

21 世纪应用型本科规划教材

微 积 分

(下册)

主 编 赵 岚 尚海涛 梁海峰



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书按照全国最新财经类本科数学课程教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”，根据面向 21 世纪财经类数学教学内容和课程体系改革的基本精神编写。本教材吸收国内外优秀教材的优点，注重对抽象概念的通俗剖析，强调对常用方法的简洁概括，结构清晰、概念准确、深入浅出、言简意赅。本书对空间直角坐标系与向量运算、多元函数、重积分、曲线与曲面积分、级数等抽象概念着力于通俗地解释，从实例中引入这些抽象概念，将枯燥的概念具体化、通俗化，使学生能够更好地理解。

在应用技术型大学转型背景下，我们在教材中融入数学建模思想，精选现实生活中的一些问题简化成例题，可以更好地培养学生的应用能力和创新能力。本书可作为应用型本科院校各财经类专业“微积分”课程教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目 (C I P) 数据

微积分. 下册 / 赵岚, 尚海涛, 梁海峰主编. — 北京: 中国水利水电出版社, 2017.8
21世纪应用型本科规划教材
ISBN 978-7-5170-5709-3

I. ①微… II. ①赵… ②尚… ③梁… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第188028号

书 名	21 世纪应用型本科规划教材 微积分 (下册) WEIJIFEN
作 者	主 编 赵 岚 尚海涛 梁海峰
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市密东印刷有限公司
规 格	184mm×260mm 16 开本 11.75 印张 279 千字
版 次	2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
印 数	0001—2000 册
定 价	30.00 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支，在经济学的研究中起到很大的作用。自牛顿、莱布尼茨创立微积分以来，经过300多年的发展，其理论体系已很完备。在信息化时代，地方院校应用技术型大学转型背景下，我们从当前微积分教学改革的趋势和学生的需求出发，将数学与现实生活相结合，把教材编得更为通俗、清晰、实用。

我们借鉴美国微积分教学改革坚持的四项原则，即将微积分概念的4个侧面，即图像、数值、符号、语言同时展现给学生，注重用自然语言描述概念，用图像形象地反映概念。这些见解给我们一个启示，将数学建模思想融入教材：精选生活实例从中引入抽象的概念，将枯燥的概念具体化、通俗化，使学生真切地感受到这些定义来自于现实生活，便于培养学生的应用实践能力。

本书以变量为线索，以极限为核心，把微积分的主要概念编织成一个清晰的体系。例如，连续是函数的极限等于函数值；导数是改变量之商的极限；定积分是一元函数特殊和式的极限；重积分是多元函数特殊和式的极限；无穷级数是部分和式的极限。对极限、连续、微分、定积分、重积分、无穷级数等抽象概念着力于通俗地解释，引入具体生活案例，力图使这些抽象概念具体化、通俗化，使学生真切地感到这些定义来源于生活，更好地理解。

本书最大的特点是将数学建模思想融入教材中，将数学和现实生活案例相结合。在导数与微分部分我们引入核弹头大小与爆炸距离模型、飞机的降落模型；在积分部分我们引入标尺的设计模型；在微分方程中引入马尔萨斯人口指数增长模型、放射性元素衰变的数学模型、阻滞增长模型（Logistic模型）；在多元函数微分中融入最佳满意度模型；重积分中融入容器储水量模型等。在教材的附录中我们精选几个典型的数学模型，以供读者更多地了解数学与现实生活案例的关系，感受到数学的魅力，培养数学应用意识。

书中标注“*”的内容为选修内容，习题精选了部分考研试题，习题前括号中的数字是指考研年份。

非常感谢华东交通大学理工学院数学教研室全体教师的努力，特别是梁海峰、尧雪莉、尚海涛、赵岚、赖邦城等老师的倾情付出。

由于编者水平有限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2017年5月

目 录

M U L U

前言

第八章 空间解析几何与向量代数	1
第一节 空间直角坐标系与向量	1
第二节 点积与向量积	9
第三节 曲面及其方程	15
第四节 空间曲线及其方程	22
第五节 平面及其方程	26
第六节 空间直线及其方程	30
总习题八	34
第九章 多元函数及其微分	36
第一节 多元函数的基本概念	36
第二节 偏导数	44
第三节 全微分	48
第四节 多元复合函数的求导法则	52
第五节 隐函数的求导法则	56
第六节 多元函数微分学的几何应用	59
第七节 多元函数的极值	63
总习题九	68
第十章 重积分	71
第一节 二重积分的概念与性质	71
第二节 二重积分的计算法	76
第三节 三重积分	87
总习题十	96
第十一章 无穷级数	99
第一节 常数项级数的概念和性质	99
第二节 正项级数敛散性判别法	104
第三节 任意项级数敛散性判别法	109
第四节 幂级数	112

* 第五节 函数展开成幂级数	118
总习题十一	125
第十二章 微分方程	128
第一节 微分方程的基本概念	128
第二节 可分离变量的微分方程与齐次微分方程	132
第三节 一阶线性微分方程	138
第四节 可降阶的二阶微分方程	141
第五节 二阶常系数线性齐次微分方程	143
第六节 二阶常系数线性非齐次微分方程	148
总习题十二	152
参考文献	155
附录	156
模型七 价格调整模型	156
模型八 人才分配问题模型	156
模型九 森林救火模型	157
模型十 消费者的选择模型	159
模型十一 存储模型	161
模型十二 药物在体内的分布与排除模型	164
模型十三 饮酒驾车模型	167
习题答案	171
11	171
12	171
13	171
14	171
15	171
16	171
17	171
18	171
19	171
20	171
21	171
22	171
23	171
24	171
25	171
26	171
27	171
28	171
29	171
30	171
31	171
32	171
33	171
34	171
35	171
36	171
37	171
38	171
39	171
40	171
41	171
42	171
43	171
44	171
45	171
46	171
47	171
48	171
49	171
50	171
51	171
52	171
53	171
54	171
55	171
56	171
57	171
58	171
59	171
60	171
61	171
62	171
63	171
64	171
65	171
66	171
67	171
68	171
69	171
70	171
71	171
72	171
73	171
74	171
75	171
76	171
77	171
78	171
79	171
80	171
81	171
82	171
83	171
84	171
85	171
86	171
87	171
88	171
89	171
90	171
91	171
92	171
93	171
94	171
95	171
96	171
97	171
98	171
99	171
100	171

第八章 空间解析几何与向量代数

平面解析几何通过建立平面直角坐标系把平面上的点 M 与实数对 (x, y) 对应起来, 即使“形”与“数”对应起来、几何曲线与代数方程对应起来, 从而将几何与代数统一起来.

空间解析几何则通过建立空间直角坐标系, 把空间曲面、空间曲线与代数方程、代数方程组对应起来. 空间解析几何以向量代数作为工具, 分别研究了空间曲面、空间曲线、空间平面和空间直线.

第一节 空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 作为原点, 过点 O 做 3 条互相垂直且有相同单位长度的数轴, 分别称为 x 轴、 y 轴和 z 轴. 通常将 x 轴和 y 轴置于水平面上, z 轴取铅直方向, 3 个坐标轴的次序按右手法则排序: 用右手握住 z 轴, 4 个手指从 x 轴正向旋转 90° 到 y 轴正向时拇指的指向就是 z 轴的正向. 这样建立的空间直角坐标系称为右手系 (图 8-1).

3 条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的 3 个平面统称为坐标面. 如 x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面, 另外两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面, 分别叫作 yOz 面及 zOx 面. 3 个坐标面把空间分成 8 个部分, 每一部分叫作卦限. 含有 x 轴、 y 轴、 z 轴正半轴的那个卦限叫作第一卦限, 其他第二、第三、第四卦限均在 xOy 面的上方, 按逆时针方向确定. 第五至第八卦限在 xOy 面的下方, 由第一卦限之下的第五卦限, 按逆时针方向确定, 这 8 个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示 (图 8-2).

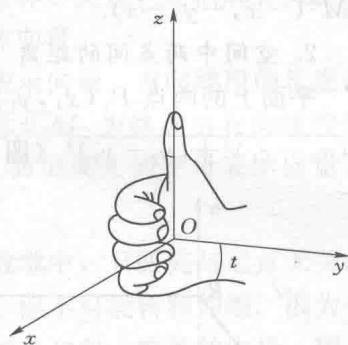


图 8-1

二、空间中点的坐标与两点间的距离

1. 空间中点的坐标

有了空间直角坐标系, 就可以建立空间中的点 M 和有序数组 (x, y, z) 之间的对应关系. 设 M 为空间一已知点, 过点 M 做 3 个平面, 分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴, 它们与

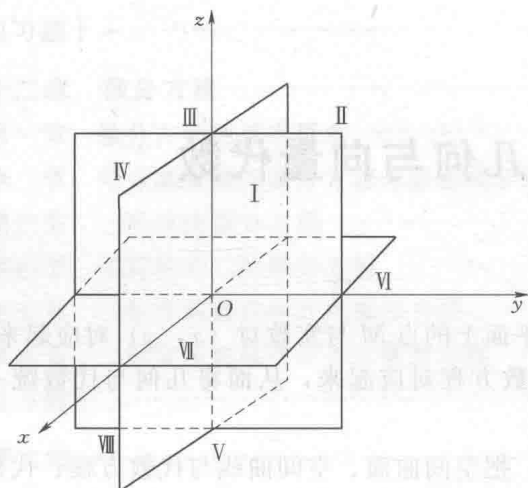


图 8-2

x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P 、 Q 、 R (图 8-3), 这 3 点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 、 z . 于是空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z) ; 反过来, 已知一有序数组 (x, y, z) , 可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 然后通过 P 、 Q 与 R 分别做 x 轴、 y 轴和 z 轴的垂直平面. 这 3 个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x, y, z) 所确定的唯一的点. 这样, 就建立了空间的点 M 和有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系, 这组数 (x, y, z) 就叫做点 M 的坐标, 并依次称 (x, y, z) 为点

M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 (x, y, z) 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$ (图 8-3).

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如, 如果点 M 在 yOz 面上, 则 $x=0$; 同样, 在 zOx 面上的点, $y=0$; 在 xOy 面上的点, $z=0$. 如果点 M 在 x 轴上, 则 $y=z=0$; 同样, 在 y 轴上的点, 有 $z=x=0$; 在 z 轴上的点, 有 $x=y=0$. 如点 M 为原点, 则 $x=y=z=0$.

点 $M(x, y, z)$ 关于 $z=0$ 平面对称点为 $M'(x, y, -z)$, 点 M 关于 x 轴 (即 $y=0$ 平面与 $z=0$ 平面的交线) 的对称点是 $M''(x, -y, -z)$, 点 M 关于原点的对称点是 $M'''(-x, -y, -z)$.

2. 空间中两点间的距离

平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 根据勾股定理, 其距离为 $d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (图 8-4).

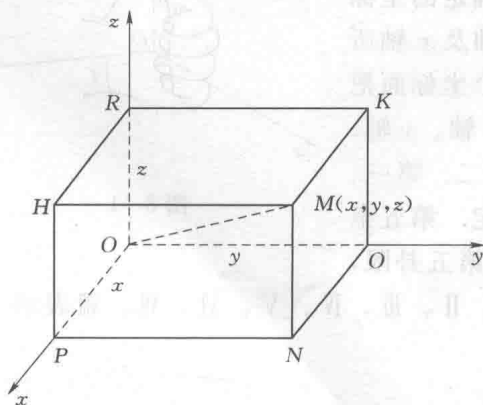


图 8-3

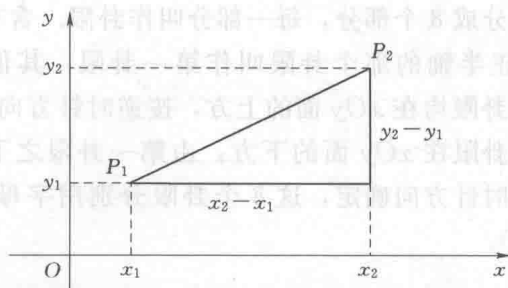


图 8-4

空间中两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 其距离为

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (8-1)$$



特殊地, 原点 $O(0,0,0)$ 到点 $M(x,y,z)$ 的距离为 (图 8-3)

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

【例 8-1】 证明以 $A(4,3,1)$ 、 $B(7,1,2)$ 、 $C(5,2,3)$ 为顶点的三角形 $\triangle ABC$ 是一等腰三角形.

证明 $|AB|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14.$

$$|BC|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6.$$

$$|CA|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6.$$

由于 $|BC| = |CA| = \sqrt{6}$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

【例 8-2】 在 x 轴上求与 $A(-2,1,1)$ 和 $B(0,1,2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 P 在 x 轴上, 所以设该点为 $P(x,0,0)$, 依题意有

$$|PA| = |PB|$$

即

$$\sqrt{(x+2)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2 + (0-2)^2}$$

两边去根号, 解得

$$x = -\frac{1}{4}$$

所以, 所求的点为 $M\left(-\frac{1}{4}, 0, 0\right)$.

三、向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时, 常会遇到这样一类量, 它们既有大小又有方向, 如力、力矩、位移、速度、加速度等, 这一类量叫作向量.

在数学上, 往往用一条有方向的线段, 即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点 M_2 为终点的有向线段所表示的向量, 记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 有时也用一个黑体字母或用一个上面加箭头的字母表示向量, 如 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{F} 或 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{F} 等.

现实中的向量有些与起点有关, 有些与起点无关. 但数学中, 只研究与起点无关的向量, 称为自由向量. 自由向量具有平移不变性, 可以平移, 但不可旋转和伸缩. 因为平移不改变其方向和大小, 但旋转改变方向, 伸缩改变大小. 如遇与起点有关的向量, 则在一般原则下做特殊处理.

以坐标原点 O 为起点, 向一个点 M 引向量 \overrightarrow{OM} , 这个向量叫作点 M 对于点 O 的向径, 常用黑体字 \mathbf{r} 表示. 由于这里只讨论自由向量, 所以如果两个向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的大小相等, 且方向相同, 就说向量 \vec{a} 和 \vec{b} 是相等的, 记作 $\vec{a} = \vec{b}$. 这就是说, 经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫作向量的模. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 \vec{a} 、 \vec{b} 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$. 模等于 1 的向量叫作单位向量. 模等于零的向量叫作零向量, 记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的.



两个非零向量，如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行。向量 \vec{a} 和 \vec{b} 平行，记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 。由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行。

四、向量的线性运算

1. 向量的加减

中学物理学过作为向量的力、速度及其合成。例如，力 \vec{F}_1 与 \vec{F}_2 相加，其合力 \vec{F} 是以 \vec{F}_1 与 \vec{F}_2 为邻边的平行四边形的对角线向量 [图 8-5 (a)]。再如，速度 \vec{v}_1 与 \vec{v}_2 相加，其合速度 \vec{v} 是以 \vec{v}_1 与 \vec{v}_2 为邻边的平行四边形的对角线向量 [图 8-5 (b)]。

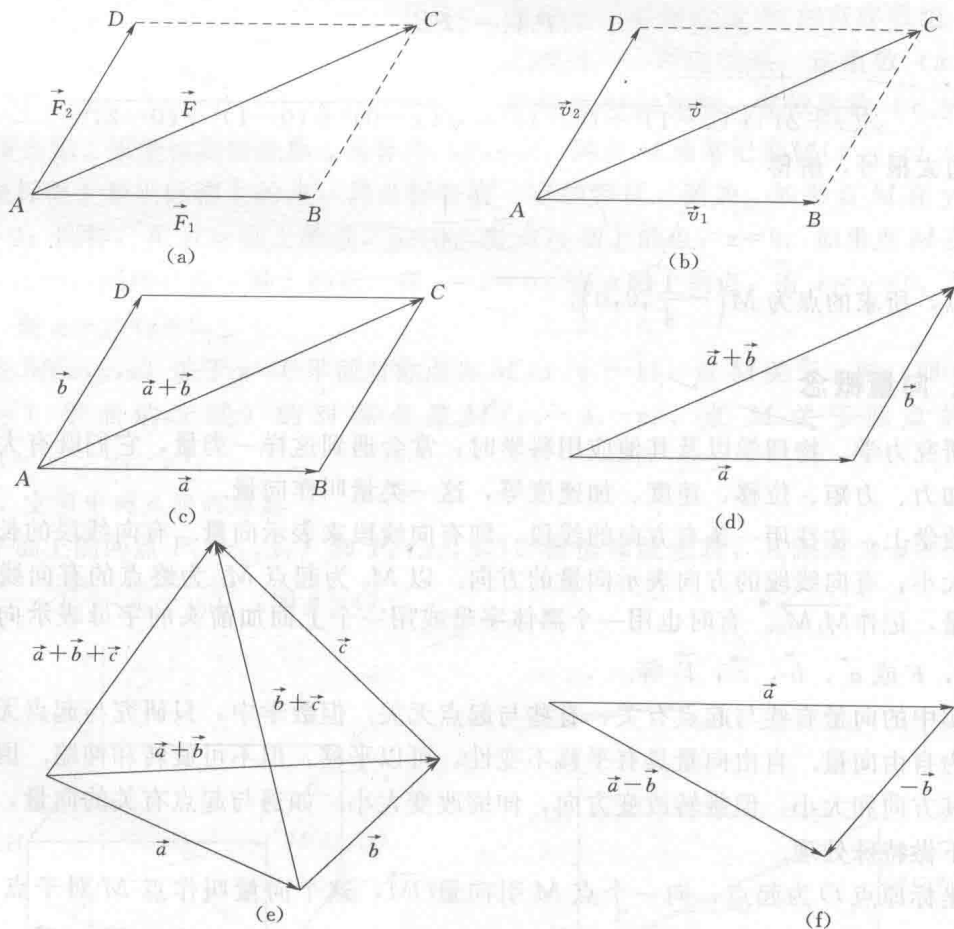


图 8-5

一般地，两个向量 \vec{a} 与 \vec{b} 相加，其和是以 \vec{a} 与 \vec{b} 为邻边的平行四边形的对角线向量 \vec{c} ，即 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ [图 8-5 (c)]。这种求和法则称为向量相加的平行四边形法则。

由于向量可以平移，若把 \vec{b} 的起点平移到 \vec{a} 的终点，则连线 \vec{a} 的起点和 \vec{b} 的终点的向量，也是平行四边形对角线向量 \vec{c} [图 8-5 (d)]，即 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ，这种求向量



法则称为向量相加的三角形法则.

依据三角形法则, 当 3 个向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 首尾相接时, 连接 \vec{a} 的起点和 \vec{c} 的终点的向量即为 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ [图 8-5 (e)]. 一般地, 当 n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 首尾相接时, 连接 \vec{a}_1 的起点和 \vec{a}_n 的终点的向量即为 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$.

向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的差规定为

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

若把 \vec{a} 与 $-\vec{b}$ 首尾相接, 则连接 \vec{a} 的起点和 $-\vec{b}$ 的终点的向量为 $\vec{a} - \vec{b}$ [图 8-5 (f)]. 向量加法满足以下规律.

(1) 交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [图 8-5 (c)].

(2) 结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ [图 8-5 (e)].

2. 数乘向量

实数 λ 与向量 \vec{a} 的乘积是一个向量, 记为 $\lambda\vec{a}$, 其模 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$. 其方向: 当 $\lambda > 0$ 时与 \vec{a} 相同; 当 $\lambda < 0$ 时与 \vec{a} 相反, 也就是说, 非零 λ 乘向量 \vec{a} , 只是把向量 \vec{a} 伸缩 λ 倍, 伸缩前后的向量平行.

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 是零向量, 即 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

数乘向量满足以下规律.

(1) 结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

(2) 分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

向量的加减运算和数乘运算, 统称为向量的线性运算.

【例 8-3】 在平行四边形 $ABCD$ (图 8-6) 中, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. 试用 \vec{a} 和 \vec{b} 表示向量 \overrightarrow{MA} 、 \overrightarrow{MB} 、 \overrightarrow{MC} 、 \overrightarrow{MD} , 其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, 即 $-(\vec{a} + \vec{b}) = 2\overrightarrow{MA}$, 于是 $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

因为 $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$, 所以 $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

又因为 $-\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

按照数乘向量的运算, 与非零向量 \vec{a} 同方向的单位向量 \vec{e}_a 为

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (8-2)$$

显然, $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 故 \vec{e}_a 与 \vec{a} 方向相同, 又因 $|\vec{e}_a| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$, 故 \vec{e}_a 是与 \vec{a} 同方向的单位向量.

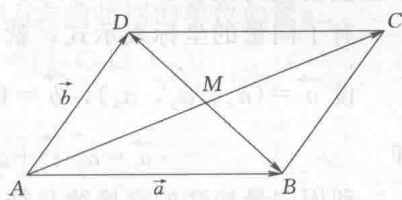


图 8-6



定理 8-1 两个非零向量 \vec{a} 与 \vec{b} 平行的充要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

证明 充分性: 若 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 则 $\lambda > 0$ 时, \vec{b} 与 \vec{a} 方向相同; $\lambda < 0$ 时 \vec{b} 与 \vec{a} 方向相反, 即 $\vec{b} // \vec{a}$.

必要性: 若 $\vec{b} // \vec{a}$, 当 \vec{b} 与 \vec{a} 同向时, 取 $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, 于是有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$; 当 \vec{b} 与 \vec{a} 反向时, 取 $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, 于是有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

唯一性: 若 λ 不唯一, 有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 且 $\vec{b} = \mu \vec{a}$, 两式相减得 $(\lambda - \mu) \vec{a} = \vec{0}$, 即 $|\lambda - \mu| |\vec{a}| = 0$, 因 $|\vec{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$, 也即 λ 唯一.

五、向量的坐标表示式

前面讨论了空间中的点 M 与坐标 (x, y, z) 的一一对应关系. 从讨论中可以看出, 空间中的点 M 与对角线向量 \vec{OM} 一一对应, 从而向量 \vec{OM} 也与坐标 (x, y, z) 一一对应.

设 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的单位向量分别为 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} , 应用向量加法法则, 由图 8-3 有

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PN} + \vec{NM} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

该式称为向量 \vec{OM} 的坐标分解式, $x \vec{i}$ 、 $y \vec{j}$ 、 $z \vec{k}$ 称为向量 \vec{OM} 沿 3 个坐标轴方向的分向量, x 、 y 、 z 称为 \vec{OM} 的坐标, 记为 $\vec{OM} = (x, y, z)$. 不难看出, (x, y, z) 既可以表示空间一点 M , 又可以表示 M 点的位置向量 \vec{OM} (也称向径). 表示点时用 $M(x, y, z)$, 表示位置向量时用 $\vec{OM} = (x, y, z)$.

有了向量的坐标表示式, 就可以将向量的几何运算转化为向量坐标之间的代数运算.

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\text{即 } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

利用向量加法的交换律与结合律及数乘向量的结合律与分配律, 有

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} + (a_z - b_z) \vec{k}$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x) \vec{i} + (\lambda a_y) \vec{j} + (\lambda a_z) \vec{k}$$

即

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$



由此可见,对向量进行加减与数乘,只需对向量各坐标进行相应运算即可.根据定理 8-1,对两个非零向量 \vec{a} 与 \vec{b} , $\vec{b} // \vec{a}$ 相当于 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 即

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

上式相当于

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

即平行向量的对应坐标成比例.当 $a_x = 0$ 时,应理解为

$$b_x = 0, \quad \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

【例 8-4】 设 $\vec{a} = (4, 3, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$, 求 $\vec{a} + 2\vec{b}$.

解 $\vec{a} + 2\vec{b} = (4, 3, 0) + 2(1, -2, 2) = (4, 3, 0) + (2, -4, 4) = (6, -1, 4)$.

六、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\vec{r} = (x, y, z)$, 作 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, 如图 8-3 所示, 有

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设有两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

AB 间的距离为

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

【例 8-5】 已知两点 $A(1, 1, 0)$ 和 $B(2, 1, 1)$, 求与 \overrightarrow{AB} 方向相同的单位向量 \vec{e} .

解 因 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, 1) - (1, 1, 0) = (1, 0, 1)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

所以

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

2. 方向角与方向余弦

非零向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夹角是指不超过 π 的那个角 φ [图 8-7 (a)], 记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 或 $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$, 即 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \varphi$.

非零向量 \vec{r} 与 3 条坐标轴正向的夹角 α 、 β 、 γ 称为向量 \vec{r} 的方向角 [图 8-7 (b)].

$\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 称为向量 \vec{r} 的方向余弦. 显然有

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} \quad (8-3)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



因此, 向量 \vec{r} 的方向余弦就是与 \vec{r} 同方向的单位向量, 即

$$\vec{e}_r = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

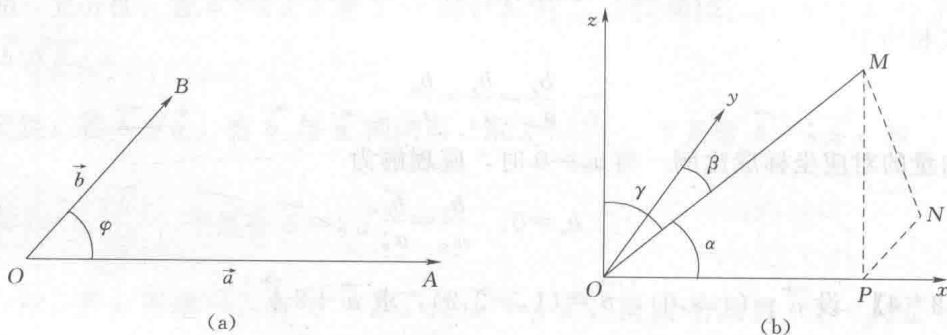


图 8-7

【例 8-6】 已知两点 $A(0, 2, \sqrt{2})$ 和 $B(1, 1, 0)$, 求向量 \overrightarrow{AB} 的方向余弦、方向角及与 \overrightarrow{AB} 同方向的单位向量.

解 因 $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -\sqrt{2})$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$, 所以

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{2\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}$$

与 \overrightarrow{AB} 同方向的单位向量 \vec{e} 为

$$\vec{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(1, -1, -\sqrt{2}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. 点、向量在坐标轴上的投影

当光线垂直照射到直线或平面上时, 几何体投向直线或平面形成的影子, 称为几何体在直线或平面上的投影^①.

求投影可通过从几何体向直线或平面做垂线得到. 设 u 轴由点 O 和单位向量 \vec{e}_u 确定. 过点 M 做 u 轴的垂线 MM' , 则垂足 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影, 用点 M' 的坐标 u 表示 [图 8-8 (a)].

对任给向量 \vec{r} , 作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 在 \vec{r} 与 u 轴决定的平面内过点 M 做 u 轴的垂线 MM' , 设 $\overrightarrow{OM'} = u\vec{e}_u$, 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为 \vec{r} 在 u 轴上的投影, 用 $\overrightarrow{OM'}$ 的坐标 u 表示 [图 8-8 (b)], 记为 $\text{prj}_u \vec{r} = u$ 或 $(\vec{r})_u = u$. 当 $u > 0$ 时, \vec{r} 的投影向量与 u 轴方向相同; 当 $u < 0$ 时, \vec{r} 的投影向量与 u 轴方向相反. 设 \vec{r} 与 u 轴正向的夹角为 θ , 则 $u = |\vec{r}| \cos\theta$.

一般向量 \overrightarrow{AB} 在 u 轴上的投影如图 8-8 (c) 所示.

由投影定义可知, 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 在 3 条坐标轴上的投影分别为 $a_x \vec{i}$ 、 $a_y \vec{j}$ 、

① 本书仅讨论垂直投射形成的投影.

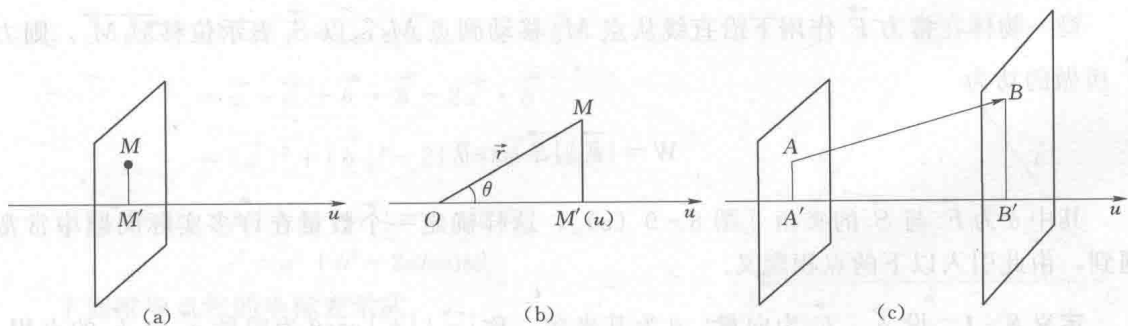


图 8-8

$a_z \vec{k}$, 分别用坐标 a_x, a_y, a_z 表示, 即

$$\text{prj}_x \vec{a} = a_x, \quad \text{prj}_y \vec{a} = a_y, \quad \text{prj}_z \vec{a} = a_z$$

或

$$(\vec{a})_x = a_x, \quad (\vec{a})_y = a_y, \quad (\vec{a})_z = a_z$$

向量的投影具有与坐标相同的性质.

性质 8-1 $(\vec{a})_u = |\vec{a}| \cos \theta$ (θ 为 \vec{a} 与 u 轴正向的夹角).

性质 8-2 $(\vec{a} + \vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u$.

性质 8-3 $(\lambda \vec{a})_u = \lambda (\vec{a})_u$.

习 题 8-1

1. 在 z 轴上求一点 M , 使它与点 $A(-4, 1, 7)$ 、 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.
2. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求其各顶点的坐标.
3. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.
4. 求平行于向量 $\vec{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.
5. 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 试计算 $\overline{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.
6. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 其在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、-4 和 7, 求此向量起点 A 的坐标.
7. 设 $\vec{a} = (3, 5, 8)$ 、 $\vec{b} = (2, -4, -7)$ 、 $\vec{c} = (5, 1, -4)$, 求 $4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ 在 x 轴上的投影和在 y 轴上的分量.

第二节 点积与向量积

一、点积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

点积常用于表示常力做功、证垂直、算夹角、算投影.



设一物体在常力 \vec{F} 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 ，以 \vec{S} 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$ ，则力 \vec{F} 所做的功为

$$W = |\vec{F}| |\vec{S}| \cos\theta$$

其中 θ 为 \vec{F} 与 \vec{S} 的夹角 [图 8-9 (a)]，这样确定一个数量在许多实际问题中常常遇到，由此引入以下的点积定义。

定义 8-1 设 \vec{a} 、 \vec{b} 为向量， θ 为其夹角，称 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$ 为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的点积，记为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ [图 8-9 (b)]，即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \quad (8-4)$$

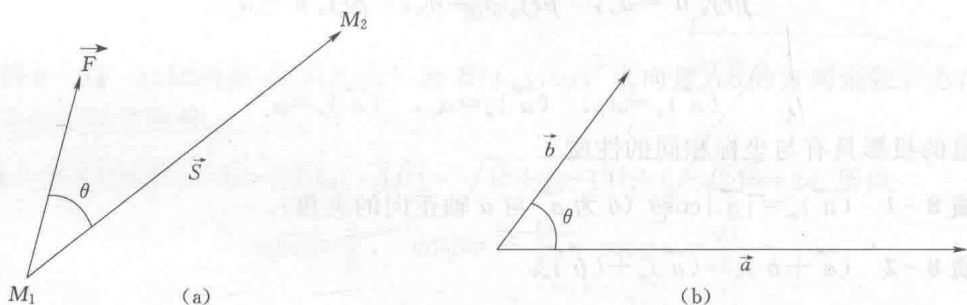


图 8-9

显然，点积的结果是一个数，故点积又称为数量积，也称为内积。

据此定义，上述力所做功 W 是力 \vec{F} 与位移 \vec{S} 的点积，即 $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$ 。

由点积定义可以推出以下几点。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos\theta = |\vec{a}|^2$ 。

(2) 对于两个非零向量 \vec{a} 、 \vec{b} ，其垂直的充要条件是点积为零，即

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(3) \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影 $(\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}| \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ (θ 为 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角)。

点积满足以下运算规律。

(1) 交换律： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 。

(2) 分配律： $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 。

(3) 数乘结合律： $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ 。

【例 8-7】 试用点积证明三角形的余弦定理。

证明 如图 8-10 所示， $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ 。