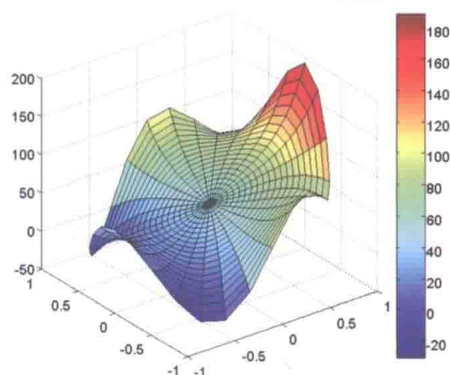
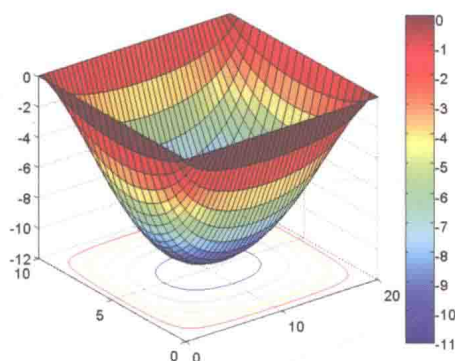




教育部高等学校地矿学科教学指导委员会
地质工程专业规划教材

JIAOYUBUGAODENGXUEXIAODIKUANGXUEKE
JIAOXUEZHIDAOWEIYUANHUI
DIZHIGONGCHENGZHUANYEGUIHUAJIAOCAI



数学物理方程与特殊函数

(地球物理类)

童孝忠 编著



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

教育部高等学校地矿学科教学指导委员会
地质工程专业规划教材

数学物理方程与特殊函数

(地球物理类)

童孝忠 编著



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

· 长 沙 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

数学物理方程与特殊函数: 地球物理类 / 童孝忠编著. --长沙:
中南大学出版社, 2017. 8

ISBN 978 - 7 - 5487 - 2997 - 6

I. ①数… II. ①童 III. ①数学物理方程 ②特殊函数 IV. ①0411. 1
②0174. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 227765 号

数学物理方程与特殊函数

(地球物理类)

SHUXUE WULI FANGCHENG YU TESHU HANSHU

(DIQIU WULI LEI)

童孝忠 编著

☐责任编辑 刘小沛

☐责任印制 易红卫

☐出版发行 中南大学出版社

社址: 长沙市麓山南路

邮编: 410083

发行科电话: 0731 - 88876770

传真: 0731 - 88710482

☐印 装 长沙印通印刷有限公司

☐开 本 787 × 1092 1/16 ☐印张 17.25 ☐字数 429 千字

☐版 次 2017 年 8 月第 1 版 ☐印次 2017 年 8 月第 1 次印刷

☐书 号 ISBN 978 - 7 - 5487 - 2997 - 6

☐定 价 60.00 元

图书出现印装问题, 请与经销商调换

内容简介

本书全面系统地介绍了三类典型数学物理方程——波动方程、热传导方程和稳定场方程的各种求解方法以及特殊函数的基础知识。全书共分 10 章，主要包括典型方程与定解条件、分离变量法、积分变换法、行波法、格林函数法、有限差分法、有限单元法、贝塞尔函数、勒让德函数以及数学物理方程的地球物理应用，书中的实例均经过验证。本书的取材大多出自科研与教学实践，在内容安排上注重理论的系统性和自包容性，同时也兼顾实际应用中的各类技术问题。

本书可作为地球物理专业本科生的教材或教学参考书，也可作为研究生、科研和工程技术人员的参考用书。

前 言

随着科学技术的飞速发展,各种数学方法的应用越来越广泛。在地球科学领域,数学物理方程理论已经成为必须掌握的基础知识。数学物理方程的研究对象为具有应用背景的偏微分方程,是一门综合性、应用性非常强的基础课程,其特点是有机地结合了数学理论、方法与实际应用。

数学物理方程是大家公认的一门难教难学的数学基础课程,其核心内容是偏微分方程。国内外有许多数学物理方程方面的优秀教材,但在多数情况下,一类是适合数学专业学习的偏微分方程教材,这类教材侧重于讲述数学专业自身的数学理论;另一类是适合非数学专业的其他理工科专业的数学物理方法教材,这类教材侧重于模型的建立和定解问题的解题方法。本书是作者在多年科研实践和教学经验的基础上,为地球物理专业本科生和研究生学习数学物理方程与特殊函数而编写的教材或教学参考书。

考虑到一门课程的授课时间和授课对象等因素,本书的编写主要注意了以下几个方面:

- 1) 依据“课时少、内容多、应用广、实践性强”的特点,在内容编排上,尽量精简非必要的部分,着重讲解数学物理方程最基本的内容;
- 2) 对需要学生掌握的内容,做到深入浅出,实例引导,讲解详实,既为教师讲授提供较大的选择余地,又为学生自主学习提供了方便;
- 3) 在偏微分方程求解方法的讲述方式上,我们尝试着尽可能清楚地阐述方法构造的思想及意义,以帮助读者更好地理解方法、掌握方法;
- 4) 数学物理方程与 Matlab 程序设计相结合,采用当前最流行的数学软件 Matlab 实现了偏微分方程计算结果的可视化,并编写了数值近似算法的 Matlab 程序,书中所有程序均在计算机上经过调试和运行,简洁而不乏准确;
- 5) 考虑到数学物理方程与特殊函数是一门应用广泛的学科,我们适当地加入了几个地

球物理计算的应用实例,以期让学生了解数学物理方程的实用性。

全书共分10章。第1章从实际物理问题出发,详细介绍建立数学物理方程模型的基本方法,以及如何根据物理背景确定定解条件。

第2章至第7章,主要介绍了求解定解问题的解题方法,包括分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、有限差分法和有限单元法。对于每种方法,适合哪些种类的方程和定解条件,都进行了详细的分类讨论。

第8章和第9章,分别讨论了贝塞尔方程和勒让德方程的解法,并介绍了两类特殊函数在分离变量法中的应用。

第10章,讨论了数学物理方程与特殊函数在地球物理中的应用,分别举例介绍了求解位场拉普拉斯方程的分离变量法、求解大地电磁正演问题的数值模拟方法以及球谐函数在全球高程异常计算中的应用。

本书可作为地球物理专业本科生和研究生的教学用书,也可作为科研和工程技术人员的参考用书。读者需要具备微积分、线性代数、常微分方程和 Matlab 语言方面的初步知识。书中有关的 Matlab 程序代码以及教材使用中的问题可以通过作者主页 <http://faculty.csu.edu.cn/xztong> 或电子邮箱 csumaysnow@csu.edu.cn 与作者联系。

本书在编写过程中,中南大学的严家斌老师给予了大力支持并提出了完善结构、体系方面的建议;中南大学的刘海飞老师对本书的写作纲要提出了具体的补充与调整建议并予以鼓励。同时,特别感谢中国海洋大学的刘颖老师提出的宝贵意见及与其有益的讨论。

由于笔者水平有限,加上时间仓促,书中难免出现不妥之处,敬请读者批评指正。

童孝忠

2017年8月于岳麓山

目 录

第 1 章 典型方程与定解条件	(1)
1.1 波动方程的导出	(1)
1.1.1 弦振动方程	(1)
1.1.2 时变电磁场方程	(3)
1.2 热传导方程的导出	(4)
1.3 稳定场方程的导出	(6)
1.3.1 稳定问题	(6)
1.3.2 谐变电磁场方程	(7)
1.3.3 引力位与重力位方程	(7)
1.4 边界条件与初始条件	(8)
1.5 定解问题的提法	(10)
1.5.1 定解问题及其适定性	(10)
1.5.2 线性偏微分方程解的叠加性	(11)
1.6 二阶线性偏微分方程的分类	(11)
1.6.1 变系数线性偏微分方程	(12)
1.6.2 常系数线性偏微分方程	(16)
习题 1	(18)
第 2 章 分离变量法	(19)
2.1 有界弦的自由振动	(19)
2.2 有限长杆上的热传导	(26)
2.2.1 第一类边界条件的热传导问题	(26)
2.2.2 对流边界条件的热传导问题	(30)
2.3 二维位势方程	(33)
2.3.1 矩形域内的二维位势方程	(33)
2.3.2 圆域内的二维位势方程	(37)
2.4 多于两个自变量的定解问题	(40)
2.5 非齐次方程的解法	(44)
2.5.1 两端固定弦的强迫振动	(44)
2.5.2 稳定问题的非齐次方程	(47)
2.6 非齐次边界条件的处理	(50)
2.7 本征函数系及其正交性	(56)
2.7.1 一维本征函数系	(56)
2.7.2 二维本征函数系	(58)

2.7.3 本征函数的正交性	(59)
习题2	(60)
第3章 波动方程的行波法	(63)
3.1 无界弦的自由振动	(63)
3.1.1 达朗贝尔解的计算公式	(63)
3.1.2 达朗贝尔解的物理意义	(68)
3.2 半无界弦的自由振动	(74)
3.3 有界弦的自由振动	(80)
3.4 高维波动方程的柯西问题	(82)
习题3	(84)
第4章 积分变换法	(87)
4.1 傅里叶积分与傅里叶变换	(87)
4.1.1 傅里叶积分	(87)
4.1.2 傅里叶变换	(88)
4.2 傅里叶变换的基本性质	(88)
4.3 傅里叶变换法求解定解问题	(91)
4.3.1 弦振动问题	(91)
4.3.2 热传导问题	(94)
4.3.3 稳定场问题	(97)
4.4 拉普拉斯变换	(100)
4.5 拉普拉斯变换的基本性质	(101)
4.6 拉普拉斯变换法求解定解问题	(103)
4.6.1 无界区域的问题	(103)
4.6.2 半无界区域的问题	(105)
4.6.3 有界区域的问题	(109)
习题4	(113)
第5章 格林函数法	(115)
5.1 δ 函数	(115)
5.2 格林函数	(118)
5.2.1 格林公式	(118)
5.2.2 格林函数的概念	(119)
5.2.3 格林函数的互易性	(121)
5.3 稳定问题的格林函数法	(121)
5.4 热传导方程的格林函数法	(125)
5.4.1 无界空间的热传导问题	(125)
5.4.2 有界空间的热传导问题	(126)

5.5 波动方程的格林函数法	(129)
5.5.1 无界空间的波动方程	(129)
5.5.2 有界空间的波动方程	(130)
习题5	(132)
第6章 有限差分法	(134)
6.1 有限差分法基础	(134)
6.2 稳定场方程的差分解法	(135)
6.2.1 一维稳定场方程的差分解法	(135)
6.2.2 二维稳定场方程的差分解法	(137)
6.3 热传导方程的差分解法	(144)
6.4 波动方程的差分解法	(154)
习题6	(157)
第7章 有限单元法	(160)
7.1 加权余量法	(160)
7.1.1 加权余量的概念	(160)
7.1.2 Galerkin 法	(160)
7.1.3 Galerkin 法的加权余量表达式	(162)
7.2 插值函数的构造	(163)
7.2.1 长度坐标的定义	(164)
7.2.2 插值函数	(164)
7.2.3 单元积分	(167)
7.3 稳定场问题的有限元解法	(169)
7.4 热传导方程的有限元解法	(175)
7.5 波动方程的有限元解法	(179)
习题7	(186)
第8章 贝塞尔函数	(188)
8.1 贝塞尔方程的引出	(188)
8.2 贝塞尔方程的求解	(189)
8.2.1 非整数阶贝塞尔方程的解	(190)
8.2.2 整数阶贝塞尔方程的解	(192)
8.3 贝塞尔函数的递推公式	(193)
8.4 函数展成贝塞尔函数的级数	(195)
8.4.1 贝塞尔函数的零点	(195)
8.4.2 贝塞尔函数的正交性	(199)
8.4.3 Fourier - Bessel 级数	(201)
8.5 贝塞尔函数的应用	(203)

8.5.1	圆盘域波动方程	(203)
8.5.2	圆盘域热传导方程	(206)
8.5.3	圆柱形域拉普拉斯方程	(208)
8.6	贝塞尔函数的其他类型	(211)
8.6.1	第三类贝塞尔函数	(211)
8.6.2	虚宗量的贝塞尔函数	(212)
8.6.3	开尔文函数	(215)
8.7	贝塞尔函数的渐近公式	(215)
习题 8		(216)
第 9 章	勒让德函数	(218)
9.1	勒让德方程的引出	(218)
9.2	勒让德方程的求解	(220)
9.3	勒让德多项式的性质	(222)
9.3.1	勒让德函数的引出	(222)
9.3.2	勒让德多项式的递推公式	(226)
9.3.3	勒让德多项式的奇偶性	(227)
9.3.4	勒让德多项式的正交性	(227)
9.3.5	傅里叶-勒让德级数	(227)
9.4	勒让德函数的应用	(231)
9.5	连带勒让德多项式	(235)
9.6	球谐函数	(238)
习题 9		(242)
第 10 章	地球物理中的应用实例	(243)
10.1	位场拉普拉斯方程的解	(243)
10.1.1	直角坐标系中拉普拉斯方程的解	(243)
10.1.2	球坐标系中拉普拉斯方程的解	(244)
10.2	大地电磁正演模拟	(245)
10.2.1	有限差分法分析	(245)
10.2.2	有限单元法分析	(253)
10.3	特殊函数的地球物理应用	(256)
习题 10		(260)
附 录		(261)
附录 A	Γ 函数(Gamma 函数)	(261)
附录 B	Fourier 变换表	(263)
附录 C	Laplace 变换表	(264)
4	参考文献	(266)

第1章 典型方程与定解条件

数学物理方程是以物理规律为基础、数学方法为工具来解决实际问题,它的主要研究对象来自数学物理问题中的偏微分方程。本章我们将从几个简单的物理模型出发,推导出本课程将要讨论的三种典型的数学物理方程及其相应的定解条件,同时也对二阶偏微分方程进行分类。

1.1 波动方程的导出

1.1.1 弦振动方程

弦振动方程是在18世纪由达朗贝尔(D'Alembert)等人首先给予系统研究的,它是一大类偏微分方程的典型代表。弦的振动问题,虽然是一个古典问题,但对于初学者仍然具有一定的启发性,我们将从物理问题出发来导出弦振动方程。

设有一根完全柔软的均匀弦,平衡时沿直线拉紧,而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外,不受外力影响。下面研究弦作小横向振动的规律。所谓“横向”是指全部运动出现在一个平面上,而且弦上的点垂直于 x 轴方向运动,如图1.1所示;所谓“微小”是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,以至它们的高于一次方的项都可忽略不计。

取弦的平衡位置为 x 轴,且令一个端点的坐标为 $x=0$,另一个端点为 $x=L$,且设 $u(x, t)$ 是坐标为 x 的弦上一点在 t 时刻的(横向)位移。采用微元法的思想,我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于零的极限情况。这一段弧长是如此之小,以至于可以把它看成是质点。在弦上任取一弧段 MM' ,其长为 ds ,设 ρ 为弦的线密度,弧段 MM' 两端所受的张力记作 T 、 T' 。

由于假定弦是完全柔软的,所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向。我们考虑弧段 MM' 在 t 时刻的受力情况,利用牛顿运动定律,作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弦的质量乘以该方向上的加速度。

在 x 轴方向弧段 MM' 受力的总和为

$$F_x = T' \cos \theta' - T \cos \theta$$

由于弦只作横向振动,所以有

$$T' \cos \theta' - T \cos \theta = 0$$

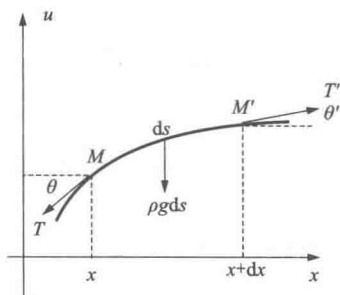


图 1.1 弦的横振动示意图

按照上述弦振动微小的假设, 可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小, 即 $\theta \approx 0$, $\theta' \approx 0$, 从而由

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

可知, 当我们略去高阶无穷小时, 就有

$$\cos \theta \approx 1, \cos \theta' \approx 1$$

代入式(1.1), 便可近似得到

$$T = T'$$

在 u 轴方向上, 弧段 MM' 受力的总和为

$$F_u = -T \sin \theta + T' \sin \theta' - \rho g ds$$

其中 $-\rho g ds$ 是弧段 MM' 的重力。当 $\theta \approx 0$, $\theta' \approx 0$ 时, 有

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \approx \tan \theta = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\sin \theta' \approx \tan \theta' = \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}$$

$$ds = \frac{dx}{\cos \theta} \approx dx$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$, 小弧段的质量为 ρds , 所以根据牛顿第二定律可得

$$-T \sin \theta + T' \sin \theta' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

或

$$T \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g dx \approx \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

上式左边方括号的部分是由于 x 产生 dx 的变化而引起的 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 改变量, 由微分中值定理可得

$$\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial x^2} dx$$

其中 $x \leq \xi \leq x + dx$, 于是

$$\left[T \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

令 $dx \rightarrow 0$, 则 $\xi \rightarrow x$, 得

$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g$$

通常情况下, 弦绷得很紧, 张力较大, 导致弦振动速度变化很快, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 比 g 大得多, 所以 g 可以略去。经过这样逐步略去一些次要的量, 抓住主要的量, 在 $u(x, t)$ 关于 x, t 都是二次连续可微的前提下, 最后得出 $u(x, t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

这里的 $a^2 = T/\rho$ 。式(1.3)称为弦振动方程, 因为表示空间位置的变量只有一个, 因此该方程又叫一维波动方程。

如果弦在振动过程中, 弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力, 且假定在 t 时刻弦上 x 点处的外力为 $F(x, t)$, 显然, 这时式(1.1)和式(1.2)分别写为

$$T' \cos \theta' - T \cos \theta = 0$$

$$F ds - T \sin \theta + T' \sin \theta' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

利用前面的推导方法并略去弦本身的重量, 可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.4)$$

其中 $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$ 表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力。

方程(1.3)与方程(1.4)的差别在于方程(1.4)的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x, t)$, 这个项称为自由项。含有非零自由项的方程称为非齐次方程, 而自由项恒等于零的方程称为齐次方程。因此, 式(1.3)为齐次一维波动方程, 式(1.4)为非齐次一维波动方程。

一维波动方程只是波动方程中最简单的情况, 在流体力学、声学及电磁场理论中, 还要研究高维的波动方程。

1.1.2 时变电磁场方程

Maxwell 方程组是电磁场必须遵从的微分方程组, 含有以下四个方程, 分别反映了四条基本的物理定律:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{法拉第定律}) \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{安培定律}) \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁通量连续性原理}) \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{库仑定律}) \quad (1.8)$$

其中 $\mathbf{E}$ 为电场强度(V/m); $\mathbf{B}$ 是磁感应强度或磁通密度(Wb/m²); $\mathbf{D}$ 为电感应强度或电位移(C/m²); $\mathbf{H}$ 为磁场强度(A/m); $\mathbf{j}$ 为电流密度(A/m²); ρ 为自由电荷密度(C/m³)。

假设地球模型为各向同性介质, 则电磁场的基本量可通过物性参数 ε 和 μ 联系起来, 它们的关系是:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{欧姆定律}) \quad (1.11)$$

其中 σ 为介质的电导率, 其单位为 S/m; 而 ε 和 μ 分别为介质的介电常数和磁导率, 取 $\varepsilon = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m 和 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m。

在实用单位制下, 如令初始状态时介质内不带电荷, 采用式(1.5)~式(1.8)所示的介质方程组后, 各向同性介质的 Maxwell 方程组可变为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.15)$$

对式(1.12)和式(1.13)两边分别取旋度:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \sigma (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (1.17)$$

整理后可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.19)$$

根据矢量分析公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} \quad (1.21)$$

式(1.18)和式(1.19)可以改写为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.23)$$

由于我们未对 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 随时间 t 变化的规律作任何限制, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 可以是任何一种形式的时间函数(如阶跃函数, 脉冲函数等), 故式(1.22)和式(1.23)称为时间域电磁场的波动方程。

1.2 热传导方程的导出

推导热传导方程所用的数学方法与弦振动方程完全相同, 不同之处在于具体的物理规律不同。这里用到的是热学方面的两个基本规律, 即能量守恒定律和热传导的 Fourier 定律。前者大家都熟悉, 这里只扼要介绍一下后者。

设有一块连续介质, 取定一坐标系, 并用 $u(x, y, z, t)$ 表示介质内空间坐标为 (x, y, z) 的一点在 t 时刻的温度。若沿 x 方向有一定的温度差, 则直接的生活经验告诉我们, 在 x 方向一定有热量的传递。实验表明, 从宏观上看, 单位时间内通过垂直 x 方向的单位面积的热量 q 与温度的空间变化规律成正比, 即

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.24)$$

其中 q 为热流密度, 或热通量(heat flux), 单位: W/m^2 ; k 为物体的热传导系数, 单位: $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。 k 与介质的质料有关, 而且, 严格说来, 与温度 u 也有关系, 但如果温度的变化

范围不大,则可以将 k 看成与 u 无关。上面公式中的负号表示热流的方向和温度变化的方向正好相反,即热量由高温流向低温。

如果要研究三维各向同性介质中的热传导,在介质中三个方向上都存在温度差,则有

$$q_x = -k \frac{\partial u}{\partial x}, q_y = -k \frac{\partial u}{\partial y}, q_z = -k \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.25a)$$

或

$$\mathbf{q} = -k \nabla u \quad (1.25b)$$

即热流密度矢量 $\mathbf{q}$ 与温度梯度 ∇u 成正比。

设想在介质内部隔离出一个平行六面体(见图 1.2),六个面都和坐标面重合。首先看 dt 时间内沿 x 方向流入六面体的热量,

$$[-(q_x)_x + (q_x)_{x+dx}] dydzdt = \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] dydzdt = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz dt$$

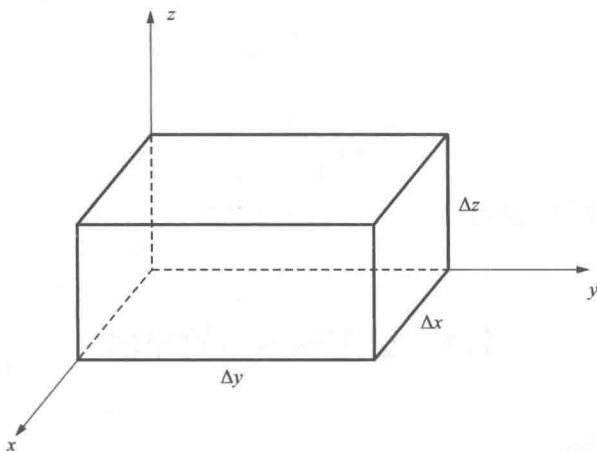


图 1.2 热传导方程位于点 (x, y, z) 的小六面体

同理,在 dt 时间内沿 y 方向流入六面体的热量为

$$[-(q_y)_y + (q_y)_{y+dy}] dx dz dt = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dz dt$$

在 dt 时间内沿 z 方向流入六面体的热量为

$$[-(q_z)_z + (q_z)_{z+dz}] dx dy dt = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz dt$$

如果六面体内没有其他热量来源或消耗,则根据能量守恒定律,净流入的热量应该等于介质在此时间内温度升高所需要的热量,

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt = \rho dx dy dz \cdot c \cdot (u_{t+dt} - u_t)$$

而 $u_{t+dt} - u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt$, 因此有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 u \quad (1.26)$$

其中 ρ 是介质的密度(单位: kg/m^3), c 是比热容[单位: $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$]. 令 $a^2 = \frac{k}{\rho c}$, 则式(1.26)变成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \quad (1.27)$$

方程(1.27)称为三维热传导方程。

若物体内有热源, 其强度为 $F(x, y, z, t)$, 则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + f(x, y, z, t) \quad (1.28)$$

其中 $f = \frac{F}{\rho c}$ 。

作为特例, 如果所考虑的物体是一根细杆(或一块薄板), 或者即使不是细杆(或薄板), 而其中的温度 u 只与 x, t 或 x, y, t 有关, 则方程(1.27)就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

在研究气体或液体的扩散过程时, 若扩散系数是常数, 则所得的扩散方程与热传导方程完全相同。

1.3 稳定场方程的导出

1.3.1 稳定问题

在前面 1.2 节中, 我们建立了热传导方程, 若导热物体内部热源的分布情况不随时间变化, 经过相当长时间后, 物体内部的温度将达到稳定状态, 不再随时间变化, 因而热传导方程中的 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, 于是式(1.28)变为

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{a^2} \quad (1.29)$$

上式称为泊松方程(Poisson 方程)。特别是, 如果 $f=0$, 则有

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.30)$$

式(1.30)称为拉普拉斯方程(Laplace 方程), 又称调和方程、位势方程。

这两种方程描写的是物体内部的温度达到稳恒时的物理状态。

在前面 1.1 节中, 如果波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$ 的 $u(x, y, z, t)$ 随时间周期性地变化,

频率为 ω , 则

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (1.31)$$

于是, $v(x, y, z)$ 满足下列方程

$$\nabla^2 v(x, y, z) + k^2 v(x, y, z) = 0 \quad (1.32)$$

其中 $k = \omega/a$ 称为波数。式(1.32)称为亥姆霍兹方程(Helmholtz 方程)。

1.3.2 谐变电磁场方程

利用傅里叶变换可将任意随时间变化的电磁场分解为一系列谐变场的组合,取时域中的谐变因子为 $e^{-i\omega t}$, 电场强度和磁场强度可表示为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t} \quad (1.34)$$

根据式(1.12)~式(1.15), 谐变场的 Maxwell 方程组可表示为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mu\omega \mathbf{H} \quad (1.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon) \mathbf{E} \quad (1.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.38)$$

对式(1.35)和式(1.36)两边分别取旋度:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i\mu\omega (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.39)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon) (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (1.40)$$

整理后可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = (i\omega\mu\sigma + \mu\epsilon\omega^2) \mathbf{E} \quad (1.41)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = (i\omega\mu\sigma + \mu\epsilon\omega^2) \mathbf{H} \quad (1.42)$$

根据矢量分析公式, 式(1.41)和式(1.42)可以写成:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.43)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.44)$$

其中 $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma - \mu\epsilon\omega^2}$ 为传播系数, 它是一个复数, 亦称为复波数。式(1.43)和式(1.44)已经转换到了频率域, 它们是频率域电磁场方程, 称为亥姆霍兹方程(Helmholtz 方程)。

1.3.3 引力位与重力位方程

引力场的第一和第二基本定律形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G\rho \quad (1.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

其中 $\mathbf{F}$ 为场强度; G 为万有引力常数, 其值等于 $6.6732 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; ρ 为密度。

引力位的梯度与场强度的关系式为

$$\mathbf{F} = \nabla V \quad (1.46)$$

结合式(1.45)和式(1.46), 可以得到引力位满足的泊松方程:

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho \quad (1.47)$$

上式在直角坐标系中可写为

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\rho$$

若讨论的区域没有质量分布, 则泊松方程变为拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.48)$$