人类

符号简史

[美] 约瑟夫·马祖尔 著

洪万生 洪赞天 英家铭 黄俊玮 黄美伦 郑宜瑾 译

接力出版社
Publishing House
全国百佳图书出版单位
Top 100 Publishing Houses in China

人类
符号简史

RENLEI FUHAO JIANSHI

[美]约瑟夫·马祖尔 著

洪万生 洪赞天 英家铭 黄俊玮 黄美伦 郑宜瑾 译

π

接力出版社
Publishing House

桂图登字：20-2016-304

图书在版编目（CIP）数据

人类符号简史 /（美）约瑟夫·马祖尔著；洪万生等译 .—南宁 : 接力出版社 , 2018.5
书名原文 : Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers
ISBN 978-7-5448-5222-7

Ⅰ . ①人…　Ⅱ . ①约…　②洪…　Ⅲ . ①社会科学—通俗读物　Ⅳ . ① C49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 302624 号

责任编辑：张慧芳　文字编辑：刘盛楠　美术编辑：许继云　装帧设计：许继云
责任校对：刘艳慧　高　雅　责任监印：刘　冬　版权联络：王燕超
社长：黄　俭　总编辑：白　冰
出版发行：接力出版社　社址：广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022
电话：010 - 65546561（发行部）　传真：010 - 65545210（发行部）
http://www.jielibj.com　E - mail:jieli@jielibook.com
经销：新华书店　印制：北京鑫丰华彩印有限公司
开本：710毫米 × 1000毫米　1/16　印张：15.75　字数：255千字
版次：2018年5月第1版　印次：2018年5月第1次印刷
印数：00 001—13 000册　定价：42.00元

献给我的大哥巴瑞
他从 0 开始教导我

∞

导言

一位数学家、一位音乐家和一位心理学家走进一家酒吧……

几年前，我还压根儿没想过自己会写一本关于符号史的书，那时我与一些同事在科莫湖边贝拉焦村的一家小酒吧，曾有过一段对话。那位心理学家声称，符号在人类发展出语言之前早已存在多时，而这些符号来源于人类最基本且原始的思想。那位音乐家则指出，现代乐谱主要源于生活在第一个千禧年之交的本笃会修士吉多·阿雷佐（Guido d'Arezzo），但一种更原始的符号记谱形式几乎可追溯至腓尼基人的手稿。而我，就是那位数学家，我接下来说的事让我的朋友们大吃一惊。我告诉他们，除了数字之外，数学符号——甚至代数方程式——都是近代的发明，几乎所有数学式在15世纪末之前都是以文字（vhetorical）表述的。

“什么？”心理学家大吼说，“那乘法运算呢？你是要告诉我们没有用来表示‘相乘’的符号？”

“16世纪之前没有……也许17世纪之前都没有。”

“那么等式呢？‘等于’符号是何时出现的？”音乐家问道。

“不早于……16世纪。”

“但是欧几里得无疑使用了‘加’的符号。”心理学家说，“那毕达哥拉斯定理呢？这个定理涉及了直角三角形的边长平方相加。”

“不……12世纪之前没有表示‘加’的符号！”

当我们品味着昂贵的巴罗洛红酒时，现场陷入一阵沉默。

后来证明，我的说法并不正确。更久远之前，早在公元前18世纪，埃及人便使用了表示加和减的象形文字，以人们靠近或远离的图形，分别代表数量的加或减。而不时地，数学著作的作者大胆利用符号来作为表达的媒介。因此，从许多例证可以看出，他们尝试以图形记号来表示文字甚至整个短语。4世纪，巴赫沙里手稿（*Bakhshâlî* manuscript）中用看起来像现代加号的符号

来记录负数。3 世纪，亚历山大的丢番图（Diophantus of Alexandria）使用一个希腊字母来表示未知数，并利用类似朝上的箭头符号来代表减。7 世纪，印度数学家婆罗门笈多（Brahmagupta）使用小黑圆点，代表我们现在称作“零”的这个新数字。到了 15 世纪下半叶，现代的符号才开始羞怯地进入数学的世界。当然，长久以来，人类用以表示整数的符号一直存在。

在小酒吧那一晚，我没意识到自己估算符号使用的时间应该再早几个世纪。可以确定的是，丢番图在 3 世纪已用了一些他自己的表示方式。然而，12 世纪之前，符号并未在符号化的层次上进行运算，也即方程式的运算不是纯符号式的。或许我该宣称，正确的说法是，在 16 世纪之前**大部分**数学式都是以文字表述的，好让大家更加惊讶。

自从那次谈话之后，我发现绝大多数人对于 16 世纪之前的数学记法不是真正的符号这件事，感到非常惊奇。我们也想知道，以符号的形式来讨论代数，有什么样的好处？又有什么不足呢？

追溯符号的根源，可知它们是一种借由从事物外观或信息传递中抽象出来的模式与结构，来理解、认识与创造意义的手段。

symbol（符号）这个词来自希腊文里代表 token（象征）或 token of identity（身份的象征）之义的词，它结合了两个词根：*sum*（一起）和动词 *ballo*（丢掷）。对“符号”一词较宽松的诠释是“放在一起”。它的词源来自一种古老的证明方式，证明某人身份或某人与他人之间的关系。一根木棒或骨头被劈成两半，有关联的两人各取其半。为了核证这个关系，这两半必须完美地契合。

再从更深的层次来看，“符号”一词意味着，当熟悉的事物与不熟悉的事物被放在一起时，会创造出某种新事物。换句话说，当一个无意识的想法与有意识的想法契合时，新的意义浮现出来。更确切地说，符号是连接有意识与无意识的想法时所得出的意义。

数学符号真能达到这样的目的吗？它们真的必然满足上述关系吗？或许符号与记法之间存在一种差异。记法来自速记，让词语简略。如果将符号视作为我们提供潜意识思考的记法，想想“+”的情况。这只是一个记法，起初源自拉丁文 *et* 的速记。是的，它来自 *et* 中的 t。1489 年，我们在约翰内斯·威德曼（Johannes Widmann）的著作《各种职业中快速且工整的计算》

(*Behende und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*)中发现这个记法。它指一种数学运算，如同 and 这个词。

“+”被用于诸如 $2+3=5$ 的算术表达中，仅告诉我们 2 与 3 之和记作 5。但在代数表达里，例如 $x^2+2xy+y^2$，它的意思不单是“x^2 与 $2xy$ 与 y^2”。数学家将“+”视为形成完全平方式 $(x+y)^2$ 的黏合剂。现在可以确定的是，数学家同样将 and 视为一种黏合剂。或许要花一点时间才能看出上述完全平方式，但当我们注视着某物时，心里知道它有另一种更有用的形式，熟悉的符号总是为我们提供有用的关联。

一种力求纯正的方法，能够区分出符号表示与简单记法之间的差异。我抱有一种更宽容的个人观点，数字与所有非文字形式的操作性记法是不同的，但它们同样被视为符号，因为它们代表与它们本身不相似的事物。

再读一次 $2+3=5$ 这个算术表达。在数学上，这是一个完美的句子，有名词、连词和动词。只需一秒钟，你便能读懂它并继续往下读了。即便没有察觉到自己的事实查核过程，你仍基于许多理由相信它是对的，当你还是小孩子时就被告知这件事，最终在经年累月接收了大量确凿的证据后，无须再有意识地彻底搜寻你头脑里贮存确定事实的图书馆，便能**知晓**它是正确的。

然而，对于符号的使用技术，作家与数学家之间的差异显而易见。作家为了煽动情绪或利用个人生命旅程中所领悟的种种意义来营造深入人心的情境，会自由自在地使用符号，即使使用方式与生活经验矛盾；相反，数学家除了归谬法的论证模式必须通过导出矛盾来建立整个证明体系之外，不能构成矛盾。数学符号具有明确的基本目的：为了便于理解，严谨地包装复杂的信息。

相较于数学家，作家拥有更多自由。文学上使用的符号可能受到神话和文化的羁绊，但它们以许多不同的方式被使用。艾米莉·狄金森（Emily Dickinson）在她的诗作《一个瘦长的家伙在草地》(*A Narrow Fellow in the Grass*)中，未曾使用“蛇”这个词，以避免这个词直接连接到邪恶、鬼祟和危险，尽管蕴意是一样的。约瑟夫·康拉德（Joseph Conrad）在他的著作《黑暗之心》(*Heart of Darkness*)中，将刚果河描述为“一条伸开身子的巨蛇，将头探进大海”，唤起了关于狡猾和鬼祟的言外之意。一个作家也可能无意中使用“蛇”这个词，却绝非意指某个事物属意料之外、诡诈或危险。它可能

只是一种描述方式，正如“河流像一条蛇般蜿蜒”的描写手法一样。作家也许是试图唤起一种与其文化内涵无关的意象。总是使用比喻手法来表达其实很难——或许是不可能的。

数学家会使用一种叫作“蛇引理”（snake lemma）的引理（一个小定理，用来证明主要定理的垫脚石），它涉及一种被称为“蛇图”（snake diagram）的图形——它并非意指其中存在任何邪恶、狡猾或危险的事物，而是指图形的样子看起来就像一条蛇，这同样只是一种形象的描述。

人造的数学符号，与音乐旋律中可变的、带有情绪的符号，或者诗歌中隐喻的符号，有所不同。然而，有些符号仍容易唤起潜意识中清晰聚焦的知觉和连接。符号也可能传递隐喻的思想，能够凭借相似（similarity）、类比（analogy）和貌似（resemblance）来传达意义，如同纸上的文字一样。

阅读代数式时，富有经验的数学头脑可以在极短的神经传导时间里，跨越广大无边的连接。

以每个儿童都学过的符号 π 为例。作为一个符号，它是思想的一种感官表达，这些思想通过关联而唤醒了相关暗示。在定义上，它指一个特定的比，即圆的周长除以其直径。作为一个数字，它大约等于3.14159。它可以化身为许多不同的形式。举例来说，它可以用无穷数列来呈现：

$$\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cdots$$

或是无穷乘积：

$$\pi=2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

或是无穷连分数：

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cdots}}}}$$

它经常出现在分析学和数值计算领域。当人们在一个方程式中发现 π，机智的读者会自动想到某种与圆有关的事物潜藏在其后。因此，这个符号

（当然是指现代的形式）不会愚弄那个早已熟悉它的各种伪装的数学家，因为早已了解这个符号，头脑中会下意识地浮现出它的意义。

下面是 π 的另一种伪装：设想一条河流，它受平缓坡度的影响，在均匀的易受侵蚀的沙地上流淌。理论上可预测，随着时间的流逝，河流的真正长度，除以起始点与终点之间的直线距离，将会趋近于 π。如果你猜想这与圆有关，你猜对了。

物理学家尤金·维格纳（Eugene Wigner）在他著名的文章《数学在自然科学中不合理的有效性》（*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*）里，讲述了一个生动的故事：一个统计学家尝试解释一本使用高斯分布来研究人口趋势的再版书中各个符号的意义。“那这里这个符号是什么？”一位朋友问道。

“哦！”统计学家说，“那是 π。”

“π 是什么？”

“圆周长与圆直径的比。”

“嗯，可是人口确定与圆周长无关。”

维格纳讲这个故事的目的是要告诉我们，数学概念会在令人惊奇的意外情况下出现，就像河流长度和人口趋势的例子。当然，他更关心的是了解数学与物质世界那些意想不到的连接背后的原因，但他的故事也点出问题，也就是为什么这类纯数学世界里的概念会以意料之外的方式现身？

在欧几里得的《几何原本》里，符号 π 不具意义（不过是古希腊字母表中的第十六个字母），即使《几何原本》包含一个不易证明的事实：任意两个圆的面积比是它们的直径上的正方形面积之比。[①] 希腊数学思想独一无二的特质，在于确信这世界存在可被证明的永恒真理：任何一个圆都会被自身任一条直径等分；任何三角形的内角和永远是一个相同的常数；三维空间中恰好存在五个正多面体。在《几何原本》第二卷命题 4 中，欧几里得告诉我们如何证明今日觉得简单的代数恒等式，例如 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，但是

① 关于所罗门圣殿中祭司行洁净礼用的水池，《圣经》中有一段引述（《列王记上》第 7 章第 23 节）：“他又铸一个铜海，样式是圆的，高五肘，径十肘，围三十肘。”这是对“$\pi=3$”的诠释。但这里不是将 π 当成一种常数来引述的。

在他的证明里看不到任何表示乘幂的代数符号（那些放在右上角的小数字，说明一个数字自乘多少次），在他的命题和证明里也看不到加号，这一方面是因为他的陈述和证明是几何式的，另一方面是因为他完全以叙事形式来陈述命题和证明。

亚历山大的丢番图比欧几里得晚出生五百多年。他在巨作《算术》（*Arithmetica*）中提出两个未知数的特别线性方程如 $x+y=100$ 及 $x-y=40$ 某种接近于代数的解法。他并非借助符号来解答，而是使用简字化的记法（syncopated notation），也就是当时相当常见的做法：省略词中间的字母。所以他的著作离不开言辞解说。[①] 那是脱离以日常语言来表现数学所跨出的第一步。

没有符号，研究所有数学仍是可行的。一般而言，法律条款中不包含诸如 appurtenance（从属权）、aforesaid（前述的）、behoove（理应）等法律措辞之外的符号——除了用于法律文件，这些词只有少数人会想到要使用。无论是基于传统，或者有意安排，法律都不依赖以符号来达到精确性。自然语言中的文字，诸如英文或拉丁文，可以表达严格的意义，但几乎无法达到符号代数那种无懈可击的精确性。相反，成文法极为依赖意图，我们可以想见那些熟悉法律的聪明人会发现其中的漏洞。

想象一下，如果今天仍然完全是以文字表述，没有设计精巧的大量符号，数学会是什么样子？以阿尔－花拉子密（al-Khwārizmī）所著《代数》一书中的片段为例，甚至数字也以文字来表达：

> 如果一个人问你这样的问题：“我把十分成两部分，并将其中一部分乘上另一部分，所得结果为二十一”，那么你知道其中一部分为某数，而另一部分为十减某数。

我们会把这个问题简写为：$x(10-x)=21$。

---

① 本书中所用的 syncopate（简字化）这个动词，指借由省略一个词的中间字母来缩短那个词。这是特定的缩写形式，虽然大部分的缩写并非简字。19 世纪中叶，德国数学家内塞尔曼（G. H. F. Nesselman）用三个阶段来描述代数记法发展的特性，他将这三个阶段依序称为文辞的（rhetorical）、简字的（syncopated）和符号的（symbolic）。

如同阿尔－花拉子密所写的解答，当中用到的语言对该问题而言是明确的。在这段话背后，可能隐含了某种惯常的程序或某种计算法则，但它的确需要花一点力气才能看出来，因为阿尔－花拉子密的《代数》不是那个时代特别具有代表性的数学。

私人未公开的文件或许有所不同。思考过程和潦草的解答可能是在草稿上进行，如同今日数学家的做法。我无从确切得知，但我猜想最早是在某种沙板上探究解答，当中使用了某种个人的记法，之后以文字表达的方式组合，以说明文本内容。

创造力丰富的6世纪印度数学家和天文学家阿耶波多（Aryabhatta），用字母来代表未知数。而7世纪的印度数学家及天文学家婆罗门笈多——顺带一提，他是第一位将零视为数字的作者——使用缩写来代表出现在特定问题中每一个未知数的平方与平方根。阿耶波多和婆罗门笈多都以韵文书写，因此不管他们使用什么符号体系都必须符合韵律。当读者看见一个小圆点时，他们所读的是代表小圆点的那个字。这让符号的使用受到限制。负数用一个小圆点来区分，分数的写法与今日相同，只是分子与分母中间没有横杠。

即使到了16世纪初期，欧洲的数学著作本质上仍是以文字表述的，尽管一些国家几百年来无疑经常使用缩写的文字。缩写变得简略，而到了下一世纪，通过弗朗索瓦·韦达（François Viète）、罗伯特·雷科德（Robert Recorde）、西蒙·史蒂文（Simon Stevin）及最终笛卡儿的书写，那些缩写变得非常简洁，所有与这些缩写的源头曾经显而易见的连接，从此消失无踪。

在数学里，一段文字表述的符号形式不只是便利的速记而已。首先，它不专属于任何特定的语言，世界上几乎所有语言都使用那些相同的记法，尽管书写形式可能各有不同。其次，且或许最重要的是，符号帮助思维超越那些以自然语言所写的文字伴随的模棱两可和误解。符号使得思维可以将特殊表达提升至一般化的形式。举例来说，文字表达句“从一未知数的平方，减去该未知数的两倍，再加一”可以写成 x^2-2x+1。这个符号式可以提示一种集合式的表达概念，就像我们可能从 x^2-2x+1 的个别特性，导出一般二次式 ax^2+bx+c。我们仅将 x^2-2x+1 视为一个类别（species）的代表。[①]

① 此处“类别”是指“ax^2+bx+c”这样的一般二次多项式，这是韦达的用词。——译者注

到了17世纪之初笛卡儿的时代，下述文字表述已几乎完全以现代的符号形式书写了：

一未知量与一个数的和的平方，等于该未知量与该数之平方和，再加上该未知量与该数之积的两倍。

当时是以符号∞来代表相等的：

$$(x+a)^2 \propto x^2+a^2+2ax$$

符号最终使得代数从文字的非形式性解放出来。

随着这一切的发展，某种东西遗失了。我们传达现代数学时主要是通过成套的符号，也就是由符号所标注的信息公文包。而那些公文包往往如同俄罗斯套娃，一个套着一个的公文包集合，每一个都取决于下一个更小的公文包的符号。

有一个关于说笑话者的老笑话：一个家伙走进酒吧，听到几个老家伙围坐在一起讲笑话。其中一个人大喊："五十七！"而其他人放声大笑。另一个人大叫："八十二！"大家又都笑了起来。

于是这个家伙问酒保："发生了什么事？"

酒保答道："噢，他们已经在这里一起厮混讲笑话很久了，把他们所有的笑话以数字来编目。当他们要说笑话时只需要喊出那个数字。这样比较省时。"

这个刚到的家伙说："真聪明！我来试试。"

于是这个家伙转向那群年长者大喊："二十二！"

所有人只是看着他，没有人笑。

他尴尬地坐下，问那个酒保："为什么没有人笑？"酒保说："嗯，年轻人，你只是没有说对方式……"

数学家通常通过一系列符号信息和编码来沟通，这些符号对于没有钥匙打开装满内容的那些公文包的新手而言，是难以理解的。那些比人类曾创造的所有自然语言更难学习的记号、标志和符号所造成的困难，让数学家们变得非常小众。

为了帮助理解，数学家多半在言谈中放宽他们无懈可击的论证，牺牲绝

对严密的证明。他们仰赖所谓的“口语的灵活性”，一种通过共通的专业基础知识与独立于文化背景的经验，来彼此理解的方式。

然而，即使运用口语的灵活性，绝对证明之外的某种东西还是消失了。数学，甚至应用数学、物理和化学，都可以在仅有图形符号且没有任何可想象得到的实物做参照的情况下进行研究。因此，物理学家所用的文字说明与数学家的文字说明之间的差异，是一种概念化的差异。

这或许恰好可以说明为什么物理学家比较容易与大众沟通，他们能够为我们说明这个世界上的“玩意儿”。他们所讲的玩意儿可能是银河、撞球、原子、物质的基本粒子和弦，但即使人们察觉不到那些弦，它们存在于十维空间且小于 10^{-35} 米，却可以把它们想象成一种玩意儿。甚至电场和磁场也可以被想象成某种玩意儿。当物理学家撰写一本大众读物时，他们一开始便占有优势，他们知道每一位读者都曾体验过他们用语言所描述的事物，因为连他们提到的大部分无穷小的物体都是可以想象的“东西”。

数学家所使用的基本要素是某种更难以捉摸的东西。表示一个特定数字的符号 N，不只是一种便利的记法。现今它在意识中代表一种与这个世界少有关联的事物——换言之，N 是意识中的一个“存在”（being），而非这个世界中一个确定的“存在”。所以，这个非实体的事物具有一种认知层面上的本体论。现代理解一个数字——例如三——的思维过程，就像理解任何抽象事物一样，是一个爬梯的过程，都是从人类经验中确定数量的事物开始，逐渐超越到一般化事物：田野中的三只羊，三只羊，三个生物，三个东西……一路爬升到“三”这个概念。想象中的实体事物随着一般化事物的递增而递减。因此，数学符号是一种看得见的线索，帮助我们的意识完成从特例领悟通例的过程。

本书追溯数学中已确立的符号的起源和演化，始于计数，终于现代数学的基本运算符号。这主要是一部数学符号史；然而，它也探索了符号如何影响数学思考，以及符号如何唤起广泛又历久不衰的潜意识灵感。

本书包含三部分，区分数字的发展与代数的发展。这个艰难的写作决定是

为了让可接受的符号定义能适合更大的记法范围，这个记法范围包括数字的记法和代数的记法。前两部分各有年表。第一部分和第二部分在某种程度上各自独立，但是读者应该知道，在早期发展阶段，数字与代数两者是沿着纠缠在一起的时间轴发展的。

∞

定义

> **符号（sym·bol \ 'simbəl \ n-s）：** 由于关系、联想、习俗成规或偶然而非有意的类似，来代表或使之联想到其他事物的某种事物。

symbol 是一个复杂的词。上述韦氏字典（Webster）所下的定义，并不完全与符号使用的集体经验吻合。为了更符合本书的内容，我们必须延拓前述定义，要让符号也是，或必须是某种具有文化意义且非随意定夺的事物，某种代表一个听起来或看起来并不相似的对象或概念的事物，以及对与它相似的事物不带先入之见的某种事物。

> **代数（al·ge·bra \ ˈal-jə-brə \ n-s）：** 数学的一个分支，在这个分支中，算术关系被一般化，并且在探究过程中使用字母符号来表示数字、变量或其他数学对象（如向量和矩阵），以及字母组合符号，特别是用以表示符合特定法则的方程式。

现今“代数”一词有更广泛的意义，扩及加法和乘法的通用规则，以及各种各样数学对象之间的结构关系。但由于本书主要讨论 18 世纪之前的代数学所使用的符号，因此韦氏字典的定义是恰当的。

∞

关于插图

全书讨论了许多阐明符号史的原始信息，且在一些例子里以插图来呈现。尽管书中用以说明的一些原始手稿可以获得达到印刷质量的扫描文件，但碍于严格法律规定，以下页面中的文本必须重新打字：第 65 页、第 100 页、第 137 页、第 149 页、第 150 页、第 151 页。

目录