有向几何学

有向面积及其应用

（上）

喻德生　著

科学出版社

有向[redacted])

喻德生 著

南昌航空大学科学文库

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是《有向几何学》系列成果之二. 在《平面有向几何学》等研究的基础上，创造性地、广泛地运用有向面积法和有向面积定值法，对平面有关问题进行研究，得到了一系列的有关三角形、多边形和多角形有向面积的定值定理，揭示了这些定理与经典数学问题、数学定理和一大批数学竞赛题之间的联系，使这些经典数学问题、数学定理和数学竞赛题得到了推广、证明或加强，较为系统、深入地阐述了平面有向面积的基本理论、基本思想和基本方法. 它对开拓数学的研究领域，揭示事物之间本质的联系，探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义；对丰富几何学各学科，以及相关数学学科的教学内容，促进大学和中学数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义；此外，有向几何学的研究成果和研究方法，对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

本书可供数学研究工作者、大学和中学数学教师、数学专业本科生和研究生阅读，可以作为数学专业本科生、研究生和中学数学竞赛的教材，也可供相关学科专业的师生、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

有向几何学：有向面积及其应用. 上/喻德生著. —北京：科学出版社，2017.8

ISBN 978-7-03-054076-8

Ⅰ.①有… Ⅱ. ①喻… Ⅲ.①有向图 Ⅳ.①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 185121 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：王 瑞
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年 8 月第一次印刷 印张：20 1/2
字数：410 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

喻德生，江西高安人. 1980 年步入教坛，1990 年江西师范大学数学系硕士研究生毕业，获理学硕士学位. 现任南昌航空大学数学与信息科学学院教授，硕士研究生导师，江西省第六批中青年骨干教师，中国教育数学学会常务理事，《数学研究期刊》编委，南昌航空大学省级精品课程《高等数学》负责人，教育部学位与研究生教育发展中心学位论文评审专家，江西省第二届青年教师讲课比赛评委，研究生数学建模竞赛论文评审专家. 历任大学数学教研部主任等职. 指导硕士研究生 12 人. 主要从事几何学、计算机辅助几何设计和数学教育等方面的研究. 参与国家自然科学基金课题 3 项，主持或参与省部级教学科研课题 10 项、厅局级教学科研课题 12 项.在国内外学术刊物发表论文 60 余篇，撰写专著 3 部，主编出版教材 10 种 16 个版本. 作为主持人获江西省优秀教学成果奖 3 项，指导学生参加全国数学建模竞赛获省级一等奖及以上奖励 4 项并获江西省优秀教学成果荣誉 2 项，南昌航空工业学院优秀教学成果奖 4 项，获校级优秀教师 2 次. Email：yuds17@163.com

前 言

“有向”是自然科学中的一个十分重要而又应用非常广泛的概念. 我们经常遇到的有向数学模型无外乎以下两类.

一是“泛物”的有向性. 如微积分学中的左右极限、左右连续、左右导数等用到的量的有向性, 定积分中用到的线段 (即区间) 的有向性, 对坐标的曲线积分用到的曲线的有向性, 对坐标的曲面积分用到的曲面的有向性等, 这些都是有向性的例子. 尽管这里的问题很不相同, 但是它们都只有正、负两个方向, 因此称为“泛物”的有向性. 然而, 这里的有向性没有可加性, 不便运算.

二是“泛向”的有向量, 亦即我们在数学与物理中广泛使用的向量. 我们知道, 这里的向量有无穷多个方向, 而且两个方向不同的向量相加通常得到一个方向不同的向量. 因此, 我们称为“泛向”的有向量. 这种“泛向”的有向数学模型, 对于我们来说方向太多, 不便应用.

然而, 正是由于“泛向”有向量的可加性与“泛物”有向性的二值性, 启示我们研究一种既有二值有向性、又有可加性的几何量. 一维空间的有向距离, 二维空间的有向面积, 三维空间乃至一般的 N 维空间的有向体积等都是这种几何量的例子. 一般地, 我们把带有方向的度量称为有向度量.

“有向度量”并不是数学中一个全新的概念, 各种有向度量的概念散见于一些数学文献中. 但是, 有向度量的概念并未发展成为数学中的一个重要概念. 有向度量的应用仅仅局限于其“有向性”, 而极少触及其“可加性”. 要使有向度量的概念变得更加有用, 要发现各种有向度量的规律性, 使有向度量的知识系统化, 就必须对有向度量进行深入的研究, 创立一门独立的几何学——有向几何学. 为此, 必须明确有向几何学的研究对象, 确立有向几何学的研究方法, 构建有向几何学的知识体系. 这对开拓数学研究的领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科以及相关数学学科, 特别是数学分析、高等数学等学科的教学内容, 促进高等学校数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

就我们所知, 著名数学家希尔伯特在他的数学名著《直观几何》中, 利用三角形的有向面积证明了一个简单的几何问题, 这是历史上较早的使用有向面积证题的例子. 20 世纪五六十年代, 著名数学家 Wilhelm Blaschke 在他的《圆与球》中, 利用有向面积深入地讨论了圆的极小性问题, 这是历史上比较系统地使用有向面积方

法解决问题的例子. 但是, 有向面积法并未发展成一种普遍使用、而又十分有效的方法.

20 世纪八九十年代, 我国著名数学家吴文俊、张景中院士, 开创了数学机械化的研究, 而计算机中使用的距离和面积都是有向的, 因此数学机械化的研究拓宽了有向距离和有向面积应用的范围. 特别是张景中院士十分注重面积关系在数学机器证明中的作用, 指出面积关系是"数学中的一个重要关系", 并利用面积关系创立了一种可读的数学机器证明方法——即所谓的消点法, 也称为面积法.

近年来, 我们在分析与借鉴上述两种思想方法的基础上, 发展了一种研究有向几何问题的方法, 即所谓的有向度量定值法. 除上述提到的两个原因外, 我们也受到如下两种数学思想方法的影响.

一是数学建模的思想方法. 我们知道, 一个数学模型通常不是一个简单的数学结论. 它往往包含一个或多个参数, 只要给定参数的一个值, 就可以得出一个相应的结论. 这与经典几何学中一个一个的、较少体现知识之间联系的结论形成了鲜明的对照. 因此, 我们自然会问, 几何学中能建立涵盖面如此广泛的结论吗? 这样, 寻找几何学中联系不同结论的参数, 进行几何学中的数学建模, 就成为我们研究有向几何问题的一个重点.

二是函数论中的连续与不动点的思想方法. 我们知道, 经典几何学中的结论通常是离散的, 一个结论就要给出一个证明, 比较麻烦. 我们能否引进一个连续变化的量, 使得对于变量的每一个值, 某个几何量或某几个几何量之间的关系始终是不变的? 这样, 构造几何量之间的定值模型就成为我们研究有向几何问题的一个突破口.

尽管几何定值问题的研究较早, 一些方面的研究也比较深入, 但有向度量定值问题的研究尚处于起步阶段. 近年来, 我们研究了有向距离、有向面积定值的一些问题, 得到了一些比较好的结果, 并揭示了这些结果与一些著名的几何结论之间的联系. 不仅使很多著名的几何定理——Euler 定理、Pappus 定理、Pappus 公式、蝴蝶定理、Servois 定理、中线定理、Harcourt 定理、Carnot 定理、Brahmagupta 定理、切线与辅助圆定理、Anthemius 定理、焦点和切线的 Apollonius 定理、Zerr 定理、配极定理、Salmon 定理、二次曲线的 Pappus 定理、两直线上的 Pappus 定理、Desarques 定理、Ceva 定理、等截共轭点定理、共轭直径的 Apollonius 定理、正弦及余弦差角公式、Weitzentock 不等式、Möbius 定理、Monge 公式、Gauss 五边形公式、Erdös-Mordell 不等式、Gauss 定理、Gergonne 定理、梯形的施泰纳定理、拿破仑三角形定理、Cesaro 定理、三角形的中垂线定理、Simson 定理、三角形的共点线定理、完全四边形的 Simson 线定理、高线定理、Neuberg 定理、共点线的施泰纳定理、Zvonko Cerin 定理、双重透视定理、三重透视定理、Pappus 重心定理、角平分线定理、Menelaus 定理、Newton 定理、Brianchon 定理等结论和一大批数学竞

赛题在有向度量的思想方法下得到了推广或证明, 而且揭示了这些经典结论之间、有向度量与这些经典结论之间的内在联系. 显示出有向面积定值法的新颖性、综合性、有效性和简洁性. 特别是在三角形、四边形和二次曲线外切多边形中有向面积定值问题的研究, 涵盖面广、内容丰富、结论优美, 并引起了国内外数学界的关注.

打个比方说, 如果我们把经典的几何定理看成是一颗颗的珍珠, 那么几何有向度量的定值定理就像一条条的项链, 把一些看似没有联系的若干几何定理串连起来, 形成一个完美的整体. 因此, 几何有向度量的定值定理更能体现事物之间的联系, 揭示事物的本质.

本书是《有向几何学》系列研究成果之二. 在《平面有向几何学》(喻德生著, 科学出版社, 2014 年 3 月) 等有关研究成果的基础上, 创造性地、广泛地运用有向面积和有向面积定值法, 对平面有关问题进行研究, 得到了一系列的有关三角形、多边形和多角形有向面积的定值定理, 揭示了这些定理与经典数学问题、数学定理和一大批数学竞赛题之间的联系, 使这些经典数学问题、数学定理和数学竞赛题得到了推广、证明或加强, 较为系统、深入地阐述了有向面积的基本理论、基本思想和基本方法.

本书得到南昌航空大学科研成果专项资助基金和江西省自然科学基金 (CA201607138) 的资助, 得到科技处和数学与信息科学学院领导以及我院教师毕艳会博士的大力支持, 在此表示衷心感谢! 同时, 也感谢科学出版社陈玉琢编辑的关心与帮助.

由于作者阅历、水平有限, 书中疏漏与不足之处在所难免, 敬请国内外同仁和读者批评指正.

作者
2017 年 2 月

目 录

第 1 章　多边形有向面积公式

1.1　多边形面积的概念与性质

从几何上来看, 两点间的距离是一维图形长短的度量, 多边形的面积是二维图形大小的度量, 那么这两类度量之间有什么联系呢？本节主要阐述多边形和多边形面积的基本知识, 为多边形有向面积的研究奠定基础. 首先, 介绍平面多边形 (多角形) 的基本概念; 其次, 介绍多边形面积的概念, 并通过定义三角形的面积, 得出一般的多边形的面积; 再次, 给出三角形面积公式与性质; 然后, 给出多边形面积公式与性质; 最后, 概括本节的内容.

1.1.1　多边形 (多角形) 的基本概念

多边形 (多角形) 有平面多边形和空间多边形之分. 本书所论及的多边形 (多角形) 均为平面多边形 (多角形), 并简称为多边形 (多角形).

定义 1.1.1　由在同一平面且不在同一直线上的三条或三条以上首尾顺次连接且不相交的线段所组成的封闭图形叫做多边形; 由在同一平面且不在同一直线上的三条或三条以上首尾顺次连接的线段所组成的封闭图形叫做多角形.

显然, 多边形是多角形的特殊情形.

组成多边形 (多角形) 的每一条线段叫做多边形 (多角形) 的边; 相邻的两条线段的公共端点叫做多边形 (多角形) 的顶点; 多边形 (多角形) 相邻两边所组成的角叫做多边形 (多角形) 的内角; 多边形 (多角形) 内角的一边与另一边反向延长线所组成的角叫做多边形 (多角形) 的外角; 连接多边形 (多角形) 的两个不相邻顶点的线段叫做多边形 (多角形) 的对角线.

显然, 组成多边形 (多角形) 的线段至少有三条, 三角形是最简单的多边形 (多角形).

为方便起见, 我们把同一直线上三条或三条以上的线段首尾顺次连接所成的图形, 看成是多边形的特殊情形.

定义 1.1.2　以多边形 (多角形) 某边 (某对角线) 为一边、多边形 (多角形) 所在平面上任意一点为一个顶点的三角形, 称为多边形 (多角形) 的边三角形 (对角线三角形).

为方便起见, 当任意点在多边形 (多角形) 某边 (某对角线) 上时, 我们把任意点与这条边 (这条对角线) 所组成的线段, 看成是边三角形 (对角线三角形) 的特殊

情形.

显然, 过 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上一点 P, 可以作 n 个多边形 (多角形) 的边三角形, 即 $PP_1P_2, PP_2P_3, \cdots, PP_nP_1$.

1.1.2　多边形面积的基本概念

要确定二维图形——多边形的大小, 可以从纵横两个维度来度量, 这样就把多边形面积度量的问题转化成两个维度距离度量的问题. 由维度的对称性, 因此将多边形的面积定义为两个维度距离度量之积. 可见不同的距离的度量, 会产生不同的面积的度量. 一般地, 多边形面积的定义如下.

定义 1.1.3　多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积是指满足不变性和可加性两个条件的正实值函数, 即这样的函数应满足下列两条件:

(i) 合同的多边形具有相同的面积;

(ii) 如果一个多边形是由两个 (或若干个) 多边形组成的, 则它的面积等于组成它的多边形的面积的和.

显然, 即使针对同一度量的距离, 满足以上条件的面积的度量也不是唯一的. 因此, 我们约定, 本书所讨论的面积, 都是指多边形在纵横两个维度上欧氏距离度量的乘积, 即通常意义下的面积.

由于长方形在纵横两个维度, 即长和宽两个维度的度量处处都是一样的, 因此可以把长方形的面积定义为长与宽的乘积; 特别地, 正方形的面积就是边长的平方. 据此, 根据定义 1.1.3 可以推出三角形的面积等于底乘高的一半, 乃至一般的多边形的面积.

反之, 尽管三角形在纵横两个维度的度量都不是恒定的, 但利用 “平均长度” 或 “平均宽度” 的概念, 也可以用以上方法定义三角形的面积. 事实上, 相对于三角形某边 (某边上的高度) 而言, 其平均高度 (宽度) 正好是该边上的高 (该边的长度) 的一半, 因此可以直接定义三角形的面积等于底乘高的一半, 进而推出长方形的面积等于长与宽的乘积, 乃至得出一般的多边形的面积.

定义 1.1.4　设 $P_1P_2P_3$ 是三角形, 则其面积定义为底与高乘积的一半, 记为 $\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}$, 即

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_3-P_1P_2}\quad 或\quad \mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_2P_3}\mathrm{d}_{P_1-P_2P_3}$$

$$或\quad \mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_3P_1}\mathrm{d}_{P_2-P_3P_1}.$$

特别地, 当 P_1, P_2, P_3 重合或共线时, 我们把相应的点或线段看成是三角形的特殊情形, 并规定其面积为零.

定理 1.1.1　平行四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积等于底乘高, 即

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3P_4}=\mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_3-P_1P_2}\quad (或\ \mathrm{a}_{P_1P_2P_3P_4}=\mathrm{d}_{P_2P_3}\mathrm{d}_{P_1-P_2P_3}).$$

证明 因为平行四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的对角线 P_2P_4 将其分成两个三角形 $P_1P_2P_4$ 和 $P_2P_3P_4$, 故由多边形面积的可加性、三角形面积的定义和平行四边形的性质, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{a}_{P_1P_2P_3P_4} &= \mathrm{a}_{P_1P_2P_4} + \mathrm{a}_{P_2P_3P_4} = \frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_4-P_1P_2} + \frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_3P_4}\mathrm{d}_{P_2-P_3P_4}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_4-P_1P_2} + \frac{1}{2}\mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_4-P_1P_2} = \mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_3-P_1P_2}.\end{aligned}$$

类似地, 可以证明 $\mathrm{a}_{P_1P_2P_3P_4} = \mathrm{d}_{P_2P_3}\mathrm{d}_{P_1-P_2P_3}$ 的情形.

推论 1.1.1 矩形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积等于长乘宽, 即

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3P_4} = \mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_3P_4}.$$

证明 在定理 1.1.1 中注意到 $\mathrm{d}_{P_3-P_1P_2} = \mathrm{d}_{P_3P_4}$ 或 $\mathrm{d}_{P_1-P_2P_3} = \mathrm{d}_{P_1P_2}$ 即得.

推论 1.1.2 正方形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积等于边长的平方, 即

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3P_4} = \mathrm{d}^2_{P_1P_2}.$$

证明 在推论 1.1.1 中注意到 $\mathrm{d}_{P_1P_2} = \mathrm{d}_{P_3P_4}$ 即得.

1.1.3 三角形面积公式与性质

定理 1.1.2 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3)$, 则 $P_1P_2P_3$ 的面积

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right|. \tag{1.1.1}$$

证明 根据直线 P_1P_2 的方程

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

和点到直线的距离公式, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{P_1P_2}\mathrm{d}_{P_3-P_1P_2} &= \left|(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)\right|_{P_3(x_3,y_3)}\\ &= \left|(y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)\right|\\ &= \left|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right|,\end{aligned}$$

故由定义 1.1.2 知, 式 (1.1.1) 成立.

注 1.1.1 三角形的面积公式 (1.1.1) 也可以用叠加符号和行列式分别表示成

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\right| \quad \text{和} \quad \mathrm{a}_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|.$$

根据三角形面积的定义和公式, 可以得到三角形面积如下的几个基本性质.

性质 1.1.1 非负性 $\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}\geqslant 0$, 且 $\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=0$ 的充分必要条件是 P_1,P_2,P_3 三点共线.

性质 1.1.2 边三角形面积不等式 对平面上任意四点 P_1,P_2,P_3,P_4, 恒有

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}\leqslant \mathrm{a}_{P_2P_3P_4}+\mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2}. \tag{1.1.2}$$

证明 如图 1.1.1 所示. 设各点的坐标为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3),P_4(x_4,y_4)$, 于是由定理 1.1.2 和绝对值的性质, 有

$$\begin{aligned}
2\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=&|(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)|\\
=&|[(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_2-x_2y_4)]\\
&-[(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)+(x_1y_3-x_3y_1)]\\
&+[(x_4y_1-x_1y_4)+(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)]|\\
\leqslant&|(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_2-x_2y_4)|\\
&+|(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)+(x_1y_3-x_3y_1)|\\
&+|(x_4y_1-x_1y_4)+(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)|\\
=&2\mathrm{a}_{P_2P_3P_4}+2\mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+2\mathrm{a}_{P_4P_1P_2},
\end{aligned}$$

所以式 (1.1.2) 成立.

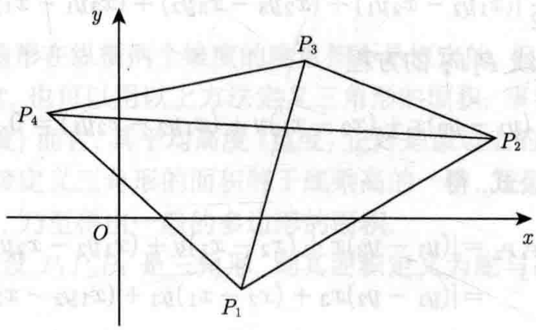

图 1.1.1

注 1.1.2 性质 1.1.2 的几何意义是, 三角形的面积不大于它所在平面上任意一点的所有边三角形的面积的和.

性质 1.1.3 对称性 $\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=\mathrm{a}_{P_3P_2P_1}$.

证明 在式 (1.1.2) 中令 $P_4=P_2$, 得

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}\leqslant \mathrm{a}_{P_2P_3P_2}+\mathrm{a}_{P_3P_2P_1}+\mathrm{a}_{P_2P_1P_2}.$$

由性质 1.1.1 知 $\mathrm{a}_{P_2P_3P_2}=\mathrm{a}_{P_2P_1P_2}=0$, 故

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}\leqslant \mathrm{a}_{P_3P_2P_1}.$$

又因为 P_1, P_3 的任意性, 在上式中互换 P_1, P_3 后, 得

$$\mathrm{a}_{P_3P_2P_1}\leqslant \mathrm{a}_{P_1P_2P_3},$$

两式结合即得 $\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}=\mathrm{a}_{P_3P_2P_1}$.

注 1.1.3 根据三角形面积的对称性, 性质 1.1.2 也可以表述为: 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则恒有

$$\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}\leqslant \mathrm{a}_{PP_1P_2}+\mathrm{a}_{PP_2P_3}+\mathrm{a}_{PP_3P_1}. \tag{1.1.3}$$

性质 1.1.4 对平面上任意四点 P_1, P_2, P_3, P_4, 恒有

$$|\,\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}-\mathrm{a}_{P_2P_3P_4}|\leqslant \mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2}. \tag{1.1.4}$$

证明 根据性质 1.1.1 和性质 1.1.2, 有

$$\mathrm{a}_{P_2P_3P_4}\leqslant \mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2}+\mathrm{a}_{P_1P_2P_3} \quad 和 \quad \mathrm{a}_{P_1P_2P_3}\leqslant \mathrm{a}_{P_2P_3P_4}+\mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2},$$

即

$$-(\mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2})\leqslant \mathrm{a}_{P_1P_2P_3}-\mathrm{a}_{P_2P_3P_4} \quad 和 \quad \mathrm{a}_{P_1P_2P_3}-\mathrm{a}_{P_2P_3P_4}\leqslant \mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2},$$

于是

$$-(\mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2})\leqslant \mathrm{a}_{P_1P_2P_3}-\mathrm{a}_{P_2P_3P_4}\leqslant \mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2},$$

即

$$|\,\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}-\mathrm{a}_{P_2P_3P_4}|\leqslant \mathrm{a}_{P_3P_4P_1}+\mathrm{a}_{P_4P_1P_2}.$$

注 1.1.4 根据以上证明可知, 在假设性质 1.1.1 的前提下, 式 (1.1.2) 和 (1.1.4) 是等价的.

1.1.4 多边形面积公式与性质

定理 1.1.3 设多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积

$$\mathrm{a}_{P_1P_2\cdots P_n}=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_ny_1-x_1y_n)\right|. \tag{1.1.5}$$

该定理的证明见注 1.3.1. 根据该定理, 可以得出多边形面积具有三角形面积类似的几个基本性质, 兹列如下: