现代数学基础丛书·典藏版 21

# 线性代数群表示导论

（上 册）

曹锡华 王建磐 著

科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版 21

# 线性代数群表示导论

上 册

曹锡华 王建磐 著



科学出版社
北 京

## 内 容 简 介

线性代数群表示论是近代数学中极为活跃、发展十分迅速的数学分支，新的思想、方法和成果不断出现，并对其他数学领域产生了深刻的影响.

本书阐述线性代数群的表示理论，包括由 Chevalley, Borel, Steinberg 等人在 50—60 年代建立起来的经典理论，以及 70 年代以后这一理论的新发展，并提出一些未解决的问题和一些猜想. 全书的重点在代数群表示理论的新发展上，特别着重于上同调方法的应用以及由此得出的一系列深刻的结果

全书共分六章. 上册包括三章，分别是：经典表示理论，仿射群概形与超代数，上同调方法

本书可供有关专业的数学工作者、大学教师和高年级学生、研究生阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数群表示导论. 上册/曹锡华，王建磐著. —北京：科学出版社，2015. 11

(现代数学基础丛书·典藏版；21)

ISBN 978-7-03-046417-0

I. ①线… II. ①曹… ②王… III. ①线性代数群—研究 IV. ①O187. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 277028 号

责任编辑：张 扬 / 责任校对：林青梅
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：王 浩

**科学出版社** 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

**北京东华虎彩印刷有限公司**印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 11 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2016 年 6 月 印 刷 印张：25 1/4
字数：323 000

**定价：178.00 元**

# 序　言

线性代数群的表示理论是近年来十分活跃、发展非常迅速的一个数学领域，新的思想、新的方法和新的结果不断出现，面貌日新月异．但是，无论国内国外，至今尚未出现一本比较系统的入门书．要想掌握这一学科的基本思想和方法，了解迄今为止的主要成果和尚待解决的问题，只能从浩如烟海的原始论文中去寻径问踪，这给初学者和希望了解代数群表示的其他领域的数学工作者造成很大的困难．在学习、教学和科研实践中，我们也深切地体会到这个困难．因此，我们决定尝试着写一部线性代数群表示理论的入门书．现在奉献给读者的就是这部书的上册．

本书的上册共分三章．第一章是代数群表示的经典理论，介绍基本概念和初步结果．我们着重建立了不可约模与支配权之间的一一对应，讨论了表示的微分与著名的 Steinberg 张量积定理．我们的表述并不完全按照经典的方式进行，例如在定义表示的微分时，以余代数的余模作为中间媒介，在证明张量积定理时，也采用了最新的处理方法．第二章介绍仿射群概形与超代数．仿射群概形是线性代数群的推广，就像仿射概形是仿射代数簇的推广一样，不过我们采用更为形式的函子的语言．代数群表示理论的许多结果，可以推广到仿射群概形的表示；反过来，仿射群概形的表示(特别是代数群的 Frobenius 核的表示)又是研究代数群表示的一个有效的工具．然而，仿射群概形的表示只能表述为函子的自然变换或余模，既不直观也不方便，因此，我们又引进超代数的概念，把函子的自然变换或余模变成一个代数的模．第三章是上同调方法．代数学的最新发展似乎与同调或上同调理论结下了不解之缘，代数群表示也是如此．本章介绍代数群表示理论中最常用的一些上同调方法——诱导函子及其导函子、有理 (Hochschild)

上同调、有理扩张函子以及诱导层的上同调，给出了它们的定义并讨论了它们的基本性质和相互关系．在新概念或新理论出现的时候，我们往往举出具体的例子，以帮助读者领会和掌握这些新概念和新理论．

在下册中，我们将用上册所介绍的各种方法和工具，比较深入地讨论代数群表示理论中的一些重要问题，主要有分块理论（包括连接原理）、Weyl 模的一般分解模式（包括平移原理）以及 Lusztig 猜想等． 最后，我们还将简介代数群的表示与有限 Chevalley 群表示的关系．

本书可供有关专业的数学工作者和研究生阅读．我们假定读者熟悉线性代数群结构与分类的基本理论，熟悉范畴与函子的语言，并有一定的代数几何学基础．当然，同调代数的一般理论是阅读第三章所必备的预备知识，但我们以一节篇幅（§ 11）阐述了有关的理论，希望没有系统学过同调代数的读者读了这一节以后，能够毫无困难地理解后面的内容． 为了同样的目的，我们还用一小节（§ 14.1）篇幅介绍所牵涉到的代数几何学的概念与结论，但与 § 11 不同的是，我们没有给出所引结论的证明，这是因为代数几何学本身是非常庞大的理论体系，不可能用较小的篇幅来证明所需的结论．

写一本代数群表示理论的著作是十分困难的，因为这个理论还处于发展之中，许多重要的问题还未完全解决，许多新的思想、方法的生命力还有待于时间的考验，整个理论还没有完善；更何况我们在这方面的研究工作还刚刚起步，水平有限．总之，这是一本勉为其难之作，因此，一定有不少错误和不足之处． 此外，本书初稿是结合教学过程断断续续地写成的，内容前后不呼应，符号术语前后不统一之处还不少，在修改定稿的时候虽然努力弥补这方面的缺陷，但不尽如意之处仍在所难免．所有这些，希望数学界同行批评指正．

作者非常感谢国内外的许多同行．我们首先向 J. E. Humphreys 教授表示诚挚的谢意， 他于 1980 年春在华东师范大学所作

的精采的讲演使我们受益匪浅，本书(特别是第一章)的形成是深受他的讲演的影响的．同样，A. Borel 教授、黎景辉教授、黄和伦(W. J. Wong) 教授、J. C. Jantzen 教授等学者在国内的讲学都给我们以深刻的启示，特别是 J. C. Jantzen 教授，虽然他的讲演是在本书初稿形成之后，但由于他的讲演，使我们有可能在定稿时作了若干处较为满意的修改． 在此谨向这些学者表示我们的谢意． 此外，许多尚未见面的国外同行及时地给我们寄来他们已经发表和尚未发表的论文，使我们能比较迅速地了解国外的科研动态，作者也向他们表示感谢．他们中间主要有： H. H. Andersen 教授、E. Cline 教授、S. Donkin 教授、B. Parshall 教授、G. Lusztig 教授与 R. Steinberg 教授等．

在国内同行中，作者非常感谢万哲先研究员和武小龙博士，他们仔细阅读了本书的初稿，提出了宝贵的意见． 作者还感谢华东师范大学数学系（特别是代数教研室）的同事们在作者写作此书时所给予的支持和帮助．博士研究生杜杰和温克辛仔细校读了手稿，并协助编写书末的符号表和索引，我们也在此表示感谢．

作者

1985 年 4 月于华东师范大学

# 目　　录

# 第一章　经典表示理论

线性代数群的表示理论与它的结构理论几乎是同时出现的．事实上，研究线性代数群结构的一个重要方法就是表示论．例如，线性化定理、Jordan 分解的定义与性质、可解群的结构、根系的定义与半单群的分类等问题的讨论，都离不开表示论的方法．本章主要叙述线性代数群表示理论的早期的主要结果，有两点必须说明：其一，本章与线性代数群结构方面的著作（例如 [Bor1]，[Hum2]，[Sp1]）在内容上有少许重复．我们认为这种重复是必要的，因为在结构方面的著作中涉及表示理论，不是按表示理论本身的逻辑展开的，而只是作为工具在需要的地方引用一下；我们这里则是按表示理论本身的逻辑叙述这些内容．其二，虽然我们所介绍的主要结果是经典的，但所采用的叙述与证明的方法并不完全是经典的．如表示微分的定义、Steinberg 张量积定理的证明等，都采用了最新的处理方法．

## §1. 线性代数群表示理论的基本概念

线性代数群表示理论所研究的是线性代数群的有理表示．但是，有理表示的概念有一个发展过程．在经典表示理论中，一般说来，有理表示是有限维的；后来，由于上同调方法的引进，就不得不考虑一些无限维表示——局部有限、局部(在经典意义下)有理的无限维表示．因此，就有必要把有理表示的概念推广．不过，我们现在先给出经典的有理表示的定义，推广的概念参看 (4.1.1) 证明后面所给的定义．

### 1.1　定义与基本性质

本书中，字母 $\mathscr{K}$ 自始至终表示一个固定的代数闭域，除非特

殊指出，它的特征可以是任意的． 现在设$G$是$\mathscr{K}$上的线性代数群，$V$是$\mathscr{K}$上的有限维向量空间． 代数群同态 $\sigma: G \to GL(V)$ 称为$G$的一个**有理表示**，$V$称为**有理$G$模**．

必须注意的是，表示空间总是基域$\mathscr{K}$上的向量空间．

回忆一下，两个代数群之间的一个映射是代数群同态当且仅当(1)它是群同态，(2)它是代数簇的态射． 据此，我们知道，群$G$的一个有限维线性表示 $\sigma: G \to GL(V)$ 是有理表示当且仅当如下条件满足：给定$V$的一组基，把每个$g \in G$对应的的线性变换 $\sigma(g)$ 关于这组基表成矩阵的形式 $(\sigma_{ij}(g))$，则 $\sigma_{ij}: G \to \mathscr{K}$ 是$G$上的正则函数，即 $\sigma_{ij} \in \mathscr{K}[G]$． 选定哪一组基是无关紧要的，因为矩阵的相似变换只引起这些$\sigma_{ij}$的线性组合．

有理$G$模之间的任何$G$模同态都在我们的讨论范围之内． 换句话说，我们所讨论的有理$G$模范畴是$G$模范畴的一个完全子范畴．

**(1.1.1) 命题．** 有理$G$模的子模、商模、有限直和与张量积都是有理$G$模． 如果$V$与$V'$是有理$G$模，对 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(V, V')$，$g \in G$，定义

$$(g \cdot f)(v) = g \cdot (f(g^{-1} \cdot v)), \qquad \forall v \in V,$$

则 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(V, V')$ 也是有理$G$模． 特别，有理$G$模的反轭模$V^*$也是有理$G$模． 此外，若 $\varphi: G' \to G$ 是代数群同态而$V$是有理$G$模，通过$\varphi$在$V$上定义一个$G'$模结构，则这个模是有理$G'$模．特别，有理$G$模在$G$的闭子群的限制是有理的．

证明． 如果$V_0$是有理$G$模$V$的子模，则可以选择$V$的基，使$G$在$V$上的表示矩阵成为拟三角阵

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

的形式，其中$A$为$G$在$V_0$上的表示矩阵，$B$为$G$在$V/V_0$上的表示矩阵． 由此可见，$G$在$V_0$或$V/V_0$上的表示矩阵中所出现的函数均在$V$上的表示矩阵中出现． 于是，从$V$的有理性立即推出$V_0$与$V/V_0$的有理性．

若 $V$ 与 $V'$ 为有理 $G$ 模，则 $G$ 在 $V\oplus V'$ 上的矩阵是以在 $V$ 与 $V'$ 上的矩阵为主对角线子阵的拟对角阵，所以 $V\oplus V'$ 是有理的；而 $G$ 在 $V\otimes V'$ 上的矩阵是在 $V$ 与 $V'$ 上的矩阵的张量积，矩阵中出现的函数不过是原来两个矩阵中出现的函数的积，所以 $V\otimes V'$ 的有理性也立即可得.

关于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(V, V')$ 的结论只要对 $V'=\mathscr{K}$ 是平凡 $G$ 模，即对 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(V, \mathscr{K})=V^*$ 的情况来证明即可，因为对于一般的有理 $G$ 模 $V'$，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(V, V')\cong V^*\otimes V'$.

如果采用对偶基，$g\in G$ 在 $V^*$ 上的矩阵是 $g$ 在 $V$ 上的矩阵的转置逆，即，如果 $g$ 在 $V$ 上的矩阵为 $(\sigma_{ij}(g))$，则它在 $V^*$ 上的矩阵为 $(\sigma_{ji}(g^{-1}))$. 如所周知，当 $\sigma_{ij}\in\mathscr{K}[G]$ 时，函数 $g\longmapsto\sigma_{ij}(g^{-1})$ 仍然是 $G$ 上的正则函数，所以从 $V$ 的有理性可推出 $V^*$ 的有理性.

从有理表示的定义出发，剩下的结论已经是显然的了，因为代数群同态的合成仍然是代数群同态. 证毕.

**(1.1.2) 推论.** 有理 $G$ 模范畴是 Abel 范畴.

证明. 有理 $G$ 模范畴是 $G$ 模范畴(如所周知，这是个 Abel 范畴）的完全子范畴，并且在取子模、商模与有限直和下封闭（据(1.1.1)），所以是 Abel 范畴. 证毕.

现在我们来举一些有理表示与非有理表示的例.

**例 1.** $GL(n, \mathscr{K})$ 及其闭子群在 $n$ 维向量空间上的自然表示是有理的.

**例 2.** $GL(n, \mathscr{K})$ 在它的 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 上的伴随表示是有理的. 代数群 $G$ 的伴随表示是这样实现的：对每个 $x\in G$，用 $x$ 的共轭导出 $G$ 的代数群自同构 $i_x:G\to G$，把 $y\in G$ 映到 $xyx^{-1}$. 这个自同构的微分 $Adx$ 是 $G$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{L}(G)$ 的自同构. 特别，$Adx\in GL(\mathfrak{L}(G))$. 于是，得到映射 $Ad:G\to GL(\mathfrak{L}(G))$. 容易验证 $Ad$ 是群同态. 特别，当 $G=GL(n, \mathscr{K})$ 时，$\mathfrak{L}(G)=\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$，而对任意 $x\in G$，$Z\in\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$，$Adx(Z)=xZx^{-1}$. 下文我们还将从另一角度来讨论伴随表示，使最后这个等式成为显然的(参看(5.3.5)). 现在我们说明 $GL(n, \mathscr{K})$ 的伴随表示的有理性：取一个 $n$ 维向量空间 $V$ 及 $V$ 的一组基，把 $GL(n, \mathscr{K})$ 等同于 $GL(V)$，则 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 就等同于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(V, V)$. 此时 $GL(n, \mathscr{K})$ 在 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 上的伴随作用正

好是命题(1.1.1)所定义的作用，所以是有理的.

**例 3**. 这是例 2 的推广：任意线性代数群在它的 Lie 代数 $\mathfrak{L}(G)$ 上的伴随表示是有理的. 不失普遍性地设 $G$ 为 $GL(n, \mathscr{K})$ 的闭子群，则 $\mathfrak{L}(G)$ 是 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 的子代数. $G$ 在 $\mathfrak{L}(G)$ 上的伴随表示可以这样得到：把 $GL(n, \mathscr{K})$ 在 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 上的伴随作用限制于 $G$，得到 $G$ 在 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 上的一个有理表示，而 $\mathfrak{L}(G)$ 则是有理 $G$ 模 $\mathfrak{gl}(n, \mathscr{K})$ 的子模，所以是有理的.

**例 4**. 设 $\sigma: GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 的共轭自同构 $a + bi \mapsto a - bi$ 导出的 $GL(n, \mathbb{C})$ 的自同构，则 $\sigma$ 不是 $GL(n, \mathbb{C})$ 的有理表示.

**例 5**. 设 $G$ 是复数域的加法群，$\exp: G \to GL(1, \mathbb{C})$ 是把 $a \in \mathbb{C}$ 映到 $e^a \in \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$ 的映射. exp 是 $G$ 的表示，但不是有理表示.

**例 6**. 设 $\operatorname{char}\mathscr{K} = p > 0$，$\sigma: GL(n, \mathscr{K}) \to GL(n, \mathscr{K})$ 是把矩阵 $(a_{ij})$ 映到 $(a_{ij}{}^{1/p})$ 的映射. $\sigma$ 是 $GL(n, \mathscr{K})$ 的表示，但不是有理表示. 我们知道，$\sigma$ 是 $GL(n, \mathscr{K})$ 的 Frobenius 自同态的逆映射，它不是 $GL(n, \mathscr{K})$ 作为代数群的自同态.

例子就举到这里. 我们还要做一个约定：下文如无特殊声明，模与表示都是有理的(在有理表示概念推广之前，都有有限维的约定)，但为方便起见，常省略“有理”二字. 另外，在行文中我们自由地应用表示与模的语言，但更多地采用模的语言.

## 1.2 特征标与形式特征标

最简单的表示当然是 1 维的，这种表示本质上是一个代数群同态

$$\chi: G \to \mathbf{G}_m,$$

这里 $\mathbf{G}_m$ 表示 $\mathscr{K}$ 的乘法群(它可等同于 $GL(1, \mathscr{K})$). 这样的同态称为 $G$ 的(有理)**特征标**. 如果 $\chi$ 与 $\lambda$ 都是 $G$ 的特征标，定义

$$(\chi + \lambda)(g) = \chi(g)\lambda(g), \qquad \forall g \in G,$$

则 $\chi + \lambda$ 也是 $G$ 的特征标. 特征标间的这个运算显然是交换的与结合的；平凡特征标 $0: g \longmapsto 1$(对所有 $g \in G$)是恒等元；特征标 $\chi$ 的负元是

$$(-\chi)(g) = \chi(g)^{-1}, \qquad \forall g \in G.$$

由此可见，$G$ 的特征标全体成为一个 Abel 群。 这个群称为 $G$ 的**特征标群**，记为 $\mathfrak{X}(G)$。

读者不难看到，特征标 $\chi+\lambda$ 所对应的 $G$ 模是 $\chi$ 所对应的 $G$ 模与 $\lambda$ 所对应的 $G$ 模的张量积；特征标 $-\chi$ 所对应的 $G$ 模是 $\chi$ 所对应的 $G$ 模的反轭模。 另外，特征标显然是一个正则函数，因此 $\mathfrak{X}(G)\subset\mathscr{K}[G]$。 不过要十分小心，$\mathfrak{X}(G)$ 中的加法对应的是 $\mathscr{K}[G]$ 中的乘法。

若 $\varphi: G'\to G$ 是线性代数群 $G'$ 到 $G$ 的同态，$\chi\in\mathfrak{X}(G)$，则 $\chi\circ\varphi\in\mathfrak{X}(G')$。 因此，$\mathfrak{X}$ 是线性代数群范畴到 Abel 群范畴的反变函子。下面的命题总结了 $\mathfrak{X}(G)$ 的一些性质。

**(1.2.1) 命题.** (1) 作为 $\mathscr{K}[G]$ 的元素，特征标线性无关；

(2) $\mathfrak{X}(G)$ 是有限生成的 Abel 群；

(3) 若 $G$ 连通，则 $\mathfrak{X}(G)$ 是自由 Abel 群；

(4) 若 $G$ 是幂么群或 $G=(G,G)$(例如 $G$ 半单)，则 $\mathfrak{X}(G)=0$；若 $G$ 连通可解，$T$ 是它的一个极大环面，则 $\mathfrak{X}(G)=\mathfrak{X}(T)$；

(5) $G$ 可对角化 $\Longleftrightarrow\mathfrak{X}(G)$ 是 $\mathscr{K}[G]$ 的基；

(6) $G$ 是环面 $\Longleftrightarrow\mathfrak{X}(G)$ 自由，且是 $\mathscr{K}[G]$ 的基；此时 $\dim G=\operatorname{rank}\mathfrak{X}(G)$。

(7) 若 $H$ 是可对角化群 $G$ 的闭子群，则由嵌入同态 $H\hookrightarrow G$ 导出的特征标群的同态 $\mathfrak{X}(G)\to\mathfrak{X}(H)$ 是满射。

证明. (1) 假如结论不成立，可以找到一组个数最少的线性相关的特征标 $\{\chi_1,\cdots,\chi_n\}$。 显然 $n>1$，因此 $\chi_1\neq\chi_n$，从而有 $g_0\in G$，使 $\chi_1(g_0)\neq\chi_n(g_0)$。 我们有非零的 $a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mathscr{K}$，使

$$\chi_n=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\chi_i.$$

把两边的函数都作用在 $g_0g$ 上，这里 $g$ 是 $G$ 的任意元素，则得

$$\chi_n(g_0)\chi_n(g)=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\chi_i(g_0)\chi_i(g);$$

又把同样的函数等式两边作用在 $g$ 上，再两边同乘以 $\chi_n(g_0)$，便

得到

$$\chi_n(g_0)\chi_n(g)=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\chi_n(g_0)\chi_i(g).$$

把得到的两个式子相减，便得到

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i(\chi_n(g_0)-\chi_i(g_0))\chi_i(g)=0,\qquad \forall g\in G.$$

于是，作为 $\mathscr{K}[G]$ 的元素，

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i(\chi_n(g_0)-\chi_i(g_0))\chi_i=0,$$

其中至少有一个系数 $a_1(\chi_n(g_0)-\chi_1(g_0))\neq 0$，因此这是 $\chi_1,\cdots,\chi_{n-1}$ 的非平凡线性关系．这与 $n$ 的取法矛盾．

（2）先设 $G$ 是可对角化群，可以认为 $G$ 是 $D(n,\mathscr{K})$ 的闭子群．令 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 为 $D(n,\mathscr{K})$ 的坐标函数，则 $\chi_i$ 都是 $D(n,\mathscr{K})$（从而 $G$）的特征标．我们将证明这些 $\chi_i$ 生成 $\mathfrak{X}(G)$．设这些 $\chi_i$ 生成的 $\mathfrak{X}(G)$ 的子群为 $\mathfrak{X}'$，只要证 $\mathfrak{X}(G)\subset\mathfrak{X}'$．我们已经知道 $\mathscr{K}[G]$ 的元素都是这些 $\chi_i$ 的 Laurent 多项式，且其中的单项式都是 $\mathfrak{X}'$ 的元素．如果 $\lambda\in\mathfrak{X}(G)$，则 $\lambda\in\mathscr{K}[G]$，从而是 $\mathfrak{X}'$ 元素的线性组合．由（1），$\lambda$ 不得不等于 $\mathfrak{X}'$ 的某个元素，从而 $\lambda\in\mathfrak{X}'$．

现在设 $G$ 是任意线性代数群．考虑

$$H=\bigcap_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\mathrm{Ker}\chi.$$

因为 $H$ 是群同态的核的交，所以是 $G$ 的闭子群；又因为对任意 $g_1,g_2\in G$，$\chi\in\mathfrak{X}(G)$，有 $\chi(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1})=\chi(g_1)\chi(g_2)\chi(g_1)^{-1}\chi(g_2)^{-1}=1$，所以 $(G,G)\subset H$，从而 $H$ 在 $G$ 中正规，且商群 $G/H$ 是 Abel 群．此外，$H$ 含有 $G$ 的所有幂么元，这是因为幂么元 $u$ 只有特征值 1，从而对任何 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 均有 $\chi(u)=1$．由此可见，$G/H$ 是只由半单元组成的 Abel 群，即可对角化群．据上段证明，$\mathfrak{X}(G/H)$ 是有限生成的．但我们可以建立群同构 $\mathfrak{X}(G)\cong\mathfrak{X}(G/H)$：群同态 $G\to G/H$ 导出了群同态 $\mathfrak{X}(G/H)\to\mathfrak{X}(G)$；反过来，$\mathfrak{X}(G)$

的每个元素在$H$上都是平凡的，从而都可以导出 $\mathfrak{X}(G/H)$ 的一个元素，这样建立的映射 $\mathfrak{X}(G)\to\mathfrak{X}(G/H)$ 显然与上面的群同态互逆. 据此，我们证明了 $\mathfrak{X}(G)$ 是有限生成的.

(3) 只要再证当$G$连通时 $\mathfrak{X}(G)$ 无挠. 设 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$，则 $\chi(G)$ 连通，从而 $\chi(G)=\mathbf{G}_m$ 或 $\{1\}$. 若 $\chi(G)=\{1\}$，则 $\chi=0$；若 $\chi(G)=\mathbf{G}_m$，则

$$(n\chi)(G)=\{a^n\mid a\in\mathbf{G}_m\}=\mathbf{G}_m,$$

所以 $n\chi\neq 0$，对所有 $n\in\mathbf{Z}$.

(4) 设$H$如(2)的证明. 当$G$是幂么群或 $G=(G,G)$ 时，我们已经知道 $G\subset H$，从而只能 $G=H$，于是 $\mathfrak{X}(G)\cong\mathfrak{X}(G/H)=0$. 现在设$G$连通可解，则 $G=T\ltimes R_u(G)$，这里 $R_u(G)$ 为$G$的幂么根基（以后同，不再说明），且(2)中已证 $R_u(G)\subset H$，故$G$的特征标限制到$T$与$T$的特征标提升到$G$给出了 $\mathfrak{X}(G)$ 与 $\mathfrak{X}(T)$ 的同构.

(5) ⇒：(1)结合(2)的证明的前半部分即得.

⇐：取 $\mathfrak{X}(G)$ 的一组生成元 $\{\chi_1,\cdots,\chi_n\}$，则它们也生成 $\mathscr{K}[G]$. 定义

$$\begin{aligned}\varphi: G &\longrightarrow \overbrace{\mathbf{G}_m\times\mathbf{G}_m\times\cdots\times\mathbf{G}_m}^{n\text{个}}\\ g &\longmapsto (\chi_1(g),\chi_2(g),\cdots,\chi_n(g)).\end{aligned}$$

$\varphi$是代数群同态. 若 $g\in\operatorname{Ker}\varphi$，则 $\chi_i(g)=\chi_i(1)$，从而对所有 $f\in\mathscr{K}[G]$ 均有 $f(g)=f(1)$，推及 $g=1$. 由此可见$\varphi$是内射. 因此我们可以得出两点结论：i) $G$是 Abel 群；ii) $G$由半单元组成（否则，$G$有幂么元 $u\neq 1$，则 $\varphi(u)$ 也是个 $\neq 1$ 的幂么元，矛盾）. 这两点即表明$G$是可对角化群.

(6) ⇒：据(3)与(5).

⇐：据(5)，只要再证$G$连通，但这是显然的，因为 $\mathscr{K}[G]$ 为自由 Abel 群 $\mathfrak{X}(G)$ 的群代数[1]，必定是整区.

---

1) 在本书中，群代数指的是以群的元素为基并且基元素之间的乘法就是群运算的代数，而不是指群上的函数所成的代数.