



普通高等教育“十三五”规划教材

复变函数与积分变换

(第二版)

宋叔尼 张国伟 孙 涛 编著

非
外
借



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

复变函数与积分变换

(第二版)

宋叔尼 张国伟 孙 涛 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要包括:复变函数与解析函数,复变函数的积分,复变函数的级数,留数及其应用,保角映射,积分变换的预备知识,Fourier 变换, Laplace 变换, Z 变换,小波变换基础,复变函数与积分变换的 MATLAB 求解等.作者用 MATLAB 求解验算了大量的例题,使读者能够熟悉 MATLAB 在复变函数与积分变换课程中的基本方法.另外,在 Cauchy 积分定理的证明,已知解析函数的实部(或虚部)求该解析函数, Taylor 级数与 Laurent 展开级数定理的证明,无穷远点留数的计算等方面有着自己鲜明的特色.本书加入相应的二维码,扫码可以观看教学视频.

本书适合高等院校工科各专业,尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业的大学生作为教学用书,也可供这些专业的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/宋叔尼,张国伟,孙涛编著.—2 版.—北京:科学出版社,2017.9

普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-054365-3

I. ①复… II. ①宋… ②张… ③孙… III. ①复变函数-高等学校-教材
②积分变换-高等学校-教材 IV. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 214443 号

责任编辑:张中兴 / 责任校对:赵桂芬
责任印制:白 洋 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市书文印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017 年 9 月第 二 版 印张:16 3/4

2017 年 9 月第十三次印刷 字数:338 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

自本书第一版于 2006 年出版以来,经过了十余年的教学实践,需要进行修订完善. 同时为适应数字化教学的发展,第二版加入相应的二维码,通过扫码可以观看教学视频和典型习题讲解.

第二版修改了全书一些叙述不是很恰当的文字内容,同时对积分变换内容进行多方面地改写与充实. 在积分变换的预备知识一章中简化函数的介绍,删去学生难于理解的弱极限的内容;增加积分变换简史,使学生了解课程内容的背景、现状;简单介绍具有很重要实际应用背景的 Mellin 变换和 Radon 变换. 在 Fourier 变换一章中加入了 Riemann-Lebesgue 引理,增加了常用的正弦和余弦 Fourier 变换以及多维 Fourier 变换的核心内容. 给出了 Laplace 变换初值与终值定理的证明. 充实小波变换的背景介绍. 增加一些例题,根据教材内容对习题进行合理地增删.

欢迎读者对书中的错误和不足之处提出宝贵意见.

作 者

2017 年 6 月

第一版前言

复变函数起源于分析、力学、数学物理等理论与实际问题,作为流体力学和电动力学中重要的一种向量场的特征,具有鲜明的物理背景.复变函数理论一直伴随着科学技术的发展,从中汲取养分,并为之提供方法和工具,促进了工程技术等学科的迅速发展.建立在复变函数理论之上的积分变换方法,通过特定形式的积分建立函数之间的对应关系.它既能简化计算,又具有明确的物理意义,在许多领域被广泛地应用,如电力工程、通信和控制领域、信号分析和图像处理、语音识别与合成、医学成像与诊断、地质勘探与地震预报等方面以及其他许多数学、物理和工程技术领域.而在此基础上发展起来的离散形式的变换在计算机时代更是特别重要.

为适应现代科学技术的发展及相关专业的要求,我们编写的《复变函数与积分变换》以解析函数的理论为基础,阐述了复变函数的积分、级数、留数以及保角映射.同时,对 Fourier 变换及离散 Fourier 变换、Laplace 变换、Z 变换及小波变换等作了较系统介绍,并用 MATLAB 求解验算了积分变换中的所有例题及积分、级数、留数中的部分例题,从而使读者能够熟悉和掌握 MATLAB 在复变函数与积分变换课程中的基本使用方法.本书深入浅出,突出基本概念和方法,在知识体系完整性的基础上,尽量做到数学推导简单易懂并在与工程问题密切结合等方面形成了自己的特色.书中精心编排了大量的例题和习题,以供读者进一步理解教材的内容,其中加 * 号者是特为学有余力的读者提供.

本书的出版获得了科学出版社的大力支持,获得了东北大学教材建设计划立项项目“复变函数与积分变换教材建设”以及东北大学学位与研究生教育科学研究计划的大力支持,在此向他们表示感谢.同时,孙艳蕊教授等在试用本书期间提出了宝贵的建议,在此我们表示衷心的感谢.

本书由宋叔尼负责书稿的策划和统稿工作并编写了第 4、5 章和第 8 章.孙涛编写了第 1~3 章.张国伟编写了第 6、7 章和第 9~11 章,并运行了所有的 MATLAB 程序.

欢迎读者对书中错误和不足之处提出宝贵意见.

作 者

2006 年 5 月

目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 复变函数与解析函数	1
1.1 复数	1
1.1.1 复数的概念	1
1.1.2 复数的四则运算	1
1.1.3 复平面与复数的表示法	2
1.1.4 乘幂与方根	4
1.1.5 复球面与无穷远点	6
1.2 平面点集	7
1.2.1 区域	7
1.2.2 Jordan 曲线、连通性	9
1.3 连续函数	11
1.4 解析函数	13
1.4.1 复变函数的导数	13
1.4.2 解析函数	15
1.5 函数可导的充要条件	16
1.6 初等解析函数	19
1.6.1 指数函数	19
1.6.2 对数函数	20
1.6.3 幂函数	23
1.6.4 三角函数和双曲函数	24
习题 1	26
第 2 章 复变函数的积分	29
2.1 复变函数的积分	29
2.1.1 积分的概念	29
2.1.2 积分存在的条件及积分的性质	30
2.2 Cauchy 积分定理	33
2.3 Cauchy 积分公式	36

2.4 解析函数的原函数	41
习题 2	44
第 3 章 复变函数的级数	47
3.1 复数项级数	47
3.1.1 复数列的极限	47
3.1.2 复数项级数	47
3.2 幂级数	49
3.2.1 幂级数的概念	49
3.2.2 幂级数的性质	52
3.3 Taylor 级数	53
3.4 Laurent 级数	61
3.5 调和函数	67
3.5.1 调和函数的概念与实例	67
3.5.2 解析函数与调和函数的关系	68
习题 3	70
第 4 章 留数及其应用	73
4.1 孤立奇点	73
4.1.1 可去奇点	73
4.1.2 极点	74
4.1.3 本性奇点	76
4.2 留数的一般理论	76
4.2.1 留数定义及留数基本定理	76
4.2.2 留数的计算	78
4.3 函数在无穷远点的留数	82
4.3.1 函数在无穷远点的性质	82
4.3.2 函数在无穷远点的留数	83
4.4 留数的应用	86
4.4.1 三角有理式的积分	86
4.4.2 有理函数的无穷积分	88
4.4.3 有理函数与三角函数乘积的积分	90
4.4.4 零点的分布	95
习题 4	97
第 5 章 保角映射	99
5.1 映射与保角映射的概念	99

5.1.1	映射的概念	99
5.1.2	导数的几何意义	100
5.1.3	保角映射的概念	102
5.1.4	关于保角映射的一般理论	103
5.2	分式线性映射	104
5.2.1	分式线性映射的基本性质	106
5.2.2	唯一确定分式线性映射的条件	109
5.2.3	分式线性映射的典型例子	110
5.3	几个初等函数所构成的映射	113
5.3.1	幂函数构成的映射	113
5.3.2	指数函数与对数函数构成的映射	116
5.4	保角映射举例	117
	习题 5	123
第 6 章	积分变换的预备知识	127
6.1	几个典型函数	127
6.1.1	单位阶跃函数	127
6.1.2	矩形脉冲函数	127
6.1.3	δ 函数	128
6.2	卷积的概念与性质	129
6.3	积分变换简介	132
	习题 6	135
第 7 章	Fourier 变换	136
7.1	Fourier 变换概念与性质	136
7.1.1	Fourier 变换的定义	136
7.1.2	Fourier 变换的性质	139
7.1.3	δ 函数的 Fourier 变换	144
7.2	离散 Fourier 变换	145
7.2.1	离散 Fourier 变换及其性质	146
7.2.2	快速 Fourier 变换	148
7.3	Fourier 变换的应用	150
7.4	Fourier 余弦和正弦变换	154
7.5	多维 Fourier 变换	157
	习题 7	160

第 8 章 Laplace 变换	163
8.1 Laplace 变换的概念	163
8.1.1 Laplace 变换的定义	163
8.1.2 周期函数和 δ 函数的 Laplace 变换	166
8.2 Laplace 变换的性质	167
8.3 Laplace 逆变换	176
8.4 Laplace 变换的应用	180
习题 8	186
第 9 章 Z 变换	191
9.1 Z 变换的概念与性质	191
9.1.1 Z 变换的定义	191
9.1.2 Z 变换的性质	193
9.2 Z 逆变换	196
9.3 Z 变换的应用	198
习题 9	201
第 10 章 小波变换基础	203
10.1 小波变换的背景	203
10.2 窗口 Fourier 变换简介	205
10.3 连续小波变换	208
10.4 二进小波变换和离散小波变换	210
10.5 多分辨分析	212
10.6 Mallat 分解与重构算法	213
10.7 小波变换应用实例	214
第 11 章 复变函数与积分变换的 MATLAB 求解	219
11.1 MATLAB 基础	219
11.2 复变函数的 MATLAB 求解	224
11.3 Fourier 变换的 MATLAB 求解	233
11.4 Laplace 变换的 MATLAB 求解	240
11.5 Z 变换的 MATLAB 求解	245
习题参考答案	248
参考文献	258

第 1 章 复变函数与解析函数

1.1 复数

1.1.1 复数的概念

由于解代数方程的需要,人们引进了复数.例如,简单的代数方程

$$x^2 + 1 = 0$$

在实数域内无解.为了建立代数方程的普遍理论,引入等式

$$i^2 = -1$$

由该等式所定义的数称为虚数单位 $i = \sqrt{-1}$,并称形如 $x+iy$ 或 $x+yi$ 的表达式为复数,其中 x 和 y 是任意两个实数.把这里的 x 和 y 分别称为复数 $z=x+iy$ (或 $z=x+yi$)的实部和虚部,并记做

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

当复数的虚部为零,实部不为零(即 $y=0, x \neq 0$)时,复数 $z=x+iy=x+0i=x$ 为实数,而虚部不为零(即 $y \neq 0$)的复数称为虚数.在虚数中,实部为零(即 $x=0, y \neq 0$)的称为纯虚数.例如, $3+0i=3$ 是实数, $4+5i$, $-3i$ 都是虚数,而 $-3i$ 是纯虚数.



复数的概念
复数的四则运算

复数 $x-iy$ 称为复数 $z=x+iy$ 的共轭复数(其中 x, y 均为实数),并记做 $\bar{z}$.显然, $z=x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数,并有 $\bar{\bar{z}} = (\bar{z}) = z$.

1.1.2 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数,如果 $x_1=x_2, y_1=y_2$,则称 z_1 和 z_2 相等,记为 $z_1=z_2$.

复数 z_1, z_2 的加、减、乘、除运算定义如下:

- (1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;
- (2) $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;
- (3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

不难验证,这些运算满足如下运算规律:

- (1) 交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, y_1 y_2 = y_2 y_1$;

(2) 结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3;$

(3) 分配律 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

并且还满足:

$$(4) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};$$

$$(5) \overline{\overline{z}} = z;$$

$$(6) z + \overline{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z, z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z;$$

$$(7) z \overline{z} = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$$

在实际计算中,只要记住 $i^2 = -1$ 及上述各式,四则运算问题便可以解决了.

例 1.1 设 $z_1 = 3 - 4i, z_2 = -1 + i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$ 及 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$

解 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(3-4i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -\frac{7}{2} + \frac{i}{2},$ 而 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{2} - \frac{i}{2}.$

例 1.2 $i^3 = i^2 i = -i, i^5 = i^4 i = i.$

例 1.3 设 z_1, z_2 是两个任意复数,证明:

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

证明 因为

$$\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{\overline{z_1} z_2} = z_1 \overline{z_2}$$

所以由运算规律(6),有

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}} = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

本例也可以用乘法和共轭复数的定义证明.

1.1.3 复平面与复数的表示法

复数 $z = x + yi$ 是由实部 x 和虚部 y 两个实数作为有序的数对确定的,给定复



数 z , 其实部 x 和虚部 y 也完全确定. 这样便建立了复数 z 和一对实数 (x, y) 之间的一一对应. 把这一对有序实数视为平面直角坐标系下点 P 的坐标时,复数 $z = x + yi$ 和 xOy 平面上点 $P(x, y)$ 也构成了一一对应. 给定一个复数 $z = x + yi$, 在

复平面与复数的表示法 坐标平面 xOy 上,存在唯一的点 $P(x, y)$ 与 $z = x + yi$ 对应.

复球面与无穷远点 反之,对 xOy 平面上的点 $P(x, y)$,存在唯一的复数 $z = x + yi$ 与它对应. 根据复数的代数运算及向量的代数运算的定义知,这种对应构成了同构映射. 因此,可以用 xOy 平面上的点表示复数 z . 这时把 xOy 平面称为复平面. 有时简称为 z 平面.

显然,实数与 x 轴上的点一一对应,而 x 轴以外的点都对应一个虚数,纯虚数 $iy (y \neq 0)$ 与 y 轴上的点(除原点)对应. 因此,称 x 轴为实轴, y 轴为虚轴.

今后把复平面上的点和复数 z 不加区别,即“点 z ”和“复数 z ”是同一个意思. 有时用大写字母 C 表示全体复数或者复平面. 复数 $z = x + yi$ 还可以用以原点为起

点而以点 P 为终点的向量表示(图 1.1).

这时复数加、减法满足向量加、减法中的平行四边形法则.

用 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 z 时, 这个向量在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 x 和 y . 把向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 称为复数 z 的模或称为 z 的绝对值, 并记做 $|z|$, 显然

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1-1)$$

$$|z| \leq |x| + |y|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$$

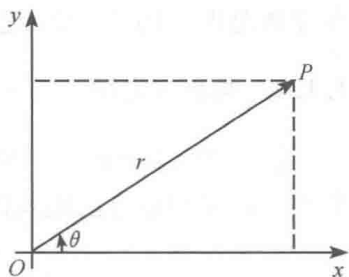


图 1.1

如果点 P 不是原点(即 $z \neq 0$), 那么把 x 轴的正向与向量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角 θ 称为复数 z 的辐角, 记做 $\text{Arg}z$. 对每个 $z \neq 0$, 都有无穷多个辐角, 因为用 θ_0 表示复数 z 的一个辐角时,

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

就是 z 的辐角的一般表达式.

满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的复数 z 的辐角称为主辐角(或称辐角的主值), 记做 $\arg z$, 则

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-2)$$

也可以把主辐角定义为 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的辐角, 这时式(1-2)仍成立. 在第5章保角映射中, 这样规定主辐角比较方便.

当 $z=0$ 时, $\text{Arg}z$ 没有意义, 即零向量没有确定的方向角; 但当 $z \neq 0$ 时, $|z| \neq 0$; 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\tan(\text{Arg}z) = \frac{y}{x} \quad (1-3)$$

利用直角坐标与极坐标之间的关系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

复数 $z = x + yi$ 可表示为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (1-4)$$

表达式(1-4)称为复数 z 的三角表示式. 再利用 Euler(欧拉)公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

复数 $z = x + yi$ 还可表示为

$$z = re^{i\theta} \quad (1-5)$$

式(1-5)称为复数的指数表示式. 式(1-4)和式(1-5)中的 $r = |z|$, $\theta = \text{Arg}z$.

易见, 当 $z \neq 0$ 时, $\text{Arg}\bar{z} = -\text{Arg}z$. 当 $z = re^{i\theta}$ 时, $\bar{z} = re^{-i\theta}$. 从几何上看, 复数 $z_2 - z_1$ 所表示的向量, 与以 z_1 为起点、 z_2 为终点的向量相等(方向相同, 模相等). 由此可知不等式

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| &\geq ||z_1| - |z_2|| \end{aligned}$$

在复数范围内仍然成立. 复数的加、减运算对应于复平面上相应向量的加、减运算.

1.1.4 乘幂与方根

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 是两个复数的三角表示式, 根据乘法定义和运算法则及两角和公式,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

于是

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

应该注意的是 $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ 中的加法是集合的加法运算: 即将两个集合中所有的元素相加构成的集合.

乘幂与方根

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 \mid \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}$$

利用数学归纳法进而可证明: 当 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k=1, 2, \dots, n$ 时,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \quad (1-6)$$

特别地, 当 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 时,

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (1-7)$$

于是

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n| &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_n| \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2 \cdots z_n) &= \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \cdots + \operatorname{Arg} z_n \\ |z|^n &= |z^n|, \quad \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

如果把式(1-6)和式(1-7)写成指数形式, 即当 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$), $z = r e^{i\theta}$ 时,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)} \quad (1-6)'$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad (1-7)'$$

特别地, 当 $|z| = r = 1$ 时, 式(1-7)变为

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (1-8)$$

这就是 De Moivre(棣莫弗)公式.

当用 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ 定义负整数幂时, 公式(1-8)仍成立.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, 当 $z_2 \neq 0$ (即 $r_2 \neq 0$) 时,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \overline{z_2} = \frac{1}{r_2^2} z_1 \overline{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (1-9)$$

把式(1-9)写成指数形式, 即当 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ 时,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1-9)'$$

于是

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2$$

指数表示法在处理复数的乘、除运算时很方便, 其运算结果符合实数情况下所用过的运算规律.

对给定的复数 z , 方程 $w^n = z$ 的解 w 称为 z 的 n 次方根, 记做 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$. 下面利用公式(1-7)求 $w = \sqrt[n]{z}$. 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, 则根据式(1-7), 有

$$\rho^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

于是, 当 $r \neq 0$ 时,

$$\rho^n = r, \quad \cos n\varphi = \cos\theta, \quad \sin n\varphi = \sin\theta$$

满足以上三式的充分必要条件是

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由此得

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 表示算术根. 于是

$$w = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-10)$$

当取 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 对一个取定的 θ , 可得 n 个相异根

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i\sin \frac{\theta}{n} \right)$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2\pi}{n} \right)$$

.....

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right)$$

由三角函数的周期性

$$w_{k+n} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} \right]$$

$$= r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$= w_k$$

可见, 除 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 外, 均是重复出现的, 故这 n 个复数就是所要求的 n 个根.



乘幂与方根(续)

当 $z=0$ 时, $w=0$ 是 $z^{\frac{1}{n}}=0$ 的 n 重根.

在上面的推导过程中, 可取 θ 为一个定值, 通常取主辐角. 若用指数表示式, 则当 $z=re^{i\theta}$ 时,

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

例 1.4 求方程 $w^4+16=0$ 的四个根.

解 因为 $-16=2^4 e^{(2k+1)\pi i}$, 所以方程可化为

$$w^4 = 2^4 e^{(2k+1)\pi i}$$

于是

$$w = [2^4 e^{(2k+1)\pi i}]^{\frac{1}{4}} = 2e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi)i} \quad (k=0,1,2,3)$$

即

$$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$w_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}(1+i)$$

$$w_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1-i)$$

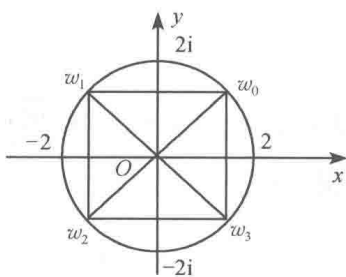


图 1.2

w_0, w_1, w_2, w_3 恰好是以原点为圆心、半径为 2 的圆 $|w|=2$ 的内接正方形的四个顶点(图 1.2), 且

$$w_1 = iw_0$$

$$w_2 = iw_1 = -w_0$$

$$w_3 = iw_2 = -iw_0$$

一般情况下, $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个根就是以原点为中心、半径为 $r^{\frac{1}{n}}$ 的圆的内接正多边形的 n 个顶点所表示的复数.

1.1.5 复球面与无穷远点

复数可以用平面上的点表示, 这是复数的几何表示法的一种, 另外还可以用球面上的点表示复数.

设 Σ 是与复平面 C 切于原点 O 的球面. 过原点 O 做垂直于平面 C 的直线, 与 Σ 的另一交点为 N . 原点 O 称为 Σ 的南极(S极), 点 N 称为 Σ 的北极(图 1.3).

已知平面 C 上的任意点 P 都能对应一个复数 z , 联结 PN , 则和球面 Σ 交于唯一异于 N 的点 Q , 就用 Q 表示 P . 于是平面 C 上任意点 P 都有球面 Σ 上唯一表示它的点 Q ; 反之, 对球面 Σ 上任意异于 N 的点 Q , 过 N, Q 的直线与平面 C 交于唯一点



复平面与复数的表示法
复球面与无穷远点

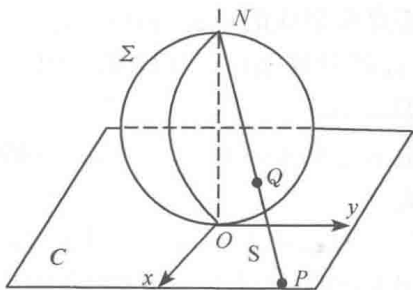


图 1.3

P . 显然, Q 正好是 Σ 上表示 P 的点, 这说明: 任何复数 z 都可以用球面 Σ 上的一点 Q 表示; 反之, 球面 Σ 上任何异于 N 的点 Q 都能表示唯一的复数 z . 球面 Σ 的北极 N 不能对应平面 C 上的一个定点. 当球面 Σ 上的点离北极 N 越近时, 它所表示的复数的绝对值越大. 于是, 在复平面 C 上加进去一个假想的点, 正好让它和北极 N 对应, 称它为无穷远点, 并记做 ∞ . 此处符号 ∞ 代表一个点——无穷远点, 不要和过去曾使用过的无穷大相混淆. 就是说, 这里的 ∞ 是复平面上加进去的对应于北极 N 的点, 而无穷大量是一个变量. 在复平面中加进去对应于北极的点——无穷远点之后, 称它为扩充复平面. 而前面提到的 Σ 称为复球面.

对无穷远点而言, 其实部、虚部和辐角等概念都没有意义, 而约定 $|\infty| = +\infty$. 通常的复数称为有限复数或有限点, 并且 $|z| < +\infty$. 为了使用方便, 做如下约定:

设 α 是有限复数, 则

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0 \quad (\alpha \neq \infty), \quad \frac{\alpha}{0} = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

而 $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ 以及 $\frac{\infty}{\infty}$ 没有意义.

1.2 平面点集

1.2.1 区域

先介绍邻域、内点、外点、边界点的概念, 再给出开集和区域等定义.

1. 邻域

z_0 是复平面内的定点, 满足不等式

$$|z - z_0| < \delta \quad (1-11)$$



区域

的一切点所组成的集合 $\{z \mid |z - z_0| < \delta\}$ 称为 z_0 的 δ 邻域, 简称为 z_0 的邻域, 其中 $\delta > 0$. z_0 的邻域实际上是以 z_0 为中心, δ 为半径的圆的内部所有点组成的点集. 简记为 $B(z_0, \delta)$.

由满足不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所有点构成的集合称为 z_0 的去心邻域, 而满足不等式

$$|z| > R \quad (R > 0) \quad (1-12)$$

的一切点(包括无穷远点)的集合称为无穷远点的邻域, 用 $R < |z| < +\infty$ 表示无穷远点的去心邻域. 也就是说, 在扩充复平面中, 去掉圆 $|z| = R$ 及其内部点的点集称为无穷远点的邻域; 而在普通复平面中, 去掉 $|z| \leq R$ 的一切点的集合称为无穷远点的去心邻域.

2. 内点

设 E 是复平面上的点集, z_0 是一个定点, 若存在 z_0 的一个邻域, 使得该邻域内的一切点均属于 E , 则称 z_0 是 E 的内点. 即存在 $\rho > 0$, 满足

$$B(z_0, \rho) = \{z \mid |z - z_0| < \rho\} \subset E$$

3. 外点

设 E 是复平面上的点集, z_0 是一个定点, 若存在 z_0 的一个邻域, 使得在此邻域内的一切点均不属于 E , 则称 z_0 是 E 的外点. 即存在 $\rho > 0$, 满足

$$B(z_0, \rho) \cap E = \{z \mid |z - z_0| < \rho\} \cap E = \emptyset$$

此处 $\emptyset$ 表示空集.

4. 边界点

设 E 是复平面上的点集, z_0 是定点, 若 z_0 的任何邻域内都含有属于 E 的点和不属于 E 的点, 则称 z_0 是 E 的边界点. 即对任意的 $\rho > 0$, 存在 $z_1, z_2 \in B(z_0, \rho)$, 满足

$$z_1 \in E, \quad z_2 \notin E$$

显然, E 的内点属于 E , 而外点不属于 E , 但边界点既可能属于 E , 也可能不属于 E .

E 的边界点的全体所组成的集合称为 E 的边界, 记做 ∂E .

5. 开集

设 G 是复平面上的点集, 如果 G 中的点全部是 G 的内点, 则称 G 是开集.

例 1.5 设 z_0 是定点, $r > 0$ 是常数, 则以 z_0 为中心, r 为半径的圆的内部点, 即满足不等式

$$|z - z_0| < r \quad (1-13)$$