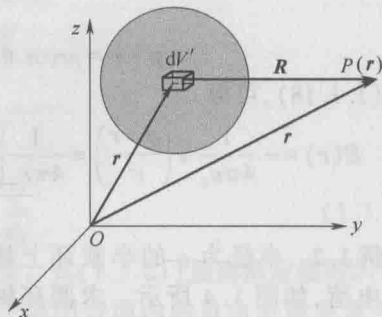


图 1.2 体电荷分布中的带电单元

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{R^3} \mathbf{R} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(r') \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dV' \quad (1.1.14)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s(r')}{R^3} \mathbf{R} dS' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \rho_s(r') \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dS' \quad (1.1.15)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R^3} \mathbf{R} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (1.1.16)$$

式中, $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 。

例 1.1 电偶极子是由两个相距很近的等值异号的点电荷所组成的电荷系统,如图 1.3 所示。试求电偶极子在真空中产生的电场。

解 采用球坐标系,设两点电荷间的距离为 l , l 的方向由 $-q$ 指向 $+q$, 且与 z 轴方向一致, $-q$ 位于坐标原点处, 场点位置为 $P(r, \theta, \varphi)$ 。

由式(1.1.11), 可得出电偶极子产生的场强为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{r_1} \right) - \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad (1.1.17)$$

由图 1.3 可见, 式中 $r_1 = (r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$, 即

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{l}{r} \right)^2 - 2 \frac{l}{r} \cos\theta \right]^{-\frac{1}{2}}$$

在 $l \ll r$ 的情况下, 可忽略所有 $\frac{l}{r}$ 的二阶和高阶项, 并利用幂级数展开式

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots$$

可得

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{r} \cos\theta \right)$$

代入式(1.1.17), 可得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{l\cos\theta}{r^2} \right) = \mathbf{e}_r \frac{ql\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} + \mathbf{e}_\theta \frac{ql\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.1.18)$$

通常定义 $\mathbf{p} = ql$ 为电偶极子的电偶极矩, l 的方向规定为从 $-q$ 指向 $+q$ 。

由于

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr\cos\theta$$

由式(1.1.18), 可得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (1.1.19)$$

例 1.2 半径为 a 的半圆环上均匀分布着线密度为 ρ_l 的线电荷, 如图 1.4 所示。求圆环轴线上任一点的电场强度 $\mathbf{E}$ 。

解 采用圆柱坐标系, 场点坐标为 $P(0, 0, z)$, 位置矢量为 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_z z$ 。在圆环上任取一线元 dV' , 其上电量为 $dq' = \rho_l dV' = \rho_l a d\varphi'$, 位置矢量为 $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_\rho a$, 线元到点 P 的距离矢量为

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{e}_z z - \mathbf{e}_\rho a$$

电荷元 dq' 产生的电场为

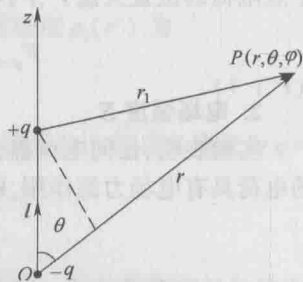


图 1.3 电偶极子产生的电场

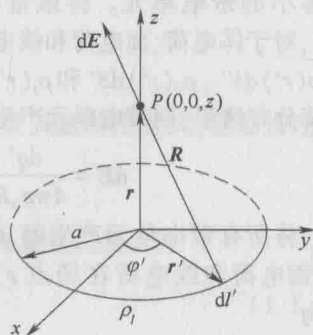


图 1.4 均匀带电半圆环

$$dE = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{R^3} = \frac{\rho_l a d\varphi'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e_z z - e_r a}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

因为随着 φ' 的变化, e_r 的方向变化, 故需将 e_r 分解为 $e_r = (e_x \cos \varphi' + e_y \sin \varphi')$, 有

$$E = \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [e_z z - a(e_x \cos \varphi' + e_y \sin \varphi')] d\varphi'$$

由于 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e_x a \cos \varphi' d\varphi' = e_x 2a$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e_y a \sin \varphi' d\varphi' = 0$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e_z z d\varphi' = e_z \pi z$, 故

$$E = \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(e_z \pi z - e_x 2a)}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

当为整圆环时, 积分区间由 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$ 变为 $\int_{-\pi}^{\pi}$, 此时 $E_x = 0$, 轴线上任一点的电场只有轴向分量。

这是因为此时的源电荷分布具有轴对称性, 除了轴向方向, 其他方向上的场分量合成为 0。

1.1.3 真空中静电场的基本方程

矢量分析中, 亥姆霍兹定理表明, 任一矢量场如果它的散度、旋度和边界条件确定, 则该矢量场可唯一确定。因此, 静电场分析时, 需要先确定场的散度和旋度。

1. 静电场的散度和高斯定理

由式(1.1.14)的电场表达式, 对其两边同时求散度, 可得

$$\nabla \cdot E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV'$$

由于 $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, 并利用式(1.1.4)中 $\delta(\mathbf{r})$ 函数的筛选性, 有

$$\nabla \cdot E(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (1.1.20)$$

这是高斯定理的微分形式, 它表明: 电场强度 E 在空间任意一点的散度等于该点的电荷密度与 ϵ_0 之比, 说明静电场是一个有源场, 静止电荷是其场源。

对式(1.1.20)两边同时求体积分, 可得

$$\int_V \nabla \cdot E(\mathbf{r}) dV = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV$$

应用散度定理 $\int_V \nabla \cdot E(\mathbf{r}) dV = \oint_S E(\mathbf{r}) \cdot dS$, 有

$$\oint_S E(\mathbf{r}) \cdot dS = \frac{\int_V \rho(\mathbf{r}) dV}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1.21)$$

式中, V 为闭合曲面 S 所围体积, Q 为闭合面 S 所围的总电荷量。式(1.1.21)是高斯定理的积分形式, 它表明真空中穿过任意闭合曲面 S 的电场强度通量等于该闭合面内的自由电荷总量与 ϵ_0 之比。

利用高斯定理的积分形式, 在电荷分布具有某种对称性时, 可简化电场 $E(\mathbf{r})$ 的计算。此时的关键是能找到一个闭合的高斯曲面 S , 在整个 S 面或分段 S 面上, $E(\mathbf{r})$ 的幅值为常数或为 0, 方向平行或垂直于高斯面。

例 1.3 在半径为 a 的球形区域内, 分布着体密度为 $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}$ 的电荷, 试计算球内外的电

场强度 $E(r)$ 。

解 由电荷分布可知电场具有球面对称性,采用球坐标系,选取场点 $P(r, \theta, \varphi)$, 以场点位置 r 为半径作出球形高斯面,球面上电场大小为常数,方向垂直于球面。应用高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(1) 当场点位于球外,即 $r \geq a$ 时

$$Q = \int_V \rho(r) dV' = \int_0^a \rho_0 \frac{r'^2}{a^2} 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{5}$$

可得

$$\mathbf{E} = e_r \frac{\rho_0 a^3}{5\epsilon_0 r^2}$$

(2) 当场点位于球内,即 $r < a$ 时

$$Q = \int_0^r \rho(r) 4\pi r'^2 dr' = \int_0^r \left(\rho_0 \frac{r'^2}{a^2} \right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{5a^2} r^5$$

可得

$$\mathbf{E}(r) = e_r \frac{\rho_0 r^3}{5\epsilon_0 a^2}$$

例 1.4 求无限长均匀直线电荷 ρ_l 在真空中产生的电场 $\mathbf{E}$ 。

解 由电荷分布可知电场分布具有轴对称性,采用柱坐标系,以电荷线为轴线作一半径为 r , 高度为 l 的圆柱形高斯面,如图 1.5 所示。在圆柱侧面电场大小相等,方向垂直于侧面,即 $\mathbf{E} = e_r E(r)$, 上下底面 $\mathbf{E}$ 与面方向垂直,通量为零,故

$$\oint_S \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot 2\pi r = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$$

可得

$$\mathbf{E}(r) = e_r \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0}$$

2. 静电场的旋度和环流定律

式(1.1.14)的电场表达式中,算符 ∇ 是对场点坐标 $\mathbf{r}$ 的运算,而积分是对源点坐标 $\mathbf{r}'$ 进行的,因此,可将其改写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dV' \right]$$

上式中,等号右边括号内是一个标量函数。这表明, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 可表示为一个标量函数的梯度,而任意标量函数的梯度的旋度恒等于零,即 $\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$, 故有

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1.1.22)$$

说明静电场是无旋场,是保守场。

对式(1.1.22)进行曲面积分,应用斯托克斯定理 $\int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$, 有

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.1.23)$$

式(1.1.23)为静电场的环流定律,它说明在静电场中,电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 沿任意闭合回路的线积分为零。其物理意义为:在静电场中,将点电荷 q 沿任意闭合路径移动一周,电场力所做的功为零,

即 $\oint_C q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。

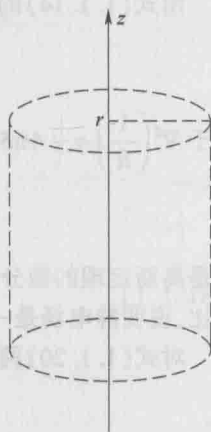


图 1.5 无限长直线电荷的高斯面

1.1.4 介质的极化

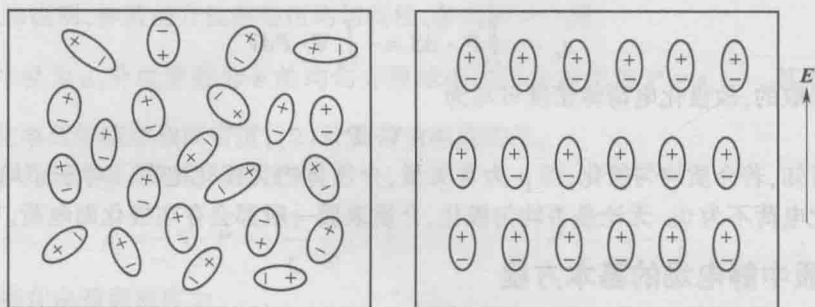
前面讨论的是真空中的静电场。当电场中放入介质时,介质在电场的作用下会发生极化现象,产生附加的电场,叠加在原有电场之上,使原有电场发生变化。

1. 介质的极化

介质是一种完全不同于导体的物质,它内部几乎没有自由电子,其所有的带电粒子均被紧紧地束缚于构成物质的原子或分子中,故把介质中的电荷称为束缚电荷。

按照介质分子结构的不同,可将介质分子分为两类:一类为无极分子,其分子正、负电荷中心重合,分子的固有电偶极矩为0,介质呈电中性;另一类称为有极分子,其分子正、负电荷中心不再重合,每个分子相当于一个电偶极子,形成分子固有电偶极矩。当没有外加电场作用时,这些分子电偶极矩的排列是随机的,介质内的合成电偶极矩为0,因此有极分子构成的介质也是电中性的。

当有外加电场的作用时,无极分子的正(或负)电荷要顺(或逆)着电场方向发生移动,正、负电荷的电中心不再重合,从而形成沿外加电场方向的电偶极子。而有极分子的固有电偶极矩会发生转动,也趋向于沿着外加电场方向排列。这两种情况下,都会沿着外加电场方向产生一合成电偶极矩,这种介质对外加电场的响应称为极化,如图1.6所示。显然,合成偶极矩又会在空间产生电场,这些电场叠加在原来的电场上,改变原有电场的分布。



(a) 无外加电场时有极分子分布

(b) 有外加电场时有极分子分布

图 1.6 介质极化示意图

为了定量描述介质被极化的程度,引入极化强度 $\mathbf{P}$ 的概念,定义为

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} = N \mathbf{p}_{av} \quad (1.1.24)$$

式中, $\sum_i \mathbf{p}_i$ 是介质中体积元 ΔV 内的合成电偶极矩量; N 是单位体积内的分子数; $\mathbf{p}_{av}$ 表示分子的平均电偶极矩。因此, $\mathbf{P}$ 表示单位体积介质内的电偶极矩,单位是库/米²(C/m²)。

若介质中各点的 $\mathbf{P}$ 相同,则称介质被均匀极化。实验表明,在线性、各向同性介质中, $\mathbf{P}$ 与介质中的合成电场 $\mathbf{E}$ 满足如下关系:

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.1.25)$$

式中, χ_e 为常数,称为介质的电极化率。

2. 极化电荷

介质极化使得介质内的电偶极矩沿着外加电场方向规则排列,在介质表面和内部都可能出现宏观电荷分布,这些电荷称为极化电荷。因为它们不能像导体内的电荷那样自由移动,故又称为束缚电荷。