现代物理基础丛书 84

量子光场的性质与应用

孟祥国 王继锁 著

科学出版社

现代物理基础丛书　84

量子光场的性质与应用

孟祥国　王继锁　著

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者对近十年取得的系列学研成果进行总结和提炼而写成的. 全书的内容大致分为两部分：一是介绍有序算符内积分法的基本理论, 以及由此建立的连续变量纠缠态表象理论、维格纳算符理论和层析图函数理论等；二是介绍利用有序算符内积分法取得的系列学研成果, 包括新光场量子态的构造、性质与应用, 非高斯量子态的维格纳函数和层析图函数, 两体哈密顿量系统的动力学问题, 量子主方程的热纠缠态法求解以及量子态在噪声通道中的解析退相干演化等.

本书可作为本科生、研究生学习量子力学、量子光学以及量子信息学的补充教材, 又可供高等学校从事量子理论及其相关专业的科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

量子光场的性质与应用/孟祥国, 王继锁著. —北京：科学出版社, 2017.12
(现代物理基础丛书；84)
ISBN 978-7-03-055780-3

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①孟… ②王… Ⅲ. ①量子光学 Ⅳ. ①O431.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 300851 号

责任编辑：周 涵 / 责任校对：杨 然
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2017 年 12 月第一次印刷 印张：13 1/2
字数：273 000

定价：89.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

孟祥国同志积累近十年学研成果写了这部专著《量子光场的性质与应用》，让我来为他写一个序，我不胜荣幸. 祥国出生孟子世家，有传统优良的家族遗风，加上他本人文质彬彬、谦逊祥和、勤学好思、为人忠厚、有情有义，因此，我十分乐意应他之请，写下以下文字.

我认识孟祥国是在 2004 年，应王继锁教授邀请去聊城大学讲学时，他作为聊城大学物理系第一批硕士研究生，坐在下面认真地听讲. 他聪慧好学，对简洁美很敏感，很快地理解了我所讲的有关有序算符内积分法的基本要点，并认识到该方法是一个取之不尽、用之不竭的宝库；而且，很快地写出硕士毕业论文，并被评为山东省优秀硕士学位论文. 孟祥国不满足于此，还专攻我的博士研究生. 在博士求学阶段，他的物理感觉和数学功底有明显的提高，终于成为了一名优秀的青年理论物理学者. 如今，他把近十年的学研成果精练为一本专著，具有系列性，值得同行借鉴与学习. 学量子力学和量子光学的年轻人，不但要领会这本书的创新知识，而且要学习他求学做科研的踏实和坚持，因为这是更难能可贵的.

探索新光场是为了了解光的本性，我经历了五十多年的科研生涯，最惊叹的是，光速不变这个基本事实. 谁最早对光速不变这个事实情有独钟呢？是爱因斯坦，他天才地意识到光速不变与时间的相对性有关. 任何有质量的东西，其速度都是可以改变的. 光速不变说明光子没有静止质量，也就没有惯性，随着光速走是不可能的，否则年龄就不会增加. 只有在比光速小得多的宏观世界里，生活才会有“莫等闲，白了少年头”的感觉.

经典光学的发展史可以说是对光的本性探索的争辩历史，牛顿的光的粒子说和惠更斯的光的波动说相生相克，此消彼长，这期间菲涅耳和麦克斯韦力挺光的波动说. 然而，柳暗花明又一村，到了普朗克发现了量子的时期，爱因斯坦对于光电效应的解释使得光的粒子说重振雄风而为大众接受. 待到汤斯等发明了激光后，不但爱因斯坦的辐射理论得以证实，而且发现了光的新的统计性质，经典光学升华为量子光学，出现了相干态、压缩态等新光场. 但是，光的神秘只是被掀开了一角. 迄今为止，人们还没有完全了解光的本性. 所以这本书研究的新光场有助于我们对光的本性的进一步了解，正如相干态使我们了解激光的本性，单模压缩态使我们了解光的反聚束和亚泊松统计分布，双模压缩态使我们了解连续变量的量子纠缠，等等. 孟祥国介绍的新光场，一旦与实验相结合，有望展现光的新性质，让我们拭目以待.

著书立作是一件既艰难又辛苦的事情，首先要立意创新，其次内容须正确无误.

而有关物理理论的书更要求有前瞻性, 物理结论明晰, 数学推导简洁. 欣慰的是, 这些都在孟祥国的书中得到了很好的体现. 写到此, 我不禁感慨而写了以下几句:

著　书

著书强如填新词, 此中甘苦有谁知.
只求百世千秋后, 书论内容不过时.

是为序.

范洪义

2017 年 8 月写于聊城大学东湖宾馆

前　言

量子光学是近代物理学中十分重要的分支, 又是激光全量子理论深入发展的结果. 它主要研究光场的量子统计特性、光场与物质相互作用的微观过程以及探索具有新特征的量子光场和发展新的量子器件.

20 世纪中后期, Hanbury、Brown 和 Twiss (HBT) 关于光场强度相干性的实验及其量子解释, 以及对激光量子统计性的研究是量子光学创立的重要标志. 在 HBT 干涉实验中, 通过研究两个时空点光强起伏的关联性, 对近代光学中的相干性有了更为本质的认识, 并提出了有关相干性的全新定义. 在量子光学中, 相干性的量子理论引导出了 "相干态" 的概念, 它所描述的是物理上真实的光场量子态. 例如, 当激光器工作在远离阈值以上时, 所产生的激光场就近似为相位缓慢扩散的量子相干态; 而且, 相干态表象作为一种数学工具在粒子物理、统计物理等理论中得到了广泛的应用.

爱因斯坦的光量子论是人类认识光的重要理论, 它不仅揭示了光的粒子性和波动性, 同时也证实了光场本质上就是量子场, 故应用量子理论全面而系统地探讨光场与物质的相互作用是当代量子光学的重要研究内容. 利用激光场及其相关技术, 许多光学效应从量子层次上被揭示出来, 如压缩、亚泊松分布和反聚束效应等. 随着实验技术的提高, 新的光学效应将被进一步发现, 从而不断丰富和发展量子光学.

为了从数学上积分推导出坐标本征态的完备性, 理论物理学家、中国科学技术大学范洪义教授创造性地发展了狄拉克用以阐述量子力学的符号法, 提出了有序算符内积分法 (the technique of integration within an ordered product of operators, IWOP 技术). 实质上, 该方法是把牛顿–莱布尼茨积分规则直接施用于由狄拉克符号组成的投影型算符积分. 此方法的提出不仅能方便寻找新的光场量子态并揭示其存在的新量子光学效应, 而且还使量子力学的表象与变换论得到了别开生面的发展, 尤其是由此提出的连续变量纠缠态表象, 在量子光学与量子信息学中有着广泛而重要的应用. 本书充分利用有序算符内积分法去构造新型的光场量子态及其表象, 深入研究它们的量子统计特性、退相干演化规律以及在量子光学中的应用. 为了让读者充分了解有序算符内积分法的基本要点和深切感受量子力学数理基础的内在美, 作者在介绍学研成果时, 其表述始终秉承由浅入深、由简到繁的原则, 而且还补充了大量有关有序算符内积分法及其初步应用的基础知识, 努力做到让初具量子力学知识的人都有能力阅读此书.

全书内容共 8 章. 第 1 章介绍有序算符内积分法的基本知识, 并由此考察常见

的量子光场、最典型的非经典性质以及相空间维格纳算符理论. 第 2 章介绍连续变量两体纠缠态的基本理论及其在计算双模纠缠态的维格纳函数和求解两体哈密顿量系统的动力学问题中的应用. 第 3 章介绍层析图函数的中介表象和纠缠态表象理论, 并探讨几种非高斯量子态的层析图函数. 第 4 章在双模福克空间构建几类新的双粒子纠缠态, 并讨论它们的性质、制备方案与应用. 第 5 章介绍连续变量热场纠缠态及其在求解量子主方程中的应用, 并探查压缩粒子数态和压缩热态在激光通道中的退相干演化规律. 第 6 章利用热场纠缠态法给出振幅衰减通道主方程的解析解, 并探讨平移热态及其叠加态在此通道中的量子统计特性. 第 7 章构造两类新的多光子调制高斯态, 并集中讨论它们的非经典性、维格纳函数以及在噪声通道中的退相干演化行为. 第 8 章引入一种新的奇偶非线性相干态, 并研究它们的非经典性质、相位概率分布以及一些准概率分布函数.

本书的完成得到了国家自然科学基金委员会和山东省自然科学基金委员会的长期支持, 还得到了台湾大学管希圣教授和浙江大学王晓光教授的帮助, 在此一并表示感谢. 本书初稿完成后, 我的硕士导师、曲阜师范大学博士生导师王继锁教授提出了一些具体修改意见, 我们一起多次研讨、修改. 特别感谢我的博士导师范洪义教授不顾三伏酷暑来到聊城审阅本书并作序. 最后, 还要对聊城大学杨震山教授和梁宝龙副教授、常州工学院王震副教授和江苏理工大学王帅副教授的鼓励、支持与帮助表示感谢.

孟祥国

2017 年 8 月于聊城大学

目　录

第 1 章　用有序算符内积分法探查常见量子光场

本章主要介绍有序算符内积分法的基本知识, 并利用此方法考察和讨论量子光学中常见的量子光场 (如粒子数光场、相干光场、压缩光场和热混沌光场等), 光场最具有代表性的非经典特性 (如压缩特性、反聚束效应、亚泊松分布等), 以及相空间准概率维格纳分布函数.

1.1　有序算符内积分法

有序算符内积分法起初是由范洪义为了完成如下非对称 ket-bra 型算符积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}} \left|\frac{q}{k}\right\rangle \langle q| \tag{1-1}$$

而提出来的(这里 $|q\rangle$ 是坐标算符 Q 的本征态)[1, 2]. 后来, 有序算符内积分法及其相关理论不断地加以完善. 历史上, 狄拉克虽然知道 $\int \mathrm{d}q\,|q\rangle\langle q| = 1$ 是态矢量 $|q\rangle$ 的完备性, 但是它是由狄拉克符号和 δ 函数推导得来的. 而范洪义把它化为正态分布形式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}} :\mathrm{e}^{-(q-Q)^2}: = 1, \tag{1-2}$$

并从数学上真正地实现了此积分 (式中记号 : : 为正规乘积符号, 符号 : : 内部的玻色算符相互对易). 可见, 这种方法是把牛顿–莱布尼茨对普通函数的积分进行了推广, 实现了对狄拉克符号的积分, 这是量子理论的一大进步. 它不仅揭示了量子力学数理结构的内在美, 也发展了量子力学的表象与变换论. 值得强调的是, 利用有序算符内积分法建立的连续变量纠缠态表象, 能更清晰地展现丰富的量子纠缠现象, 其相关理论以及具体应用是本书的主要内容之一. 在量子光学理论中, 有序算符内积分法主要包括以下几种: 正规乘积算符内、反正规乘积算符内以及外尔编序算符内的积分法[3, 4].

1.1.1　正规乘积算符内积分法

为了介绍正规乘积算符内积分法, 这里首先回顾正规乘积的概念与性质. 对于有关玻色算符 a 和 $a^\dagger$ 的任何算符函数 $\mathcal{F}(a, a^\dagger)$,

$$\mathcal{F}(a, a^\dagger) = \sum_i \cdots \sum_n a^{\dagger i} a^l a^{\dagger k} \cdots a^n \mathcal{F}(i, l, k, \cdots, n), \tag{1-3}$$

式中 $i, l, k, \cdots, n$ 为零或正整数, 利用对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 总可以将所有的产生算符 $a^\dagger$ 都挪到所有湮灭算符 a 的左边, 这时 $\mathcal{F}(a, a^\dagger)$ 就排列成正规乘积形式, 用符号 $:\,:$ 进行标记. 关于正规乘积的主要性质有:

(1) 正规乘积 (或符号 $:\,:$) 内部的玻色算符相互对易. 在量子力学中遇到正规乘积的算符时, 可以在各种运算中把符号 $:\,:$ 内的算符作为可对易的参数来处理.

(2) 常数可以自由出入正规乘积符号 $:\,:$.

(3) 在正规乘积内的正规乘积符号 $:\,:$ 是可以取消的, 例如:

$$
\begin{aligned}
:\mathcal{H}(a, a^\dagger)\left[:\mathcal{F}(a, a^\dagger):\right]: &=: \mathcal{H}(a, a^\dagger)\mathcal{F}(a, a^\dagger):, \\
a^{\dagger m}:\mathcal{F}(a, a^\dagger): a^k &=: a^{\dagger m}\mathcal{F}(a, a^\dagger)a^k:.
\end{aligned} \tag{1-4}
$$

(4) 厄米共轭操作可以自由出入符号 $:\,:$, 即

$$
:(\mathcal{V}\cdots\mathcal{W}):^\dagger =: (\mathcal{V}\cdots\mathcal{W})^\dagger:. \tag{1-5}
$$

(5) 正规乘积内部算符函数的和差可拆分, 即

$$
:\mathcal{H}(a, a^\dagger) \pm \mathcal{F}(a, a^\dagger): =: \mathcal{H}(a, a^\dagger): \pm : \mathcal{F}(a, a^\dagger):. \tag{1-6}
$$

然而, 一般情况下, 正规乘积算符的乘积不再是正规乘积形式.

(6) 在正规乘积内部, 玻色算符函数 $\mathcal{F}(a, a^\dagger)$ 满足

$$
\begin{aligned}
\left[a, :\mathcal{F}(a, a^\dagger):\right] &=: \frac{\partial}{\partial a^\dagger}\mathcal{F}(a, a^\dagger):, \\
\left[:\mathcal{F}(a, a^\dagger):, a^\dagger\right] &=: \frac{\partial}{\partial a}\mathcal{F}(a, a^\dagger):.
\end{aligned} \tag{1-7}
$$

对于多模的情况, 上式关系也成立, 即

$$
:\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial}{\partial a_j}\mathcal{F}(a_i, a_j, a_i^\dagger, a_j^\dagger): = \left[\left[:\mathcal{F}(a_i, a_j, a_i^\dagger, a_j^\dagger):, a_j^\dagger\right], a_i^\dagger\right]. \tag{1-8}
$$

(7) 真空态投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积为

$$
|0\rangle\langle 0| =: \exp\left(-a^\dagger a\right):. \tag{1-9}
$$

性质 (7) 的严格证明过程如下. 根据粒子数态的完备性关系, 可得

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n,n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n'| \frac{1}{\sqrt{n!n'!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)^n (z^*)^{n'}\Big|_{z^*=0} \\
&= \exp\left(a^\dagger\frac{\partial}{\partial z^*}\right)|0\rangle\langle 0|\,\mathrm{e}^{z^* a}\Big|_{z^*=0}.
\end{aligned} \tag{1-10}
$$

假设 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积形式为 $:W:$, 并把 $:W:$ 代入式 (1-10) 中, 得到

$$1=\exp\left(a^{\dagger}\frac{\partial}{\partial z^*}\right):W:\ \mathrm{e}^{z^*a}\Big|_{z^*=0}. \tag{1-11}$$

注意到式 (1-11) 中 $:W:$ 的左边恰为产生算符 $a^{\dagger}$, 而右边恰为湮灭算符 a, 故可将 $:W:$ 左右边部分全部挪到正规乘积符号 $::$ 内部, 再利用性质 (1) 和 (3) 完成微分运算, 则有

$$\begin{aligned}1&=:\exp\left(a^{\dagger}\frac{\partial}{\partial z^*}\right)W\ \mathrm{e}^{z^*a}:\Big|_{z^*=0}\\&=:\mathrm{e}^{a^{\dagger}a}W:\ =:\mathrm{e}^{a^{\dagger}a}:W::,\end{aligned} \tag{1-12}$$

于是有

$$:W:\ =:\exp\left(-a^{\dagger}a\right):\ =|0\rangle\langle 0| \tag{1-13}$$

成立, 即式 (1-9) 得证.

(8) 在积分收敛时, 可以对正规乘积内部的常数进行积分或微分运算.

由性质 (7) 与 (8) 可知正规乘积算符内积分法的主要思想: 只要能把非对称 ket-bra 型算符积分 (形如 $\int \mathrm{d}x\,|f(x)\rangle\langle x|$) 化成正规乘积, 考虑到符号 $::$ 内部的玻色算符互相对易, 故可实现对真实的参数进行积分. 值得注意的是, 在积分中以及在积分后都存在符号 $::$, 若想去掉最后算符中的符号 $::$, 则事先把它排列成正规乘积形式.

根据上述对算符函数的积分思想, 我们计算如下关于坐标本征态 $|q\rangle$ 的非对称 ket-bra 型算符积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|. \tag{1-14}$$

利用坐标本征态 $|q\rangle$ 在福克空间的表示

$$|q\rangle=\pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa^{\dagger}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle \tag{1-15}$$

以及真空态投影算符的正规乘积 (1-9), 则式 (1-14) 变为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi k}}\exp\left(-\frac{q^2}{2k^2}+\frac{\sqrt{2}q}{k}a^{\dagger}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)\\&\times:\exp\left(-a^{\dagger}a\right):\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa-\frac{a^2}{2}\right),\end{aligned} \tag{1-16}$$

式中 $:\exp\left(-a^{\dagger}a\right):$ 的左边为产生算符 $a^{\dagger}$, 右边为湮灭算符 a, 因此只要把左边的 $:$ 移到第一个指数左边, 并把右边的 $:$ 移到第三个指数的右边, 即可把整个被

积分的算符函数排成正规乘积形式. 考虑到性质 (1), 玻色算符在符号 $:\ :$ 内是对易的, 则三个 exp 指数函数就可改写为一个 exp 指数, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi k}}:\exp\left[-\frac{q^2}{2}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right.\\
\left.+\sqrt{2}q\left(\frac{a^\dagger}{k}+a\right)-\frac{1}{2}(a+a^\dagger)^2\right]:. \tag{1-17}$$

再利用性质 (8) 对上式积分, 其中算符 $a^\dagger, a$ 在积分过程中视为参数, 可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|\\
=\operatorname{sech} r:\exp\left[-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh r+(\operatorname{sech} r-1)a^\dagger a+\frac{a^2}{2}\tanh r\right]:, \tag{1-18}$$

式中

$$\mathrm{e}^r=k,\quad \operatorname{sech} r=\frac{2k}{k^2+1},\quad \tanh r=\frac{k^2-1}{k^2+1}. \tag{1-19}$$

这样, 我们就对式 (1-14) 中的算符进行了积分. 现在我们把式 (1-18) 中的正规乘积符号 $:\ :$ 去掉, 为此先利用性质 (1)、(5) 和 (8) 导出算符恒等式

$$\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger a}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}|n\rangle\langle n|=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle\langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\\
=\sum_{n=0}^{\infty}:\frac{1}{n!}(\mathrm{e}^{\lambda}a^\dagger a)^n\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:=:\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^\dagger a]:, \tag{1-20}$$

则式 (1-18) 为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|\\
=\exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh r\right)\exp\left[\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{sech} r\right]\exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh r\right). \tag{1-21}$$

若对式 (1-21) 的左右两边同时对参数 r 进行微商, 得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|\right)=\frac{r}{2}\left(a^2-a^{\dagger 2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|, \tag{1-22}$$

再注意到边界条件 $\left.\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|\right)\right|_{k=1}=1$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{k}}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\langle q|=\exp\left[\frac{r}{2}\left(a^2-a^{\dagger 2}\right)\right]\equiv S_1(r). \tag{1-23}$$

可见, 式 (1-21) 中的结果恰好为单模压缩算符 $S_1(r)$ 的展开式. 利用内积 $\langle q|q'\rangle=\delta(q-q')$ 中 δ 函数的筛选性, 容易证明 $S_1(r)$ 为幺正算符

$$
\begin{aligned}
S_1(r)S_1^\dagger(r)&=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}q'}{k}\left|\frac{q}{k}\right\rangle\left\langle\frac{q'}{k}\right|\delta(q-q')\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\,|q\rangle\langle q|=1=S_1^\dagger(r)S_1(r).
\end{aligned}\tag{1-24}
$$

进一步, 利用算符恒等式

$$
\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots,\tag{1-25}
$$

也可导出

$$
\begin{aligned}
S_1(r)aS_1^\dagger(r)&=a\cosh r+a^\dagger\sinh r,\\
S_1(r)a^\dagger S_1^\dagger(r)&=a^\dagger\cosh r+a\sinh r.
\end{aligned}\tag{1-26}
$$

这就是著名的博戈留波夫变换 (也称为压缩变换), 它被广泛地应用于量子光学、超导物理和原子核物理等理论.

1.1.2 反正规乘积算符内积分法

与正规乘积的排序规则相反, 反正规乘积算符要求所有的湮灭算符 a 都挪到所有产生算符 $a^\dagger$ 的左边, 用符号 $\vdots\ \vdots$ 进行标记. 然而, 在符号 $\vdots\ \vdots$ 内部玻色算符遵循的基本性质与在正规乘积符号 $:\ :$ 内很相似. 其主要性质有:

(1) 在反正规乘积符号 $\vdots\ \vdots$ 内的玻色算符对易.

(2) 在反正规乘积符号 $\vdots\ \vdots$ 内的符号 $\vdots\ \vdots$ 可以取消.

(3) 只要积分收敛, 就可对符号 $\vdots\ \vdots$ 内部的 c 数进行积分.

(4) 真空态投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的反正规乘积形式为

$$
|0\rangle\langle 0|=\pi\delta(a)\delta(a^\dagger)=\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^* a^\dagger}.\tag{1-27}
$$

实际上, 利用正规乘积算符内积分法, 我们可以证明上式成立, 即

$$
\begin{aligned}
&\pi\delta(z-a)\delta(z^*-a^\dagger)\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(z-a)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^*(z^*-a^\dagger)}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}:\exp\left[-|\xi|^2-\mathrm{i}\xi(z-a)-\mathrm{i}\xi^*(z^*-a^\dagger)\right]:\\
&=:\exp\left(-|z|^2+z^*a+za^\dagger-aa^\dagger\right):\\
&=|z\rangle\langle z|,
\end{aligned}\tag{1-28}
$$