数字艺术之美

奇妙的循环结构

廖敢云 / 著

Shuzi Yishu Zhimei

Qimiao de xunhuan Jiegou

贵州大學出版社
Guizhou University Press

数字艺术之美

奇妙的循环结构

廖敢云 / 著

0123456789

Shuzi Yishu Zhimei

Qimiao de xunhuan Jiegou

贵州大学出版社
Guizhou University Press

图书在版编目（CIP）数据

数字艺术之美：奇妙的循环结构 / 廖敢云著. —贵阳：贵州大学出版社, 2017

ISBN 978-7-5691-0004-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①廖… Ⅲ. ①数学—普通读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 095085 号

数字艺术之美：奇妙的循环结构

作　　者：廖敢云

出 版 人：闵　军

责任编辑：但明天

装帧设计：陈　艺　但明天

出版发行：贵州大学出版社

印　　刷：贵阳海印印刷有限公司

成品尺寸：170 毫米×240 毫米

印　　张：17.75

字　　数：328 千字

版　　次：2017 年 8 月　第 1 版

印　　次：2017 年 8 月　第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5691-0004-4

定　　价：36.00 元

电话：0851-85981027

内 容 简 介

本书共分 6 章，先从分数与小数的基础知识开始，创新性地介绍了数的动态形式和相关余数，重点分析了最常见的半九律的形成原因。接着从同余的观点分析了一般除法运算中相关余数间存在的关系，为以后章节的分析打下了基础。针对产生循环节的相关余数着手，从根本上分析了产生循环节的原因是因为相关余数的循环出现，重点分析了相关余数的因子行列所具有的特点。最后以前面的章节为基础，全面透彻地分析了循环结构奇妙的本质，包括各种半 x 律、半 Y 律、段 x 律以及段 Y 律。循环节间的运算则是新的强有力的突破，介绍了非常有趣的循环节间的各种简单运算。书中配有祥细分析过程的例题，其思路新颖，趣味性极强。

纵观全局，本书以产生循环节的“相关余数”和“1 为所有整数的公因子”为抓手，建立了“因子行列”的一套逻辑，提出了许多新的概念来诠释全新的数学美，特别是对“缩位数”的定义，使许多问题迎刃而解。

整体而言，本书大部分章节可作为中学课外读物，了解自然科学知识；本书可供大学数学选读教材，增强数学思维方法。此外，本书也是数学爱好者的最佳读物，是解析有关循环小数的奥数必考题目的必备读物。

前 言

循环节，一种极为常见的数学运算现象，它是随着除法性质的研究而出现的自然规律，其简单特点从小学就有所了解。对循环小数的研究要从循环节着手，而目前对循环节的研究大多还停留在以素数为除数产生的循环节具有半九律的特点上，例如，1 除以 7 产生的循环节为 142857，其前半部分为 142，加上后半部分 857，结果为 999，这种现象称为半九律，但是现有的证明方法够不够严谨呢？看完本书您就会明白。本书除了分析一些以素数为除数产生的循环节具有半九律以外，还分析一些以合数为除数产生的循环节也具有半九律。例如，1 除以 77 产生的循环节为 012987，其前半部分为 012，加上后半部分 987，结果为 999，这也是半九律的现象。对于存在半三律、半六律、段九律等特点的情况更没有人讨论过，例如 2 除以 39 产生的循环节为 051282，前半部分为 051，加上后半部分 282，结果为 333，这种现象称为半三律；4 除以 21 产生的循环节为 190476，前半部分为 190，加上后半部分 476，结果为 666，这种现象称为半六律。如果把 190476 均分成三部分为 19、04、76，其相加的结果为 99，这种现象称为段九律，等等。这些新概念都是全新的定义和证明方法。

本书着重介绍了产生循环节的计算过程出现的相关余数及其导至多种美丽结构的根本原因，从一般容易理解的基础知识、基本方法和最新的技巧着手分析，选材精练，重点难点突出，趣味性极强，并且许多例题会给出一些新颖的解法，呈现了自然界中数理的许多美丽性质。整体而言，本书特别适合中学水平以上的人士阅读，全书适合大学数学专业的人选读，也适合数学

爱好者阅读，一定能从中发现数学里的世外桃源般的意境。

本书是作者在国家级期刊《城市建设理论研究》已发表过的《算术里的艺术》《群数成花》的基础上编写而成。在编写中，尽量做到了由浅入深，通俗易懂，展现了解决问题的严密思维逻辑，让读者在了解循环节奇妙结构的内在原因的同时，还有许多特别的收获，能得到一种数学艺术美的享受。

本书的主要内容有：分数与小数的互化、循环节的种类、数的动态形式、半九律、相关余数的特点、相关余数的同余、因子行列、循环数码间的关系、可循环节、缩位数、半 x 律、半 Y 律、段 x 律、段 Y 律以及循环节之间的运算等。

本书在编写过程中，没有参阅国内外其他作者的相关文献资料，如有雷同，敬请赐教，作者愿以最大的诚意接受。

有关本书的技术问题，请扫描右方的二维码，以便与作者及时互动、沟通。

由于作者水平有限，书中错误和疏漏之处在所难免，敬请专家和读者批评、指正。

编　者

目 录

第1章

分数与小数

分数起源于“分”，比如一块土地被分成三份，其中一份便是三分之一。三分之一是一种说法，用专门符号写下来便成了分数，分数的概念正是人们在处理日常问题的长期经验中形成的。历史上，分数几乎与自然数一样古老。

早在人类文化发明的初期，由于进行测量和均分的需要，引入并使用了分数。原始社会，人们集体劳动要平均分配果实和猎物，时常出现结果不是整数的情况，于是渐渐产生了分数，起初是使用具体的分数，如二分之一用“一半”来表示，四分之一用“一半的一半”来表示。经过相当长的一段时期之后，才出现了诸如二分之一、三分之二等分数。我国很早就有了分数，最初用算筹表示。后来印度人发明了数字，用和我国相似的方法来表示分数，再往后，阿拉伯人发明了分数线“—”。到了 18 世纪末，又有人用斜线来表示分数，如 3/5。

我国是最早采用十进制计数的国家，这种计数法使得我国古代在数字方面长期处于领先地位。小数也是我国最早发明和运用的，它历经了一个较长的发展历程。

世界上，古印度的数学家也在开方得不到整数时使用过十进制小数，12 世纪以后，欧洲数学家开始采用十进制小数，但没有形成系统的方法，也不

够普遍。1593 年德国数学家克拉维斯（C. Clavius）的著作中首先出现了小数点，并在欧洲逐渐被采用。直到 19 世纪末我国才普遍采用了小数点。

1.1 化分数为小数

定义 1-1 根据十进制的位置原则，把十进制分数仿照整数的写法，在整数值与非整数值之间加以符号(小数点即“.”)的区分，写成不带分母的形式，这样的过程称为化分数为小数。

所有的分数都可以被整理成整数部分加上一个既约真分数的形式，相应地，所有的小数也可以被整理成一个整数加上一个纯小数的形式。例如，设 a、b、c、A 均为整数，且 $b\neq0$，分数 $\frac{a}{b}$ 可整理成 $A+\frac{c}{b}$ 的形式。如果 $a\geqslant b$，则 $\frac{a}{b}=A+\frac{c}{b}$，其中，$A$ 为整数，且 $A\geqslant1$，$c<b$。化小数后可表示为 $Z.UV$ 的一般形式，其中 $A=Z$；如果 $a<b$，则在 $\frac{a}{b}=A+\frac{c}{b}$ 中，$A=0$，$c=a$；化小数后可表示为 $0.UV$ 的形式。

在小数的一般形式 $Z.UV$ 中，Z 为小数点前面的整数部分，$Z.U$ 为小数的不循环部分，V 为小数点后面的循环部分。在 $Z.UV$ 中，当 $Z\neq0$ 时，称 $Z.UV$ 为带小数；当 $Z=0$ 时，称 $Z.UV$ 为纯小数。在 $Z.UV$ 中，当 UV 存在时，称 $Z.UV$ 为混循环小数；当 U 不存在时，称 $Z.V$ 为纯循环小数；当 V 不存在时，称 $Z.U$ 为有限小数。

例 1-1 化分数 $\frac{13}{7}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{14}$、$\frac{7}{25}$ 为小数后，哪些是带小数，哪些是纯循环小数，哪些是有限小数？

[解] 由定义 1-1 可知

$\frac{13}{7}=1.\dot{8}5714\dot{2}$，其中 Z=1，U 不存在，V 为$\dot{8}5714\dot{2}$；

$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，其中 Z=0，U 不存在，V 为$\dot{1}4285\dot{7}$；

$\frac{1}{14}=0.0\dot{7}14285\dot{5}$，其中 Z=0，$Z.U$ 为 0.0，V 为$\dot{7}14285\dot{5}$；

$\frac{7}{25}=0.28$，其中 Z=0，$Z.U$ 为 0.28，V 不存在。

可见，分数$\frac{13}{7}$化小数后为带小数，分数$\frac{1}{7}$化小数后为纯循环小数，分数$\frac{7}{25}$化小数后为有限小数。

性质 1-1　设 a、b 均为整数，且 $b\neq 0$，在化分数$\frac{a}{b}$为小数中

①若 a 为 b 的整数倍，则$\frac{a}{b}=Z$，Z 为整数。

②若 b 不能整除 a，且 b 不是10^n的因子(n 为自然数)，则会产生纯循环小数，$\frac{a}{b}=Z.V$，Z 为整数部分，V 为无限纯循环部分；若 b 不能整除 a，且 b 只是10^n的因子(n 为自然数)，则会产生有限小数，$\frac{a}{b}=Z.U$，Z 为整数，U 为有限小数部分。

③若 b 不能整除 a，且 b 既含有10^n的因子(n 为自然数)，也含有非10^n的因子（1 除外），则$\frac{a}{b}=Z.UV$，Z 为整数，$Z.U$ 为小数的不循环部分，U 有 n 位，V 为小数的无限循环部分。

［证］　①若 a 为 b 的整数倍，显然其商只会是一个整数。

②若 b 不能整除 a，且 b 不是10^n的因子(n 为自然数)，那么在竖式计算

过程中每次相减后的余数总是在 1 到 $b-1$ 的范围内，而 1 到 $b-1$ 范围内整数的个数是有限的，在永远无法整除的计算过程中总是会有相同的余数出现，相同的余数必然会产生相同的商，于是便产生了无限循环的小数。

若 b 不能整除 a，且 b 只是10^n的因子(n 为自然数)，那么，因为10^n的因子是 1、10^n、2^n、5^n，则当 $b=1$ 或 $b=10^n$时，$\frac{a}{1}$ 和 $\frac{a}{10^n}$ 显然不会产生循环小数；当 $b=2^n$ 或 $b=5^n$时，$\frac{a}{2^n}=\frac{a\times5^n}{10^n}$ 和 $\frac{a}{5^n}=\frac{a\times2^n}{10^n}$ 显然也不会产生循环小数。

③若 b 不能整除 a，且 b 既含有10^n的因子(n 为自然数)，也含有非10^n的因子（1 除外），设 $b=b_1\times b_2$，且 $b_1=2^n$，b_2 不含有10^n的因子（1 除外），则 $\frac{a}{b}=\frac{a}{2^n\times b_2}=\frac{a\times5^n}{b_2\times10^n}=\frac{a\times5^n}{b_2}\times\frac{1}{10^n}$。由于 $\frac{a\times5^n}{b_2}$ 必然会产生一个循环小数，小数点前面的数字皆不参与循环，其小数点向左移动 n 位便是 $\frac{a\times5^n}{b_2}\times\frac{1}{10^n}$ 产生的循环小数，必然会造成小数点后面有 n 位数码不参与循环。同样，设 $b=b_1\times b_2$，且 $b_1=5^n$，b_2 不含有10^n的因子（1 除外），其余同理可证。

例 1-2 求 $\frac{1}{28}$ 产生的循环小数的不循环部分。

[解] 由性质 1-1 可知

$$\frac{1}{28}=\frac{1}{7\times2^2}=\frac{1\times5^2}{7}\times\frac{1}{10^2}=\frac{25}{7}\times\frac{1}{10^2}=3.\dot{5}7142\dot{8}\times\frac{1}{10^2}$$

其中，$3.\dot{5}7142\dot{8}$ 的小数点向左移动 2 位则为 $0.03\dot{5}7142\dot{8}$，所以 $\frac{1}{28}$ 产生的循环小数中不循环部分为 0.03。

1.2　循环节的种类及长度规律

因为循环小数本身具有无限循环的性质，所以对循环小数的研究只能从循环节着手分析，因此，简单而言对循环小数的研究，就是对循环节的研究。而对循环节的研究，只能把循环节当作一个整数来考虑。从另一个角度来说，研究循环节，也是对整数性质的一种研究。

定义 1-2　一个数的小数部分从某一位起，若有一个或几个数码依次不断地重复出现，把这一个或几个依次不断出现的数码称为循环小数的循环节。通常在循环节的第一位数码和最后一位数码之上标上小圆点以便和不参与重复出现的数码区别开来。循环节里数码的个数称为循环节的位数，也叫循环节的长度或循环频率。

注意：循环节的位数定义或将循环节当作整数时，其循环节中前面的 0 不能去掉。

例 1-3　分别指出小数 52.1521521521…、2.15215215215、2.152115522111555222…及 $0.\dot{3}$ 的循环节及循环位数。

［解］　由定义 1-2 可知，小数 52.1521521521…的循环节为 152，循环节位数为 3；小数 2.15215215215 虽有依次重复的数码，但不是无限的，所以没有循环节；小数 2.152115522111555222…不是循环小数，所以没有循环节；小数 $0.\dot{3}$ 的循环节为 3，循环位数为 1。

关于循环节的种类有以下几种分类分法。

首先，根据循环节的位数，循环节可分为：

- 按循环节数码位数的奇偶性来分，循环节可分为奇数位循环节和偶数位循环节。
- 按循环节位数的因子来分，循环节可分为素数位循环节和合数位循环节。

其次，根据同一除数产生的循环节的位数和个数来分，循环节则可分为以下几类：

- 同一除数产生的偶数个奇数位循环节。例如，素数 3 为除数产生的循环节有 3、6，为两个 1 位的循环节；素数 41 为除数产生的循环节有 02439、04878、07317、97560、95121、92682、14634、85365，为 8 个 5 位的循环节。
- 同一除数产生的偶数个偶数位循环节。例如，素数 13 为除数产生的循环节有 076923、153846，为两个 6 位的循环节。
- 同一除数产生的奇数个偶数位循环节。例如，素数 11 为除数产生的循环节有 09、18、27、36、45，为 5 个 2 位的循环节。

第三，根据产生循环节的除数，把素数为除数产生的循环节称为素循环节，把合数为除数产生的循环节称为合成循环节或合循环节。

根据不同的原则，循环节的种类划分可如图 1-1 所示。

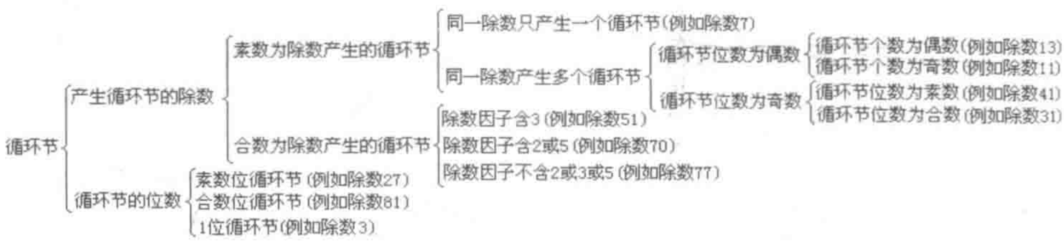

图 1-1　循环节的划分

例 1-4　分别写出图 1-1 中各种循环节中的一种。

[解]　以 7 为除数只能产生一个 6 位循环数码的循环节，它们分别为 142857 的六种形式；以 13 为除数能产生两个 6 位循环数码的循环节，它们的形式之一分别为 076923、153846；以 11 为除数能产生 5 个 2 位循环数码的循环节，它们的形式之一分别为 09、18、27、36、45；以 41 为除数能产生 8 个 5 位循环数码的循环节，它们的形式之一分别为 02439、04878、07317、09756、12195、14634、26829、36585；以 31 为除数能产生两个 15 位循环数码的循环节，它们的形式之一分别为 032258064516129、096774193548387；以 51 为除数产生的循环节包括以 3、17 或 51 为除数产生的循环节；以 70 为除数产

生的循环节，它与以 7 为除数产生的循环节相同，只是中间不循环的部分有所不同；以 77 为除数产生的循环节包括以 7、11 或 77 为除数产生的循环节；以 27 为除数产生的循环节之一为 037；以 81 为除数产生的循环节之一为 012345679。

性质 1-2　设 a、b 为整数，且 $b\neq0$，在化分数 $\frac{a}{b}$ 为小数时

①当 $a<b$ 时，所得商的数码才是循环节里的数码；

②当 $(a, b)=1$ 时，由相同除数产生的循环节长度相同。

［证］　①循环小数的产生是在化分数为小数的过程中，某次计算中出现的余数 r 值是其后边计算过程中出现的余数 r_t 值的 10^t 倍时，便会产生一个循环节，t 为循环节的位数。由分数化小数的过程便可知道，只有小于除数（即分母)的被除数（即分子）才会在后边计算的过程中出现相同形式的余数过程，所以真分数是产生循环节的条件之一。

②在分数 $\frac{a}{b}$ 化小数的过程中，当 $a<b$ 时，设分子为 1，分母为 b，t 为循环节的位数，所以化分数 $\frac{1}{b}$ 为小数所得的循环节为（10^t-1）除以 b 所得的整数前边补 0，达到 t 位数码的形式，则由于 $(a, b)=1$，所以有且仅有 $a\times$（10^t-1）除以 b 所得的整数（不足 t 位数码时，前边补足 0）是化分数 $\frac{a}{b}$ 为小数所得的循环节；当 $a>b$ 时，把其化为整数加真分数的形式，其循环节由真分数部分产生。由此可见，相同除数产生的循环节的长度相同。

性质 1-3　同一素数 b 为除数产生的循环节的位数与个数的乘积为 $b-1$。

［证］　若这个除数为素数 b，则由性质 1-1 可知，从 1 到 b 内小于 b 的整数有 b-1 个，而循环节的长度由除数 b 决定，设其长度为 t，循环节的个数为 g 个，则 $g\times t=b-1$。

另外，因为 b 为素数，且由于素数 2 不能产生循环节，除了 2 以外的素数都为奇数，所以 $b-1$ 为偶数。

性质 1-4* 一个合数除与之互质的整数能产生的循环节的位数与个数的乘积为偶数。

[证] 若这个整数大于除数，把其化为整数加真分数的形式，则其产生的循环节由真分数部分决定，而由性质 1-2 可知，与之互质的整数的个数一定为偶数，这些与之互质的整数都可以当作一个相关余数产生一个循环数码，显然，原题得证。

注意：由于合数为除数涉及的知识点较多，性质 5-2 在第 5 章，本性质打了“*”，这里只作了解。

1.3 化小数为分数

所有的小数都可以整理成一个整数加上一个纯小数的形式，相应地，所有的分数也可以整理成整数部分加上一个既约真分数的形式。在本章 1.1 节里介绍了分数化小数以及小数的几种形式，本节则是反过来把小数化为分数。本书中所有表示分母字符的值都不为 0。

所有的整数都可以用一个分母整除分子的形式 $\dfrac{A}{B}$ 来表示，而所有的有限纯小数也可以用一个分母为 10^n 的形式 $\dfrac{C}{10^n}$ 表示出来。对于无限循环的部分，也可以通过对循环节的特定部分的研究而以分式的形式表示出来，再把存在的部分相加，最后可以分数 $\dfrac{a}{b}$ 的形式表示。

在分数 $\dfrac{a}{b}$ 中，若 $a<b$，则分数 $\dfrac{a}{b}$ 叫真分数；若 $a>b$，则分数 $\dfrac{a}{b}$ 叫假分数；若假分数 $\dfrac{a}{b}=z+\dfrac{c}{b}$，$z$ 为整数，则分数 $\dfrac{a}{b}$ 可表示为整数与真分数相连的形式，