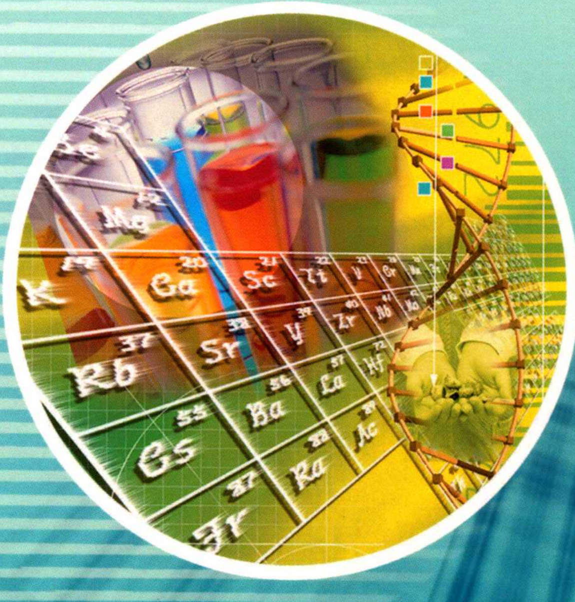
全国高等医药院校配套教材

医学高等数学
学习指导与习题集

◎ 申笑颜　关　理　主编



科学出版社

全国高等医药院校配套教材

医学高等数学
学习指导与习题集

主　编　申笑颜　关　理

副主编　陈　鑫　李慧珍

科学出版社

北　京

内 容 简 介

《医学高等数学学习指导与习题集》是申笑颜等编写的《医学高等数学》的配套学习指导教材.

本书包含函数、极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用；常微分方程等共6章内容，每一章内容均按照原版教材顺序进行编写，包括教学内容及意义、教学基本要求、主要知识归纳与例题分析等部分，对原版教材中的内容进行整理剖析，力求将知识简明化、系统化、典型化，便于学生自学与教师参考.

本书可供高等医药院校作为配套数学教材使用，亦可作为担任数学教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学学习指导与习题集 / 申笑颜，关理主编. —北京：科学出版社，2017.10

全国高等医药院校配套教材

ISBN 978-7-03-048578-6

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①申… ②关… Ⅲ. ①医用数学–医学院校–教学参考资料 Ⅳ. ①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第125145号

责任编辑：王　颖 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：张欣秀 / 封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年10月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2018年 1 月第 二 次印刷 印张：6 1/2

字数：150 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

数学是一切科学的基础，如果只有每周 2～4 学时的课堂学习和一本教材是远远不能达到学习要求的. 本书是“医学高等数学”课程的学习指导用书，配合申笑颜等编写的《医学高等数学》教材，供学习此门课程的医药院校学生与承担此门课程的教师参考使用. 本书以申笑颜等编写的《医学高等数学》为框架，按照理论教材的编写顺序，将本书分为 6 章：函数、极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用；常微分方程. 每章主要涉及以下两大内容，即：

一、本章教学基本要求

明确本章各个知识点的学习要求，简明扼要，一目了然，便于读者自行对照.

二、主要知识归纳及例题分析

主要知识归纳：总结本章出现的基本概念、定理、公式等，便于读者抓住重难点.

例题分析：对本章出现的重难点，从相关文献中精选具有代表性的典型例题，并对例题进行详细深入的分析，使读者开阔视野，举一反三.

本书的编写与出版，旨在帮助读者更快速、更全面地掌握教材中的重难点. 在这里，作者有心提醒各位读者：独立自主的解题是学习的重要环节，如果只是照搬照抄，学习效果将大打折扣。因此，各位读者可以这样使用本书：当独立完成习题后，再对照答案，找出自己的不足之处；当对习题百思不得其解时，可适当参考.

另外，本书提供的典型例题的解法均不具有唯一性，读者可用不同的方法去求解这些问题.

在本书的编写过程中，借鉴了许多的参考文献以及同行们的宝贵经验，在此深表感谢. 同时，鉴于编者水平与经验的局限性，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者与各界同仁批评和指正.

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

本章内容及意义

本章在初等函数的基础上，阐述了函数、极限与连续的概念及其基本的特点. 函数表达了变量之间量与量的相互制约关系，是表达变量间复杂关系的基本数学形式，是高等数学中微积分学研究的主要对象；极限则动态地描绘了变量的变化趋势，是以凌驾于初等数学观点之上的思维与表达方式来研究函数，是微积分学研究中的基本理论与方法；连续则描绘了函数中变量变化的过程及规律. 本章属高等数学中变量研究的基础课程，目的是为一元微积分学的进一步学习奠定基础.

教学基本要求

1. 了解函数的概念，熟悉函数的种类，在掌握基本初等函数特征的基础上，能建立简单实际问题中的函数关系式.

2. 熟悉极限的概念，掌握极限的四则运算法则，掌握运用两个重要极限求极限的基本方法.

3. 了解无穷小、无穷大的概念及其性质，熟悉无穷小的阶的概念，掌握高阶、同阶及等价无穷小的判定方法.

4. 熟悉连续的概念，了解间断点的类型与判定方法，掌握连续函数的四则运算法则，熟悉闭区间上连续函数的性质、介质定理与最大最小值定理的意义.

1.1　函　　数

1.1.1　主要知识点归纳

定义、定理与方法	内容
函数	设 x, y 是同一变化过程中的两个量，D 为给定数集，对于每个量 $x \in D$，都有确定的另一个量、即 y 值与其相对应，这种关系称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，$x \in D$
定义域与值域	定义域是能使函数有意义的所有自变量取值的集合；若在 D 内任取一点 x_0，与其对应的因变量值 y_0 便称为函数值，记为 $y_0 = f(x_0)$；函数值的集合称为函数的值域，记为 R
单调函数	对于函数 $y = f(x)$，若在其定义域的某个区间内任取两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在该区间内单调增加(或减少)，而此区间称为函数的单调增加(或减少)区间. 单调增加与单调减少函数统称为单调函数，单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间
奇函数与偶函数	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，D 关于原点对称，对于 D 内任意一点 x，若均有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数，若均有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数，若函数既非偶函数也非奇函数，则称其为非奇非偶函数. 奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称

续表

定义、定理与方法	内容
复合函数	若变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域一部分中取值时，其所对应的 u 值能使函数 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的复合函数，其中 u 称为中间变量
反函数	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，值域为数集 $\mathbf{R}$，若对于任意一个 $y\in\mathbf{R}$，都有唯一的 $x\in D$，使 $x=f(y)$ 成立，则 y 与 x 的对应关系在 R 上定义了一个新函数，这个新函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$

1.1.2 典型例题分析

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}+\sqrt{1-x^2}$.

解 (1)因 $x-\sqrt{x}\geqslant 0$，故需 $x\geqslant\sqrt{x}$，即 $x\geqslant 1$；又因 $x\geqslant 0$，于是有 D: $x\geqslant 1$ 及 $x=0$.

(2)因 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$ 且 $1+x\neq 0$，又因 $1-x^2\geqslant 0$，可得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 及 $-1\leqslant x\leqslant 1$，于是有 D: $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$.

例 2 判断函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 的奇偶性.

解 据奇函数的定义，需证明 $f(-x)=-f(x)$；于是

$$f(-x)=\ln\left[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right]=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-f(x),$$

故可得函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 为奇函数.

例 3 分解复合函数 $y=\arcsin\left[\ln(x-1)\right]$ 并求其定义域.

解 设 $u=\ln(x-1)$，$v=x-1$，于是 $y=\arcsin\left[\ln(x-1)\right]$ 由 $y=\arcsin u$，$u=\ln v$ 及 $v=x-1$ 复合而成；为使 $y=\arcsin u$ 及 $u=\ln v$ 有意义，需同时有 $-1\leqslant\ln(x-1)\leqslant 1$ 及 $x-1>0$；对于 $-1\leqslant\ln(x-1)\leqslant 1$，因相当于 $-\ln e\leqslant\ln(x-1)\leqslant\ln e$，则有 $e^{-1}<x-1<e$，即 $1+e^{-1}<x<e+1$，综合 $x-1>0$ 后，可得复合函数 $y=\arcsin\left[\ln(x-1)\right]$ 的定义域即为 $1+e^{-1}<x<e+1$.

例 4 求函数 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数及其定义域.

解 由于原函数 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$ 中有 $x\neq -1$，且 $-1<\sin\dfrac{x-1}{x+1}<1$，可知其值域为 $-1\leqslant y\leqslant 3$；于是由函数及其反函数间值域与定义域的置换关系，可知原函数的反函数的定义域为 $-1\leqslant y\leqslant 3$，值域为 $x\neq -1$.

又将原函数变形为 $\dfrac{y-1}{2}=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$，可得 $\arcsin\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{x-1}{x+1}$，整理后，其反函数即为 $x=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{y-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$，习惯写作 $y=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$.

1.2　极　　限

1.2.1　主要知识点归纳

定义、定理与方法	内容
极限	当函数中自变量 x 的取值无限增大时，函数 $f(x)$ 值无限地趋近于一个常数，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，当自变量 x 无限地趋近于点 x_0 $(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ 当 $x\to x_0$
极限的四则运算法则	设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量同一变化过程中的极限分别为 A 和 B，则 (1) $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$ (2) $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；特别地， $\lim\left[Cf(x)\right]=C\lim f(x)\ =CA$ （C为常数）， $\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n=A^n$ （n为正整数） (3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq 0)$

1.2.2　典型例题分析

例 1　计算极限 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{2x-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{4}{3}.$$

例 2　计算极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x-1\to 0}(1-x)\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x-1\to 0}(1-x)\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}x\right)}$

$$=\lim_{x-1\to 0}\frac{\pi}{2}(1-x)\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{2}{\pi}.$$

例 3 计算极限 $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{1}{x-e}\ln\dfrac{x}{e}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{1}{x-e}\ln\dfrac{x}{e}\right)=\lim\limits_{x-e\to 0}\ln\dfrac{x^{\frac{1}{x-e}}}{e}=\ln\lim\limits_{x-e\to 0}\left(\dfrac{x-e+e}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim\limits_{x-e\to 0}\left(1+\dfrac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\frac{1}{e}}$

$$=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}.$$

1.3 无穷小量和无穷大量

1.3.1 主要知识点归纳

定义、定理与方法	内容
无穷小	当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时的无穷小量，简称无穷小
无穷小量的阶	无穷小量趋于零速度的快慢. 设 $\alpha=\alpha(x)$， $\beta=\beta(x)$ 是自变量在同一变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)的两个无穷小量，且 $\beta\neq 0$ ， (1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ ，则 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$. (2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k$ (k 为常数且不为零)，则 α 是 β 的同阶无穷小. (3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ ，则称 α 是 β 的等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$ 或 $\beta\sim\alpha$
无穷大	$x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时的**无穷大量**，简称无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

1.3.2 典型例题分析

例 1 当 $x\to 1$ 时，无穷小量 $1-x$ 与 $1-x^3$ ， $\dfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)$ 是否同阶，是否等价?

解 据题意，即求无穷小量之比的极限，即当 $x\to 1$ 时，

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x+x^2}=\dfrac{1}{3}$ ，则得 $1-x$ 与 $1-x^3$ 为同阶无穷小；

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1+x}=1$ ，则得 $1-x$ 与 $1-x^3$ 为等价无穷小.

1.4　连续函数及其性质

1.4.1　主要知识点归纳

定义、定理与方法	内容
增量	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有任一改变量 Δx（即 $x=x_0+\Delta x$），因变量也相应地取得一个改变量 Δy（即 $y=y_0+\Delta y$），则称函数在点 x_0 处有一个增量，记作 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$
连续	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，若 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y=0$，即称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 为函数的连续点
间断点	若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称此函数在点 x_0 处间断，点 x_0 即为此函数的间断点
连续函数的四则运算	若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处均连续，则它们的四则运算 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ 也在该点连续
反函数的连续	如果函数 $y=f(x)$ 在某区间 D 上呈连续且严格的单调递增(或递减)，则其反函数 $x=\phi(y)$ 在对应区间 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 上也必呈连续且严格的单调递增(或递减)
复合函数的连续	若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，又函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，则复合函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 在 x_0 点连续
最值定理	闭区间上的连续函数在该区间上必有最大最小值.
介值定理	设函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在二端点处取不同值，即 $f(a)=A$，$f(b)=B$ $(A\neq B)$，则对介于 A 与 B 之间的任何值 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$　$(a<\xi<b)$
根的存在定理	设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在函数的一个点 ξ，使 $f(\xi)=0$　$(a<\xi<b)$

1.4.2　典型例题分析

例 1　已知 a 和 b 是非零常数，函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\\ \dfrac{\sin ax}{bx}, & x<0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求 a 和 b 的值.

解　由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，可知必有

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=\mathrm{e}\,;$$

又因

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{ax}\cdot a}=\mathrm{e}^a\,,$$

且

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to0^+}\frac{a\cos ax}{b}=\frac{a}{b},$$

则由 $e^a=\frac{a}{b}=e$，可得 $a=1$，$b=\frac{1}{e}$.

例 2 判断下列函数间断点的类型：

(1) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x-4)(x-2)}$.

解 (1) 由 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，可知函数间断点为 x=0；于是当 x=0，

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^-}\frac{2^{-\infty}-1}{2^{-\infty}+1}=-1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=\frac{1-\frac{1}{2^{\infty}}}{1+\frac{1}{2^{\infty}}}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x),$$

故 x =0 为函数的跳跃间断点.

(2) 由 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x-4)(x-2)}$，知有 $x\neq1$，$x\neq2$，$x\neq4$ 及 $x\leqslant3$，则函数定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,3]$，其间断点为 x=1，x=2；当 x=1，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$；当 x=2，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$；知此函数间断点都为无穷间断点.

例 3 试证明 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内至少有一个根.

解 设 $f(x)=\sin x+x+1$，因 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内为连续函数，且

$$f(-\pi)=\sin(-\pi)+(-\pi)+1=-\pi+1<0,\quad f(\pi)=\sin\pi+\pi+1=\pi+1>0,$$

则由介值定理，知至少存在一点 $\xi\in(-\pi,\pi)$ 使 $f(\xi)=0$，也即 $\sin x+x+1=0$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内至少有一个根.

习题 1　答案与解析

1. 求函数的定义域：

(1) $y=\arctan(x-3)$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=x+\sqrt{\cos\pi x-1}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

解 (1) $x\in(-\infty,+\infty)$.　　(2) $-1<x<1$.

(3) $D=\{x\,|\,x=2k,k=0,\pm1,\cdots\}$.　　(4) x<0.

2. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数也非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=2x^2-x^2$；

(3) $y=x(x-1)(x+1)$；　(4) $y=\sin x-\cos x+1$.

解 (1) 偶函数.　(2) 偶函数.

(3) 奇函数.　(4) 非奇非偶函数.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ -1, & x>0;\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e} & |x|\leqslant 1,\\ \mathrm{e}^{-1} & |x|>1.\end{cases}$

4. 写出下列函数的复合函数，并求复合函数的定义域：

(1) $y=\mathrm{e}^t, t=u^2, u=\sin x$；　(2) $y=\sin u, u=x\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}$；

(3) $y=\sqrt[3]{u}, u=\cos v, v=\mathrm{e}^w, w=-x^{-1}$；　(4) $y=\sin u, u=\tan v, v=x^2+x-1$

解 (1) $y=\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^{u^2}=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\sin u=\sin\left(x\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=\sqrt[3]{\cos v}=\sqrt[3]{\cos e^w}=\sqrt[3]{\cos\left(\mathrm{e}^{-x^{-1}}\right)}$，$x\neq 0$.

(4) $y=\sin\tan v=\sin\tan\left(x^2+x-1\right)$，$x\neq\pm\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{\pi}{2}+k\pi}-\frac{1}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

5. 分解下列复合函数：

(1) $y=\mathrm{e}^{\arcsin 3x}$；　(2) $y=\sqrt{\sin^3(x+1)}$；

(3) $y=\sqrt{\arccos\lg(x-1)}$；　(4) $y=\lg\left[\cos\left(x^2-\arcsin x\right)\right]$；

(5) $y=\arctan\left(\frac{x}{a}-1\right)^2$；　(6) $y=\sqrt{\ln\frac{x+1}{x-1}}$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^u, u=\arcsin v, v=3x$.　(2) $y=u^{\frac{3}{2}}, u=\sin v, v=x+1$.

(3) $y=\sqrt{u}, u=\arccos v, v=\lg w, w=x-1$.　(4) $y=\lg u, u=\cos v, v=x^2-\arcsin x$.

(5) $y=\arctan u, u=v^2, v=\frac{x}{a}-1$.　(6) $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\frac{x+1}{x-1}$.

6. 求下列函数的反函数，并求反函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$，$x\in[0,+\infty)$；　(2) $y=1+\lg(x-1)$；

(3) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$　(4) $y=\ln\left(\sqrt{1+x^2-x}\right)$.

解 (1) 因 $x^2=y^2-1$ 且 $x\in[0,+\infty)$，故 $x=\sqrt{y^2-1}$，$y\in[1,+\infty)$.

(2) 因 $\lg(x-1)=y-1$，故 $10^{y-1}=x-1$，即 $x=10^{y-1}+1$，$y\in\mathrm{R}$.

(3) 设 $y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，则 $\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)y-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，整理后得 $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x}=\frac{1-y}{1+y}$，两边取自然对数，则 $-2x=\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$，故 $x=\ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$，$-1<y<1$.

(4) 两边取对数，得 $e^y=\sqrt{1+x^2}-x$，整理后为 $e^{2y}+2xe^y=1$，得 $x=\dfrac{1-e^{2y}}{2e^y}$， $y\in R$.

7. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1.$$

(4) x^2 为无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，二者乘积仍为无穷小量，故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$.

(5) $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量，$\arctan x$ 为有界函数，二者乘积仍为无穷小量，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

8. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^3-x^2-2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x-1\to 0}\dfrac{(1+x)(1-x)}{\sin\left[(\pi x-\pi)+\pi\right]}=\lim\limits_{x-1\to 0}\dfrac{-(1+x)(x-1)}{\sin\left[\pi(x-1)\right]\cos\pi+\cos\left[\pi(x-1)\right]\sin\pi}$

$$=\lim_{x-1\to 0}\frac{-\pi(x-1)(1+x)}{\pi[\sin\pi(x-1)\cos\pi+\cos\pi(x-1)\sin\pi]}=\lim_{x-1\to 0}\frac{-\pi(x-1)(1+x)}{\pi\sin\pi(x-1)\cos\pi}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{\pi\cos\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x/\frac{\pi}{2}\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x/\frac{\pi}{2}\to 0}\dfrac{-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=-1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^3-x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x(x^2-x-2)\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x^2-x-2)\cos x}=-\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(1-2\sin^2\dfrac{1}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[1-2\cdot\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2\dfrac{\sin^2\dfrac{1}{2x}}{\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

9. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+6}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{(-3)\frac{1}{-3x}}=\mathrm{e}^{-3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^{\frac{\cos^2 x}{3\sin^2 x}\cdot 3}=\mathrm{e}^3$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}=\mathrm{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{x}{2}}{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{(-x)(-1)+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-1}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^6=\mathrm{e}^{-1}$.

10. 用无穷小量代换求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a}{x-a}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan t}{t}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot\arctan x}{2x^2}$.

解 (1) 利用无穷小量代换，当 $x\to 0$，$e^x-1\sim x$，即当 $x-a\to 0$，$e^{x-a}-1\sim x-a$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{e^a\left(e^{x-a}-1\right)}{x-a}=e^a$.

(2) 利用无穷小量代换，当 $x\to 0$，$\sin 2x\sim 2x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{(2x)^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{8x\cdot x^2\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{8x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{8\cdot 4\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos x}=\frac{1}{16}.$$

(3) 利用无穷小量代换，当 $x\to 0$，$\arctan t\sim\tan t$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\cos t}=1.$$

(4) 利用无穷小量代换，当 $x\to 0$，$\tan 2x\sim 2x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 4\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=8.$$

(5) 利用无穷小量代换，当 $x\to 0$，$\tan 5x\sim 5x$，$\sin 3x\sim 3x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-1+1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

(6) 利用无穷小量代换，当 $x\to 0$，$\arcsin x\sim\arctan x\sim x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x\cdot\arctan x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x\ln x, & 0<x<1,\\ \dfrac{\ln x}{x}, & 1<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x\ln x=\ln\lim\limits_{x\to^{-1}}1^1=0$；$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x^{\frac{1}{x}}=0$；故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

12. 已知静脉注射某药达 n 次后，血药浓度的最高水平和最低水平分别为

$$C_{\max}=\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r},\quad C_{\min}=\frac{ar\left(1-r^n\right)}{1-r};$$

其中 $r=e^{-kt}$，a，k 和 T 均为正常数. 试求 $n\to\infty$ 时 $C_{\max}$ 和 $C_{\min}$ 的极限；若临床上血药浓度达到稳定状态(即达到极限浓度)时最高血药浓度和最低血药浓度分别为 α 和 β，问 a 和 T

应取何值?

解　因 $\lim\limits_{n\to\infty}C_{\max}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-\mathrm{e}^{-kTn})}{1-\mathrm{e}^{-kT}}=\dfrac{a}{1-\mathrm{e}^{-kT}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}C_{\min}=\dfrac{ar(1-r^n)}{1-r}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ar(1-\mathrm{e}^{-kTn})}{1-\mathrm{e}^{-kT}}=\dfrac{ar}{1-\mathrm{e}^{-kT}}$，据题意，有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\alpha,\\ \dfrac{ar}{1-r}=\beta,\end{cases}$$

于是,

$$(1-r)\alpha=\frac{(1-r)\beta}{r},$$

整理得 $\alpha r=\beta$，再代入上述方程组后，可得 $a=\alpha-\beta$；又因 $r=\mathrm{e}^{-kT}$，即 $\dfrac{\beta}{\alpha}=\mathrm{e}^{-kT}$，可得 $T=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.

13. 下列函数哪个是无穷大量，哪个是无穷小量：

(1) $x\sin\dfrac{1}{x}(x\to0)$；　　(2) $\dfrac{1-\cos x}{x}(x\to0)$；

(3) $x^2-100x+1(x\to\infty)$；　　(4) $\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}(x\to2)$.

解　(1) 由 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，得函数当 $x\to0$ 时为无穷小量.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2}=0$，得函数当 $x\to0$ 时为无穷小量.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-100x+1\right)=+\infty$，得函数当 $x\to\infty$ 时为无穷大量.

(4) 由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=+\infty$，得函数当 $x\to2$ 时为无穷大量.

14. 当 $x\to0$ 时，无穷小量 x 与下列无穷小量是否同阶，是否等价?

(1) $\arctan x$；　　(2) $\csc x-\cot x$；

(3) $x^4+\sin2x$；　　(4) $\dfrac{2}{\pi}\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right]$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\tan(\arctan x)}=\lim\limits_{\arctan x\to0}\dfrac{\cos(\arctan x)\cdot\arctan x}{\sin(\arctan x)}=1$,

故当 $x\to0$ 时，$\arctan x$ 与 x 为等价无穷小；

无穷小量代换，当 $x\to0$ 时，$\arctan x\sim x$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$，同样得上述结论.