工商数量分析系列教材

（一）

线性代数 概率统计

（第二版）

张宝珊 编

南京航空学院

1990.11.

工商数量分析系列教材

（一）

线性代数 概率统计

（第二版）

张 宝 珊 编

南 京 航 空 学 院

1990. 11.

内 容 简 介

本书是《工商数量分析》系列教材的第一册，简明且系统地介绍了线性代数和概率统计，为学习现代管理方法提供必备的、较为有用的基础知识。内容包括行列式、矩阵及其运算、向量、线性方程组、概率的基本概念和基本定理、随机变量及其分布和随机变量的数字特征、参数估计、假设检验和回归分析等。

本书通俗易懂，联系实际，着重培养学生的分析和解决实际问题的能力。本书可作为管理、财经、工科等有关的专业及管理干部培训教材或参考书。

《工商数量分析》第二册包括线性规划和目标规划，第三册包括网络技术，量本利分析，市场预测，经营决策，存贮论和投入产出等数量分析的内容。

工商数量分析系列教材（一）

线性代数　概率统计

张宝珊编

南京航空学院出版

（南京市御道街29号）

邮政编码 210016

南京航空学院印刷厂印刷

1989年11月第一版　1990年11月第二版

开本：787×1092毫米 1/16　印张 11.8

印数：501-1100册　字数：278.6千字

J91-3-02　定价：5.90元

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率统计

第一篇　线性代数

在经济、管理和工程技术活动中，大量存在着或近似地存在着变量之间的线性关系。线性代数主要是研究变量间的线性关系。为了便于研究变量间的线性关系，1850 年西尔威斯特（Sylvester）提出矩阵概念，1858 年凯利（Cayley）建立了矩阵运算规则，对矩阵的认识和运用日益加深，并在经济、管理和工程技术方面得到了广泛的应用和充分的发展。

本篇主要内容有行列式、矩阵及其运算、向量、线性方程组等。矩阵是全篇主要内容，用它解决线性方程组求解，为学习线性规划打下了基础。

第一章　行列式

§1-1　基本概念

一、二元线性方程组与二阶行列式

例 1-1　某厂生产 A、B 两种产品。单位产品所需资源及现有资源如表 1-1。

表 1-1

资源＼产品	A	B	现有资源
C	4	1	11
D	2	3	13

要求恰好用完现有的资源，问该厂应生产 A、B 两种产品各多少？

解：设生产产品 A、B 的数量分别为 x_1、x_2，上述问题可以写成二元线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法消去 x_1 或 x_2 后，解得 $x_1=2$、$x_2=3$。

用一般的数学表达式，上述类型的问题可以写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-2}$$

式中：a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$是变量 x_j $(j=1,2)$的系数，b_i $(i=1,2)$是常数项。i 称为行标，表示第 i 个方程；j 称为列标，表示第 j 个变量 x_j 的系数。例如，a_{21}表示第 2 个方程中 x_1 的系数。用消元法消去 x_2 得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同样，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-3}$$

为了便于记忆，现在来研究一下(1-3)式的结构，找出它的规律。从(1-3)式可看出 x_1,x_2 的分母是相同的，都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，不含方程组(1-2)右端的常数项 b_1,b_2，只是由方程组(1-2)的系数所确定。现将这些系数按它们在方程组中原位置写出，并在两侧各加一直线，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-4}$$

符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式。横的叫行，竖的叫列，它含有两行、两列。a_{ij}叫行列式的元素，是第 i 行第 j 列元素。行列式有两条对角线，一条是从左上角至右下角，称为主对角线，另一条是从右上角至左下角，称为副对角线。见图 1-1。(1-4)式右端第一项 $a_{11}a_{22}$是主对角线上两个元素的乘积，取正号；第二项 $a_{12}a_{21}$是副对角线上两个元素的乘积，取负号。

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组(1-2)的系数行列式，记作 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

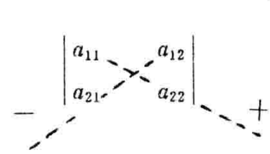

图 1—1

从(1-3)式右端分子可知，将 a_{11},a_{21}依次换为 b_1,b_2 就得到 x_1 的分子，将 a_{12},a_{22}换成 b_1,b_2 就得到 x_2 的分子，分别用 D_1,D_2 来表示它们。即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

于是(1-3)式可写成

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{1-5}$$

这样，用二阶行列式表示二元线性方程组(1-2)的解，既简单，又便于记忆。这里必须指出，(1-5)式只有当 $D\neq 0$ 时，(1-2)式有唯一确定的解，由(1-5)式表示。

现在用行列式解例 1-1 中的(1-1)式。即求解

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$$

解：

$$\because \quad D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 13 = 20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 52 - 22 = 30$$

$\therefore$ 由公式(1-5)得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{20}{10} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{30}{10} = 3。$$

二、三阶行列式

用二阶行列式解二元线性方程组的方法，可推广用三阶行列式解三元线性方程组。先定义三阶行列式。

定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式。可用对角线法求得，见图 1-2。

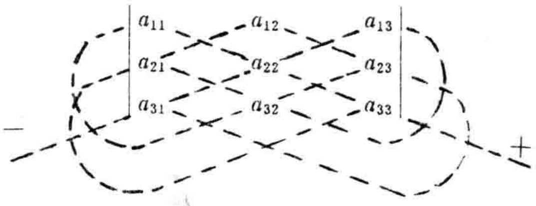

图 1-2

例 1-2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{aligned} D &= 1\cdot5\cdot9 + (-2)\cdot(-6)\cdot7 + 3\cdot(-4)\cdot(-8) - 3\cdot5\cdot7 \\ &\quad - (-2)\cdot(-4)\cdot9 - 1\cdot(-6)\cdot(-8) \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0 \end{aligned}$$

§ 1-2 行列式的性质

将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行与列对换，所得的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D' 等值（$D=D'$）。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

利用对角线法计算等式两边的行列式的值可得到验证。

由此可知，在行列式中，行与列具有同等地位。因此，对行成立的性质，对列也一定成立；反之也对。

性质 2 在行列式中，两行（或列）对调，其绝对值不变，仅改变符号。

例如，第一行与第三行对调，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

此性质用对角线法容易证实。

性质 3 在行列式中，有两行（或列）相同，其值为零。

例如，第一行与第二行相同，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在 D_1 中将第一行与第二行对调，行列式 D_1 不变，但另一方面由性质 2 知，它应改变符号。因此，得 $D_1=-D_1$，即 $2D_1=0$，$\therefore D_1=0$。

性质 4 把行列式的某行（或列）的所有元素同乘以某一数 k，等于以数 k 乘这个行列式。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

事实上，如果按对角线法计算左端的行列式，所得各项都有因子 k，提出公因子 k 后，所

剩下的多项式刚好是右端行列式的值。

由此可得：

推论 1　行列式中某行(或列)各元素的公因子可以提到行列式记号的外边。

推论 2　行列式中如果有一行(或列)的元素全部为零,则此行列式等于零。

性质 5　在行列式中,如果有两行(或列)对应元素成比例,则此行列式等于零。

例如,下述行列式由性质 4 和性质 3 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$$

性质 6　在行列式中,如果某行(或列)的各元素是两项之和,则此行列式等于两个行列式之和。

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

事实上,如果按对角线法计算左端行列式,所得各项都含有两项式作为它的因子,乘开两项后,含有 a_{11}, a_{12}, a_{13}的各项,即得到右端第一个行列式,含有 b_{11}, b_{12}, b_{13}的各项,即得到右端第二个行列式。

性质 7　把行列式的某行(或列)各元素同乘以一个数后,加到另一行(或列)对应的元素上,行列式的值不变。

例如,第一列各元素同乘以 k 后加到第二列上,由性质 6 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

上式右端第二个行列式中有两列对应元素成比例,由性质 5,右端第二个行列式等于零,于是得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§1-3　行列式按行(或列)展开

现在利用上节行列式的性质来简化行列式的计算。为此,先引入余子式和代数余子式两个新概念。

余子式:把行列式中某一元素所在的行和列划去后,留下来的行列式称为这个行列式对应于该元素的余子式。例如,行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

对应于元素 a_{23} 的余子式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

对应于元素 a_{31} 的余子式为

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

代数余子式：设行列中某一元素所在行数为 i，列数为 j，将对应于该元素的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子称为该元素的代数余子式。例如，行列式 D 中，对应于元素 a_{23} 的代数余子式（记作 A_{23}）为

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

对应于元素 a_{31} 的代数余子式（记作 A_{31}）为

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

一般地，元素 a_{ij} 的代数余子式用 A_{ij} 表示。

定理 1 行列式等于它的任意一行（或列）的所有元素与它们对应的代数余子式乘积的和。即按行展开有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j}$$

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}A_{3j}$$

按列展开有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1}$$

$$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2}$$

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = \sum_{i=1}^{3} a_{i3}A_{i3}$$

证明 只证明第一个式子其余五个式证明方法完全相同。

用对角线法展开 D，把含有元素 a_{11}、a_{12}、a_{13} 的项分别括在一起，并将公因子 a_{11}、a_{12} 和 a_{13} 提出得

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

例 1-3 将例 1-2 中的行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{vmatrix}$$

按第二行展开，并计算它的值。

解：

$$D=(-4)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -8 & 9\end{vmatrix}+5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix}+(-6)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 7 & -8\end{vmatrix}$$

$$=4\cdot(-18+24)+5\cdot(9-21)+6\cdot(-8+14)$$

$$=24-60+36$$

$$=0$$

结果与例 1-2 用对角线法计算的结果相同。

定理 2 行列式某一行(或列)的各元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零。即

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{2j}=0$$

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{3j}=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}a_{2j}A_{1j}=0;\qquad \sum_{j=1}^{3}a_{2j}A_{3j}=0\text{ 等等。}$$

证明 只需证明第一个等式，其余的等式证明方法完全相同。

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$$

$$=a_{11}(-1)\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0$$

后一个三阶行列式按第二行展开即得上式，此三阶行列式有两行对应元素相同，故其值为零。

归纳定理 1 和定理 2 可得

$$\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}\tag{1-6}$$

$$\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}D, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}\tag{1-7}$$

例 1-4 利用行列式性质计算行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

解：将第 1 行加到第 2 行上去，再将第 1 行乘以(−2)加到第三行上去，再按第二列展开得

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 6 & 0 & 5\\ -3 & 0 & -7\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)\begin{vmatrix}6 & 5\\ -3 & -7\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & -7\end{vmatrix}+0\cdot(-1)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot(-42+15)$$

$$=27$$

§1-4 高阶行列式

二阶和三阶行列式的概念，可类似地推广到四阶或更高阶的行列式。在§1-2中，有关三阶行列式的性质，以及§1-3中行列式按行（或列）展开的方法，对任意阶行列式也完全成立。但必须注意，对于四阶及更高阶的行列式，在§1-1中所讲的对角线法此处不适用，只能用按行（或列）展开的方法来计算高阶行列式。如果先利用性质7，使同一行（或列）中一些元素为零，则计算变得更简单些。现在以四阶行列式为例说明如下。

例1-4 四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1 & 4\\ 1 & -4 & 0 & 7\\ 2 & 6 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

(1)按第1列展开；(2)按第二行展开；(3)计算此行列式。

解：

$$(1)D=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4 & 0 & 7\\ 6 & -2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 6 & -2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$+2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ -4 & 0 & 7\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ -4 & 0 & 7\\ 6 & -2 & -3\end{vmatrix}$$

$$(2)D=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 6 & -2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$+0+7\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 6 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

通过上述展开可以看到，如果要用(1)（即按第一列展开）计算，需要计算四个三阶行列式；如果要用(2)（即按第二行展开）计算，因为第二行的元素中有一个零，只需计算三个行列式。如果利用性质7，先在某行（或列）中，除去一个元素外，把其余的元素都化为零（造"0"），然后再按行（或列）展开计算，这样较简单些。

(3)在D中，把第1行乘2加到第3行上，第1行乘(-1)加到第4行上，使$a_{33}=a_{43}=0$，

然后再按第 3 列展开。

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&1&4\\1&-4&0&7\\8&4&0&5\\-1&4&0&-2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-4&7\\8&4&5\\-1&4&-2\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix}1&-1&7\\8&1&5\\-1&1&-2\end{vmatrix}$$

把此三阶行列式的第 2 列加到第一列上，再按第 1 列展开，得

$$D=4\begin{vmatrix}0&-1&7\\9&1&5\\0&1&-2\end{vmatrix}=4\cdot 9(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&7\\1&-2\end{vmatrix}$$

$$=36\cdot(-1)(2-7)$$

$$=180$$

例 1-5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-3&1&0\\1&3&6&7\\3&-5&4&5\\-1&1&2&2\end{vmatrix}$$

解：为了使 D 中第 1 行除 $a_{13}=1$ 外，其余全化为零，把 D 中第 3 列各元素乘以 (-2) 加到第 1 列上，第 3 列各元素乘以 3 加到第 2 列上，然后再按第 1 行展开，得

$$D=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\-11&21&6&7\\-5&7&4&5\\-5&7&2&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-11&21&7\\-5&7&5\\-5&7&2\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}-11&3&7\\-5&1&5\\-5&1&2\end{vmatrix}$$

把此三阶行列式的第 2 行乘以 (-1) 加到第 3 行上，得

$$D=7\begin{vmatrix}-11&3&7\\-5&1&5\\0&0&-3\end{vmatrix}=7\cdot(-3)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-11&3\\-5&1\end{vmatrix}$$

$$=-21\cdot(-11+15)=-84。$$

§1-5 克莱姆(Gramer)规则

在 §1-1 中，对二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$ 时，有唯一确定的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中 D_1, D_2 是把行列式 D 中对应的未知数各系数换成(在等号右端的)常数项后的行列式。

以上这种方法可推广到三元线性方程组及更多变元的线性方程组。现在利用三阶行列式来解三元线性方程组,证明从略。

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-8}$$

若这个方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1-8)有唯一确定的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1-9}$$

其中 D_1、D_2、D_3 是把行列式 D 中对应的未知数各系数换成(在等号右端的)常数项后的三阶行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1—6 解方程组 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -23$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -23$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -46$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -13 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -19 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -13 \\ -2 & -19 \end{vmatrix} = -69$$

$$x=\frac{-23}{-23}=1,\quad y=\frac{-46}{-23}=2,\quad z=\frac{-69}{-23}=3$$

如 $D=0$，但 D_1、D_2、D_3 中至少有一个不等于零，则方程组(1-8)无解。因为 x_1、x_2、x_3 取任何值都不能满足方程组(1-8)。

例 1-7 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases}$$

解：

$$\because D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,\qquad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

上述方程组无解。这两个方程是矛盾的，x_1、x_2 取任何值都不满足上述两个方程式。

如果 $D=0$，且 $D_1=D_2=D_3=0$，则方程组(1—8)可能无解，也可能有无穷多个解。

例 1-8， 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$ 同样 $D_1=D_2=D_3=0$

显然，这三个方程是彼此矛盾的，因而无解。

例 1-9 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0,\qquad \text{同样}, D_1=D_2=D_3=0$$

显然，第一个方程乘 2 得第二个方程，第一个方程乘 3 得第三个方程，要解这个方程组，只要解第一个方程即可。

$$z=1-x-y$$

其中 x、y 可以取任意值，因此，这个方程组有无穷多个解。

§ 1-6 齐次线性方程组

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases} \tag{1-10}$$