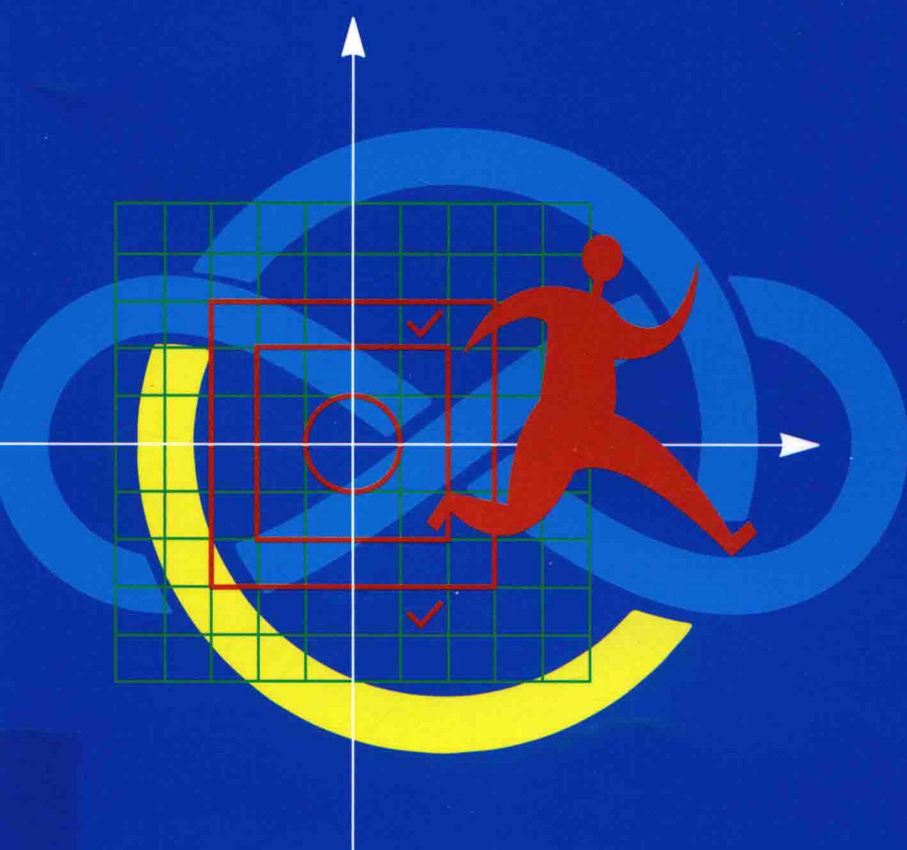
天科学堂组织编写

上册

高中数学进阶与数学奥林匹克

马传渔　张志朝　陈荣华　编著



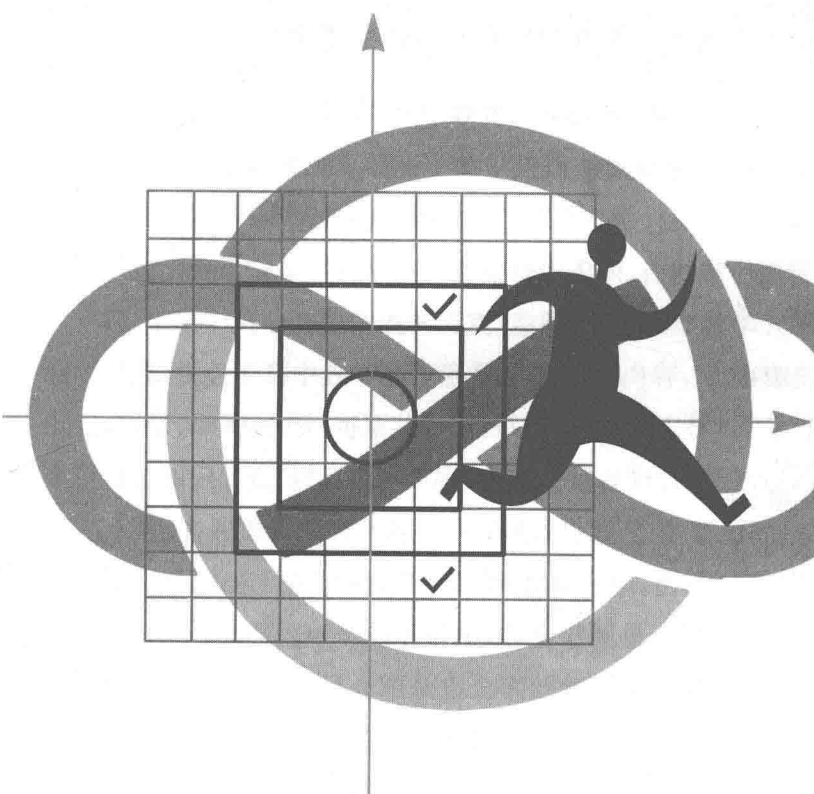
中国科学技术大学出版社

天科学堂组织编

上册

高中数学进阶与数学奥林匹克

马传渔　张志朝　陈荣华　编著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

《高中数学进阶与数学奥林匹克》参照《高中数学教学大纲》和《高中数学竞赛大纲》编写而成，覆盖了高中数学和竞赛数学的全部内容，是奥林匹克高中数学培训教材，分上、下两册，每册16章，每章共2节，每节设置“知识要点”“范例解读”“思维方法剖释”3个栏目.

本书力求融高考与竞赛为一体，并注意为学生们未来的各类学习在知识板块、解题方法和能力创新3个方面作适当的铺垫，适合中学生、中学数学教师、高等师范院校数学系师生阅读使用，也可供数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学进阶与数学奥林匹克. 上册/马传渔，张志朝，陈荣华编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.6

ISBN 978-7-312-04188-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①马… ②张… ③陈…　Ⅲ. 中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第075839号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com

印刷　安徽国文彩印有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　787 mm×1092 mm　1/16

印张　18.5

字数　372千

版次　2017年6月第1版

印次　2017年6月第1次印刷

定价　48.00元

前　言

由我国著名数学家华罗庚、苏步青两位老前辈于1958年负责举办的全国部分省、市高中数学竞赛，为我国高中数学竞赛拉开了序幕，这对激发青年人对数学的兴趣，培养青年人的数学才能，发现和培养科技人才的后备军，促进全国各省、市的数学教育的交流和发展具有积极的作用.

自1981年中国数学会普及工作委员会举办了全国高中数学联赛之后，每年一次10月份举办的全国高中数学联赛走上了规范化的道路.1985年中国数学会决定在每年1月份举办全国中学生数学冬令营，即中国数学奥林匹克(简称CMO)，这项我国中学生最高级别的数学竞赛云集了全国高中数学联赛80%左右的获奖者，进行两次模拟国际数学奥林匹克(简称IMO)的考试，从中选出20名优胜者组成国家集训队，他们经过培训与多次考试，最后选定6人组成中国代表队，参加一年一度的于7月份举行的IMO竞赛的角逐.通常，称全国高中数学联赛、CMO和IMO为我国的三大数学竞赛.

在天科学堂的策划下，《高中数学进阶与数学奥林匹克》培训教材与广大读者见面了.本书旨在发扬充满自信、顽强拼搏、持之以恒、自强不息的数学奥林匹克精神，以坚韧不拔的毅力刻苦学习、熟读精思，在愉快中求知，在遐思中创新.

《高中数学进阶与数学奥林匹克》参照《高中数学教学大纲》和《高中数学竞赛大纲》编写而成，覆盖了高中数学和竞赛数学的全部内容，是奥林匹克高中数学培训教材，分上、下两册，每册16章，每章共2节，每节设置“知识要点”“范例解读”“思维方法剖释”3个栏目.“知识要点”栏目内容丰富，具有拓宽视野、增长知识的作用.“范例解读”栏目含10道大题，各题选自国内外各类竞赛题或自编题.注意题的代表性、科学性和应用性.每题详尽解答，力求层层铺垫，没有跳步；层次分明，由易到难；条理清晰，逻辑性强；便于自学，便于接受.大题内可含若干道小题，全书题量充足，因材施教，供学有余力的学生选用.“思维方法剖释”栏目介绍众多全面的解题方法和技巧，旨在取得融会贯通、系统总结、灵活运用、举一反三、问一答十的效果.

本书力求融高考与竞赛为一体，并注意为学生们未来的各类学习在知识板块、解题方法和能力创新3个方面作适当的铺垫.

我们希望每个学生在各自现有的学业水平上更上一层楼，赢得高考，赢得竞赛；希

望数学尖子生能在IMO竞赛中为国争光;希望广大读者在阅读中增乐趣,在演练中添经验,逐日提升数学素养和数学水平. 最后,欢迎广大读者通过微信公众号(jingsai985)与我们交流和讨论.

马传渔

2017年3月26日于南京大学

目　录

第1章 集 合

第1节 子集、交集、并集、补集

知识要点

1. 集合

给出集合 A 及一个对象 x，“$x\in A$”与“$x\notin A$”两者必居其一，元素与集合之间只有属于和不属于两种关系.

集合中元素的三要素：

(1) 确定性.对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，这是集合的基本特征.

(2) 互异性.集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的)，相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素.

(3) 无序性.在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说，$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$.

2. 集合的关系

子集：任意 $x\in A\Rightarrow x\in B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

真子集：$A\subseteq B$ 且 $A\neq B\Leftrightarrow A\subsetneqq B$.

补集：设 A 是全集 U 的子集，则 U 中子集 A 的补集 $\complement_U A=\{x\mid x\in U,但\ x\notin A\}$.

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$.

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A,或\ x\in B\}$.

3. 子集与真子集的个数

设集合 A 由 n 个元素组成，则集合 A 的子集共有 2^n 个，其中真子集有 2^n-1 个.

4. 集合的性质

对于任意集合 A,B,C(设 U 为全集)，有：

(1) $A\subseteq A$(自反性)；

(2) $A\subseteq B, B\subseteq A\Rightarrow A=B$(反对称性);

(3) $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$(传递性);

(4) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$;

(5) $A\cap A=A, A\cup A=A$(幂等律);

(6) $A\cap U=A, A\cup U=U, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$(同一律);

(7) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing, A\cup(\complement_U A)=U$, $\complement_U(\complement_U A)=A$, $\complement_U U=\varnothing$, $\complement_U\varnothing=U$(互补律);

(8) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C, A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$(结合律);

(9) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律);

(10) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$, $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$(反演律).

5. 差集

(1) 定义:一般地,设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 且不属于 B 的元素组成的集合(图 1.1)叫作集合 A 减集合 B(或集合 A 与集合 B 之差).类似地,对于集合 A,B,我们把集合 $\{x\mid x\in A$,且 $x\notin B\}$ 叫作 A 与 B 的差集,记作 $A-B$,即 $A-B=\{x\mid x\in A$,且 $x\notin B\}$;$B-A=\{x\mid x\in B$,且 $x\notin A\}$ 叫作 B 与 A 的差集.

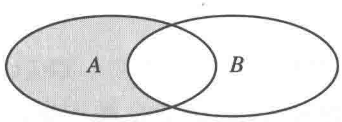


图 1.1

(2) 差集与补集的区别:在补集中,若 B 是 A 的补集,则要求非 B 是 A 的子集;在 $A-B$ 中,非 B 可以不是 A 的子集.

(3) 性质:

① $A-B\subseteq A, A-U=\varnothing, U-A=\complement_U A$($U$ 是全集);

② $A-A=\varnothing, A-\varnothing=A$;

③ $A-B=A-(A\cap B)$;

④ $A\cup(B-A)=A\cup B, A\cap(B-C)=A\cap B-C$.

6. 对称差

对称差相当于两个相对补集的并集,即 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$,或 $A\oplus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B$,或 $x\in B$ 且 $x\notin A\}$.也就是 $A\oplus B$ 表示由在 A 中不在 B 中的元素,或在 B 中不在 A 中的元素组成的集合,如图 1.2 中阴影部分所示.

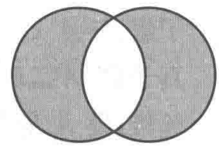


图 1.2

运算性质:

(1) 满足交换律、结合律,且 $A\oplus\varnothing=A, A\oplus A=\varnothing$;

(2) $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$;

(3) $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$.

7. 笛卡儿积

集合 A 与 B 的笛卡儿积是由集合 A 中的一个元素与集合 B 中的一个元素组成的有序对的集合，即 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$. 比如，假设集合 $A=\{a,b\}$，集合 $B=\{0,1,2\}$，则两个集合的笛卡儿积为 $\{(a,0),(a,1),(a,2),(b,0),(b,1),(b,2)\}$.

运算性质：一般来说，笛卡儿积运算不满足交换律、结合律.

(1) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$；

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

(3) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$；

(4) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$；

(5) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.

比如，设 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，则 $A-B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$，$A\oplus B=\{x\mid 0<x\leqslant 1$ 或 $2\leqslant x<3\}$，$A\times B=\{(x,y)\mid 0<x<2,1<y<3\}$.

范例解读

题 1 计算下列各题.

(1) 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,5\}$，则集合 $A\cup B$ 中元素的个数为________.

(2) 设全集 $U=\mathbf{R}$，若集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $A\cap \complement_U B$ = ________.

(3) 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $A=\{2,3,5,6\}$，集合 $B=\{1,3,4,6,7\}$，则集合 $A\cap\complement_U B=$ ( )

A. $\{2,5\}$　　B. $\{3,6\}$　　C. $\{2,5,6\}$　　D. $\{2,3,5,6,8\}$

(4) 已知 $P=\{0,1\}$，$M=\{x\mid x\subseteq P\}$，则 P 与 M 的关系为 ( )

A. $P\in M$　　B. $P\notin M$　　C. $P\subseteq M$　　D. $P\supseteq M$

(5) 设 $A=\{(x,y)\mid |x+1|+(y-2)^2=0\}$，$B=\{-1,2\}$，则必有 ( )

A. $A\supseteq B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $A=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

全解 (1) 由题可知 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，其元素的个数为 5 个.

(2) 由于 $\complement_U B=\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$，故 $A\cap\complement_U B=\{1,4\}$.

(3) 集合 $\complement_U B=\{2,5,8\}$，则 $A\cap\complement_U B=\{2,5\}$. 故选 A.

(4) 由 $M=\{x\mid x\subseteq P\}$ 可知，M 中的元素是集合 P 的子集，所以 $M=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$，显然，$P$ 为 M 中一元素. 故选 A.

(5) 本题学生易错选 C，错因是没有理解集合的概念，误认为 $A=\{-1,2\}$，其实集合 A 是一个点集 $A=\{(-1,2)\}$，而集合 B 是数集，所以 $A\cap B=\varnothing$. 故选 D.

题 2 计算下列各题.

(1) 已知集合 $Z=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2,3,4,5,6\}$.

设 $S_6=\{(a,b)\mid a$ 整除 b 或 b 整除 $a, a\in Z, b\in Y\}$. 令 T_6 表示集合 S_6 所含元素的个数,求 T_6 的值.

(2) 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与 $P=\{v\mid v=20p+16q+12r, p,q,r\in\mathbf{Z}\}$的关系为 ( )

A. $M=P$　　B. $m\not\subseteq P, P\not\subseteq M$

C. $M\subset P$　　D. $M\supset P$

(3) 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. 若 A 的所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$,则集合 $A=$________.

全解 (1) 深刻理解 S_6 与 T_6 的含义,用枚举法解之. S_6 中所含的元素为

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),$$
$$(3,1),(3,3),(3,6).$$

S_6 中共有 13 个元素,故 $T_6=13$.

(2) 对任意 $v_0\in P$,有 $v_0=20p+16q+12r=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p)\in M$,所以 $P\subseteq M$.

同理,对任意 $u_0\in M$,有 $u_0=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in P$,所以 $M\subseteq P$.

因此,$M=P$. 故选 A.

注 集合 M,P 都是用描述法给出的,它们中的元素不可能用列举法列出,于是我们应考虑这两个集合的表达式能否相互转化,进而确定它们之间有无子集和相等关系.

(3) 显然,在集合 A 的所有三元子集中每个元素均出现了 3 次,于是

$$3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15,$$

所以

$$a_1+a_2+a_3+a_4=5.$$

从而,集合 A 的四个元素分别为

$$5-(-1)=6,\quad 5-3=2,\quad 5-5=0,\quad 5-8=-3.$$

因此,集合 $A=\{-3,0,2,6\}$.

题 3 计算下列各题.

(1) 若集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$, $B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,且 $B\subseteq A$,求实数 m 的取值范围.

(2) 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$,求 p 的取值范围.

全解 (1) 因 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,所以

(i) 若 $B\neq\varnothing$,由 $B\subseteq A$,知 $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

(ⅱ) 若 $B=\varnothing$,则 $m+1>2m-1$,即 $m<2$,此时,仍有 $B\subseteq A$.

由(ⅰ),(ⅱ),得 $m\leqslant 3$.

注 本题易出现类似下面的误解:

由 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$ 及 $B\subseteq A$,得$\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5.\end{cases}$求出错解 $-3\leqslant m\leqslant 3$.究其原因,忽略了“空集是任何集合的子集”这一重要性质,而没有考虑到 $B=\varnothing$ 的情况.

(2) 因 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$,故集合 A 有两种可能.

(ⅰ) $A\neq\varnothing$,即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有两个非正解.其充要条件是$\begin{cases}p+2>0,\\\Delta\geqslant 0,\end{cases}$而 $\Delta=(p+2)^2-4=p^2+4p=p(p+4)$,由 $\Delta\geqslant 0$,得 $p\geqslant 0$ 或 $p\leqslant -4$.结合 $p+2>0$,即 $p>-2$,知 p 的取值为 $p\geqslant 0$.

(ⅱ) $A=\varnothing$,即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无解.于是有 $\Delta=(p+2)^2-4<0$,所以 $-4<p<0$.

综上就有 $p>-4$.

注 空集是一个特殊的重要集合,它不含任何元素,是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.显然,空集与任何集合的交集为空集,与任何集合的并集等于这个集合.

题4 计算下列各题.

(1) 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$,则能使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的集合是________.

(2) 已知集合

$$A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a>0\},$$
$$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}.$$

若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,求 a 的值.

(3) 设 $I=\{1,2,3,4\}$,A 与 B 是 I 的子集.若 $A\cap B=\{1,3\}$,则称 (A,B) 为一个“理想配集”.那么符合此条件的“理想配集”的个数是(规定 (A,B) 与 (B,A) 是两个不同的“理想配集”) ( )

A. 4 B. 8 C. 9 D. 16

(4) 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x,y\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2,x,y\in\mathbf{Z}\}$.定义集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\mid(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$,则 $A\oplus B$ 中元素的个数为 ( )

A. 77 B. 49 C. 45 D. 30

(5) 某工作组有 12 名外国人,其中 6 人会说英语,5 人会说法语,5 人会说西班牙语,有 3 人既会说英语又会说法语,有 2 人既会说法语又会说西班牙语,有 2 人既会说西班牙语又会说英语,有 1 人三种语言都会说.那么只会说一种语言的人比一种语言都不会说的

人多 (　　)

A. 1 人　　B. 2 人　　C. 3 人　　D. 5 人

全解　(1) 由 $A\subseteq(A\cap B)$ 可知 $A\subseteq B$(见图 1.3),故有 $\begin{cases}2a+1\geqslant3,\\3a-5\leqslant22,\\3a-5\geqslant2a+1.\end{cases}$ 解得 $6\leqslant a\leqslant9$.

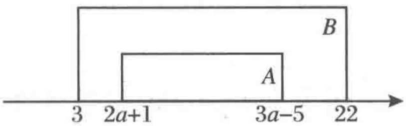


图 1.3

注　借助于维恩图或数轴可以直观地显示出集合与集合之间的关系,使题设更加明确.

(2) 由已知条件,知 $A\cap B$ 只有 8 个元素,我们必须先求出 $A\cap B$ 的具体元素,然后再看当 a 取何值时,这 8 个元素正好构成正八边形.

由集合 A,B,得 $A\cap B=\{(x,y)\mid|x|+|y|=a,|xy|=a-1,a>1\}$. 我们先来求 $A\cap B$ 位于第一象限内的点.

解方程组 $\begin{cases}x+y=a,\\xy=a-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=a-1,\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x=a-1,\\y=1.\end{cases}$

于是得到 $A\cap B$ 在第一象限内的两点 $(1,a-1)$, $(a-1,1)$. 注意到 $A\cap B$ 中表达式都是绝对值方程,第一象限内两点关于 x 轴、原点、y 轴对称的六个点仍然是 $A\cap B$ 的元素,如图 1.4 所示.

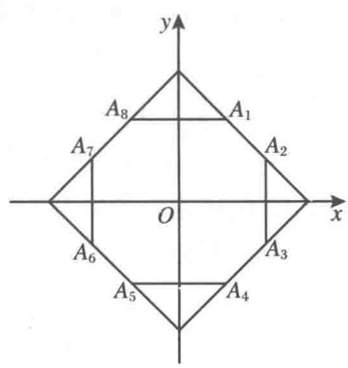


图 1.4

下面来看 a 取何值时,这八个点构成正八边形.

① 若有 $A_1(1,a-1)$, $A_2(a-1,1)$,则有 $A_8(-1,a-1)$,于是得 $2=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}|a-2|$,解得 $a=2+\sqrt{2}$,或 $a=2-\sqrt{2}<1$(舍去).

② 若有 $A_1(a-1,1)$, $A_2(1,a-1)$,则有 $A_8(1-a,1)$,所以 $2(a-1)=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{2}|a-2|$,解得 $a=\sqrt{2}$,或 $a=-\sqrt{2}<0$(舍去).

综上所述,所求 a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

注　数形结合解题方法直观明了,容易入手.

(3) 要使 $A\cap B=\{1,3\}$,则集合 A,B 中必须有 1,3 这两个元素,并且只能有这两个相同元素. 有如下可能:

① $A=\{1,3\}$,则 B 可以为 $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$ 中的任一个,共 4 对;

② $A=\{1,2,3\}$,则 B 可以为 $\{1,3\}$, $\{1,3,4\}$ 中的任一个,共 2 对;

③ $A=\{1,3,4\}$,则 B 可以为 $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$ 中的任一个,共 2 对;

④ $A=\{1,2,3,4\}$,则 B 只能为 $\{1,3\}$.

于是符合条件的"理想配集"的个数为 $4+2+2+1=9$. 故选 C.

(4) 因为集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x,y\in\mathbf{Z}\}$,所以集合 A 中有 5 个元素(即 5 个点),即图 1.5 中圆中的整点;集合 $B=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2,x,y\in\mathbf{Z}\}$ 中有 25 个元素(即 25 个点),即图 1.5 中正方形 $ABCD$ 中的整点;集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\mid(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$中的元素可看作正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中的整点(除去 4 个顶点),即 $7\times 7-4=45$(个).故选 C.

注 出现新定义的题型,除考查集合的相关知识外,意在考查分析能力和转化能力.

(5) 本题我们利用维恩图(图 1.6)来解决.我们知道,三个圈的公共部分表示三种语言都会说的人,有 1 人.根据题意,很容易就把图中各部分的数字标出来,再把图中圈内的人相加得 10,所以三种语言都不会的人就是 $12-10=2$(人),因此答案是 $5-2=3$(人).故选 C.

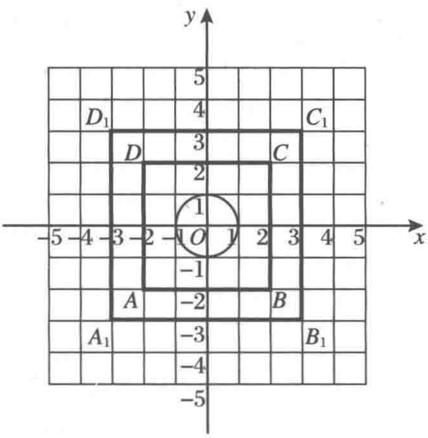


图 1.5

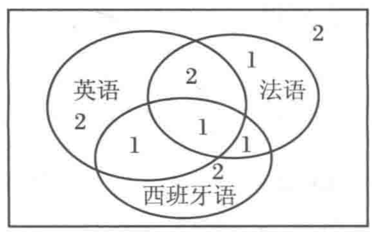


图 1.6

题 5 计算下列各题.

(1) 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$,$N=\{a,aq,aq^2\}$,其中 $a\neq 0$.若 $M=N$,求 q 的值.

(2) 设 $M=\{2,a+b,a-b\}$,$N=\{2,4,10\}$,要使 $M=N$,求 a,b 的值.

(3) 已知集合 $M=\{x\mid x^2=1\}$与集合 $N=\{x\mid ax=1\}$.若 $N\subsetneqq M$,则实数 a 的所有可能值的个数是 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(4) 已知 a,b 为实数,集合 $M=\{a,a^2,ab\}$,$N=\{1,a,b\}$.若 $M=N$,求 $a^{2016}+b^{2016}$的值.

(5) 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$,$B=\{x\mid -x\in A,2-x^2\notin A\}$,则集合 B 中所有元素的和为________.

全解 (1) 因为 $M=N$,所以集合 M 与集合N 含有的元素相同,于是有两种可能:

(ⅰ) $\begin{cases}a+d=aq,\\ a+2d=aq^2;\end{cases}$

（ⅱ）$\begin{cases} a+d=aq^2, \\ a+2d=aq. \end{cases}$

由（ⅰ），得 $q=1$，则有 $a=aq=aq^2$，这与集合元素的互异性矛盾，故舍去.

由（ⅱ），得 $q=-\dfrac{1}{2}$ 或 $q=1$（舍去）.

综上可得 q 的值为 $-\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 M,N 两个集合相等，所以 M,N 中元素相同.

由元素互异性，知 $a+b,a-b$ 都不可能是 2，于是有两种可能：

（ⅰ）$\begin{cases} a+b=4, \\ a-b=10; \end{cases}$

（ⅱ）$\begin{cases} a+b=10, \\ a-b=4. \end{cases}$

由（ⅰ），得 $\begin{cases} a=7, \\ b=-3; \end{cases}$

由（ⅱ），得 $\begin{cases} a=7, \\ b=3. \end{cases}$

综上可得 $\begin{cases} a=7, \\ b=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=7, \\ b=3. \end{cases}$

(3) 由 $M=\{x\mid x^2=1\}$，知 $M=\{-1,1\}$. 由 $N\subsetneqq M$，知 N 可能是 $\varnothing$，$\{-1\}$，$\{1\}$. 而且，当且仅当：$a=0$ 时，$N=\varnothing$；$a=-1$ 时，$N=\{-1\}$；$a=1$ 时，$N=\{1\}$. 故选 D.

(4) 利用集合的无序性解本题.

由于 $a\in M\cap N$，且 $M=N$，所以得

$$\begin{cases} a^2\times ab=1\times b, \\ a^2+ab=1+b, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b(a^3-1)=0, \\ (a-1)(a+b+1)=0. \end{cases}$$

根据集合中元素的互异性，得 $a\neq 0,1$. 所以 $a=-1$，从而 $b=0$. 于是 $a^{2016}+b^{2016}=1$.

(5) 易知 $B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$.

当 $x=-2,-3$ 时，$2-x^2=-2,-7\notin A$；

当 $x=0,-1$ 时，$2-x^2=2,1\in A$.

因此，集合 $B=\{-2,-3\}$.

从而，集合 B 中所有元素的和为 $-2-3=-5$.

思维方法剖释

1. 利用枚举法.

根据集合的表达式,将集合内元素逐个列出,寻找集合之间的关系.

2. 利用集合的运算和性质.

在"知识要点"栏目中列出的概念和性质要牢固掌握,会灵活运用.要特别注意空集是任何集合的子集.解题中不能忽视空集的作用.

3. 利用数形结合.

认清集合的特征,准确地转化为图形关系,借助图形或构建图形使问题直观明了,使解题简洁.维恩图的运用可使交集、并集、补集、差集等知识更易被人们所接受.因此,要重视数形结合的思想方法的运用(如数轴、几何图形、维恩图),见题4.

4. 集合的考查主要有三种方式:一是直接考查概念和运算,以选择题和填空题为主;二是以集合为工具考查集合语言和集合思想的运用,小题目综合化是一种命题趋势;三是在全国高中数学联赛加试中出集合的分类,以及知识板块融合的综合题.

第2节 容 斥 原 理

知识要点

1. 容斥公式

(1) **容斥原理1** 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$为有限集,则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \quad ①$$

公式①中$|A_i|$表示集合 A_i 的元素个数,即$|A_i|=\mathrm{card}(A_i)$,下同.

公式①称为容斥公式或容斥原理.如果公式①中的 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不交,即为加法原理.所以容斥原理是加法原理的推广,它与加法原理的区别在于后者要求 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不交,而前者不受此限制.

容斥原理的含义可解释为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是集合A 中具有性质$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的所有元素组成的集合,则至少具有 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中一种性质的元素个数是

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

当 n 分别取 2,3 时,便得到了容斥公式的简单形式,即以下两个推论.

(2) 两个推论:

推论 1 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$.

推论 2 $|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$.

2. 筛法公式

利用集合运算的反演律$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$及公式$\overline{A}=I-A$($I$ 为全集,$\overline{A}$ 是指 A 的补集,即 $\overline{A}=\complement_I A$),改写公式①即得:

容斥原理 2 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$为有限集 I(全集)的子集,则

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|=\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right|=|I|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$$

$$=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|. \quad ②$$

公式②称为筛法公式,一般用来计算不具有某几个性质中的任何一个性质的元素的个数.

3. 对应与集合计数

利用对应解决计数问题的关键是选择合适的集合 B(便于计数),建立合适的映射关系.

设 $f:A\to B$ 为集合 A 到集合 B 的映射,则:

若 f 为单射,则$|A|\leqslant|B|$.

若 f 为满射,则$|A|\geqslant|B|$.

若 f 为一一映射,则$|A|=|B|$.

若 f 为倍数为 m 的倍数映射,则$|A|=m|B|$.

范例解读

题 1 计算下列各题.

(1) 求 1,2,…,600 中不能被 6 整除的正整数的个数.

(2) 已知集合 $A=\{x\mid x\neq 2n$ 或 $x\neq 3n, n\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{N}, 1\leqslant x\leqslant 1\,000\}$,试求出集合 A 的元素之和.

(3) 某班学生共有 50 人,会游泳的有 27 人,会体操的有 18 人,游泳、体操都不会的有 15 人.那么,既会游泳又会体操的有________.

(4) 某班学生参加数、理、化三科考试,数、理、化优秀的学生依次分别为 30 人、28