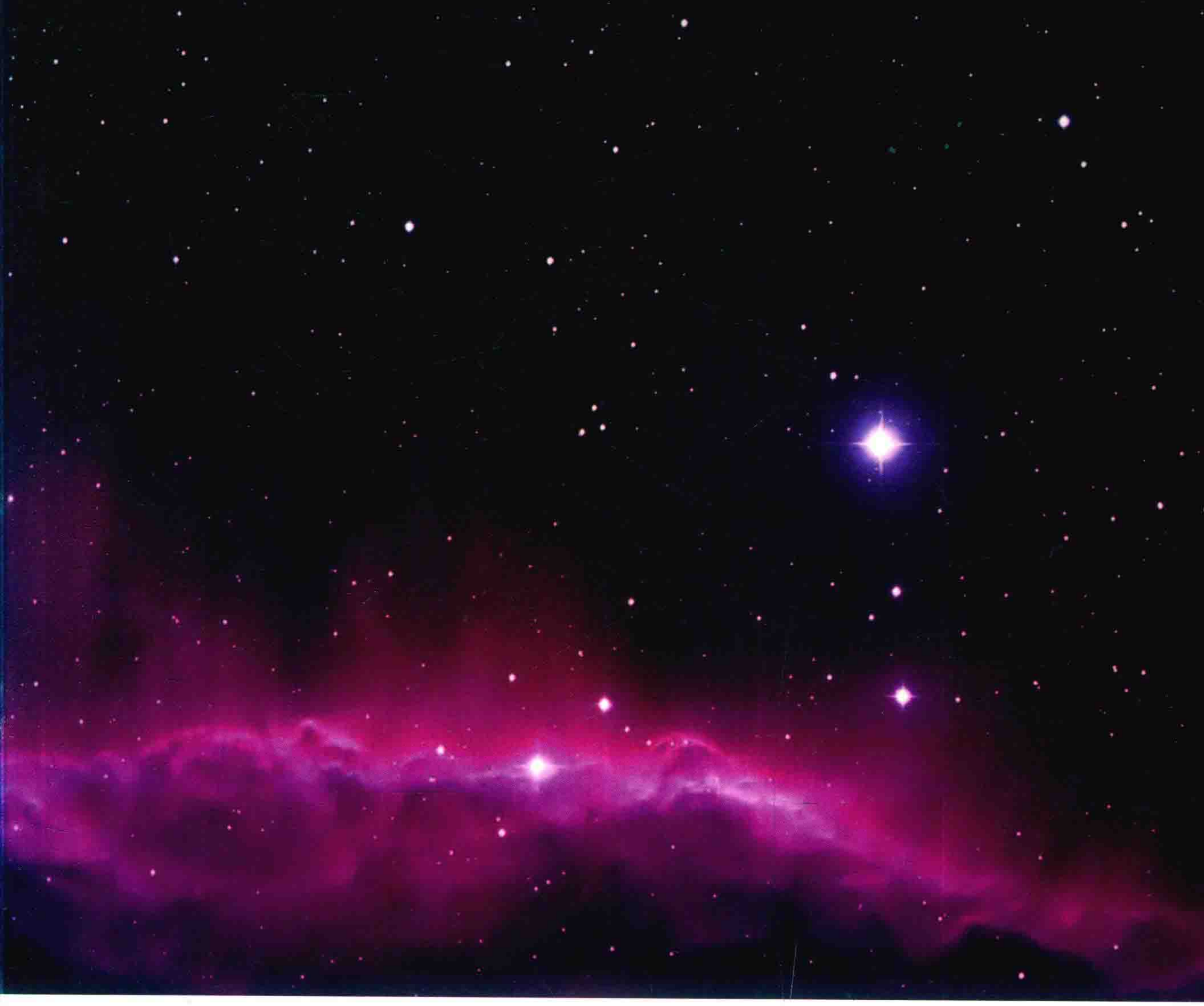

University Physics Study Guide

大学物理学学习指导

主　编　沈黄晋
副主编　祁宁 程莉 王平

高等教育出版社

University Physics Study Guide

大学物理学学习指导

主 编 沈黄晋
副主编 祁宁 程莉 王平

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是一本独立的大学物理学学习指导书,不依赖于某一本特定的主教材,仅在各章内容顺序的安排上与沈黄晋主编的《大学物理学》(上、下册)(高等教育出版社出版)一致。为便于学生自学,快速掌握各章的知识结构、基本内容和解题技巧,各章内容包含五部分:知识点网络框图、基本要求、主要内容、典型例题解法指导、自我测试题。此外,每个自测题都给出了详细的解题过程或解题提要,读者通过扫描相应的二维码,即可在手机上获得详细解答。

本书可作为高等学校理科非物理类专业、工科和医科各专业大学生学习大学物理课程的参考书,特别适合作为大学生期末考试的复习资料。此外,本书对教师的教学也具有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学学习指导 / 沈黄晋主编. -- 北京 : 高等教育出版社,2018. 3

ISBN 978-7-04-049187-6

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①沈… Ⅲ. ①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 326423 号

策划编辑 程福平　　责任编辑 程福平　　封面设计 张志奇　　版式设计 杜微言
责任校对 胡美萍　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	山东鸿君杰文化发展有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	20. 5		
字　数	430 千字	版　次	2018 年 3月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2018 年 3月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	40. 50 元

物 料 号　49187-00

大学物理学学习指导

主　编　沈黄晋
副主编　祁宁 程莉 王平

1　计算机访问http://abook.hep.com.cn/12517511，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2　注册并登录，进入“我的课程”。

3　输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4　单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/12517511

前　言

大学物理学是理科非物理类专业、工科和医科各专业大学生的一门重要的基础课。学好大学物理对于培养学生的科学思维方法、提高学生的科学素质、提高学生分析问题和解决问题的能力等方面具有十分重要的作用。但是由于大学物理涉及的内容广泛、规律很多、概念抽象，力、热、电、光和近代物理中各部分的研究方法差异很大，而且还要使用大量高等数学知识，许多大学生在理解物理概念、掌握物理规律尤其是在求解习题上感到特别困难，往往无从下手。到了期末复习时，许多学生拿着厚厚的教材望而生畏。为此，我们根据多年的教学经验编写了这本《大学物理学学习指导》，希望本书能对读者学习大学物理课程有较大的帮助，更希望本书能成为大学生期末复习的好帮手。

本书是一本独立的大学物理学习指导书，不依赖于某一本特定的主教材，仅仅在各章内容顺序的安排上与沈黄晋主编的《大学物理学》(上、下册)(高等教育出版社出版)一致。为便于学生自学，快速掌握各章的知识结构、基本内容和解题技巧，各章内容按照下述五点展开。

(一) 知识点网络框图——它是对各章基本概念、基本原理、基本规律进行归纳和总结的有效形式，可以使学生一目了然地了解各章的知识结构和各知识点之间的相互联系。

(二) 基本要求——参考《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010 年版)，对各部分内容的学习要求按照熟练掌握、掌握、理解和了解进行划分，使学生学习时能够抓住重点、做到心中有数，集中精力攻克需要掌握和理解的内容。

(三) 主要内容——各章都用 3~5 页的篇幅对主要内容进行归纳和总结，同时指出了各物理规律的适用范围和应用条件。结合知识点网络框图，能够使学生快速而准确地掌握各章的知识体系、基本概念和基本规律。

(四) 典型例题解法指导——将各章习题分成若干类型，给出了各类题型的解题思路和方法，并结合典型例题作分类指导，以帮助学生掌握和巩固基本概念和基本规律。

(五) 自我测试题——各章的自测题主要配置了选择题、填空题和计算题三种题型，还有少量的证明题。此外，每个自测题都给出了详细的解题过程或解题提要，读者通过扫描相应的二维码，即可在手机上获得详细解答。

参加本书编写的人员有沈黄晋、祁宁、程莉、王平、黄慧明、艾志伟。在编写过程中，我们还得到了梁荫中、徐斌富等老教师的大力支持和帮助，也得到了武汉大学物理科学与技术学院的大力支持，在此一并表示感谢！

编　者

2017 年 11 月

目 录

第1章

质点运动学

一、知识点网络框图

质点运动学

- **描述质点运动状态的两个基本物理量**
  1. 位置矢量
     $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$
     $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
  2. 速度
     $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$
     直角坐标系中的表示：
     $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$
     大小：$v=|\boldsymbol{v}|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$
     自然坐标系中的表示
     $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$
- **描述质点运动状态变化的物理量**
  1. 位移
     $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$
  2. 加速度
     $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$
     直角坐标系中的表示
     $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$
     自然坐标系中的表示
     $\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$
- **圆周运动的线量与角量**
  1. 圆周运动的角量
     角位移：$\mathrm{d}\theta$
     角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
     角加速度：
     $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
  2. 角量与线量的关系
     $\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$
     $v=R\omega$
     $a_t=R\alpha$
     $a_n=R\omega^2$
- **相对运动**
  $\boldsymbol{r}_{OP}=\boldsymbol{r}_{OO'}+\boldsymbol{r}_{O'P}$
  $\boldsymbol{v}_{OP}=\boldsymbol{v}_{OO'}+\boldsymbol{v}_{O'P}$
  $\boldsymbol{a}_{OP}=\boldsymbol{a}_{OO'}+\boldsymbol{a}_{O'P}$

二、基本要求

1. 熟练掌握描述质点运动的物理量：位置矢量、位移、速度、加速度；理解它们的矢量性、瞬时性和相对性.

2. 学习并掌握矢量运算、微积分运算在大学物理中的应用，熟练掌握运动学中两类基本问题（微分类问题和积分类问题）的求解方法.

3. 理解运动的相对性，掌握相对运动问题的处理方法.

三、主要内容

（一）描述质点运动的物理量

1. 位置矢量和运动学方程

从坐标原点指向质点所在位置的有向线段称为位置矢量，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

其大小和方向余弦分别为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\quad \cos\beta=\frac{y}{r}\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

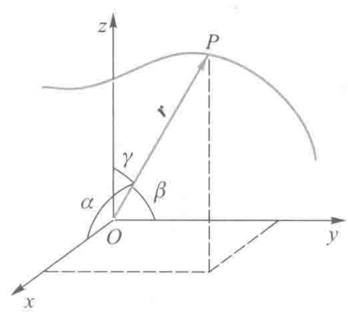

图 1.1　位置矢量

质点运动时，位置矢量随时间变化的函数关系称为质点的运动学方程，其矢量式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

运动学方程在直角坐标系中的分量式为

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

若将分量式中的参量 t 消去，即可得质点运动的轨迹方程

$$F(x,y,z)=0$$

2. 位移和路程

设在 t 时刻质点位于位置 A，在 $t+\Delta t$ 时刻位于 B，则从 A 指向 B 的有向线段称为质点在这 Δt 时间内的位移，用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示，即

$$\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

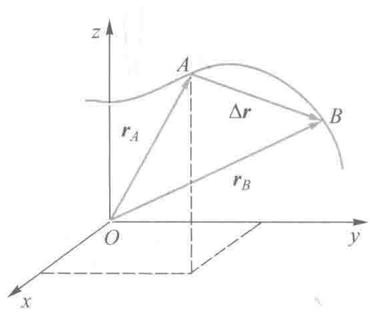

图 1.2　位移

质点从 A 到 B 轨迹的实际长度 $\Delta s=\widehat{AB}$ 称为质点在 Δt 时间内所经历的路程. 一般情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，且 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$.

3. 速度和速率

平均速度：$\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$　　　　平均速率：$\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\neq|\overline{\boldsymbol{v}}|$

瞬时速度：$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　　　　瞬时速率：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|$

速度在角坐标系中的表示式为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

瞬时速度的大小就是瞬时速率,即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

4. 加速度及其在直角坐标系中的表示

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

(二) 圆周运动中的角量表示

1. 角位置:$\theta=\theta(t)$
2. 角位移:$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$
3. 角速度:$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
4. 角加速度:$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
5. 切向加速度与法向加速度

当质点作圆周运动或其他平面曲线运动时,可将加速度沿曲线的切线和法线方向作正交分解,如图 1.4 所示. 其相应的两个分量分别称为切向加速度和法向加速度,其大小分别为

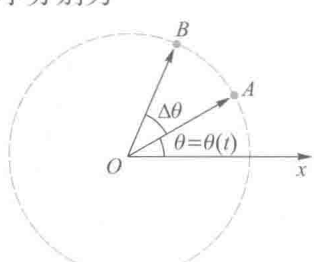

图 1.3 圆周运动的角量表示

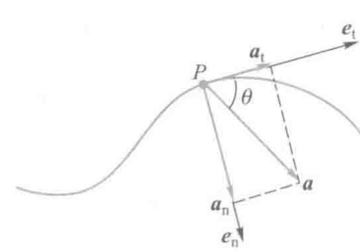

图 1.4 切向与法向加速度

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

总加速度为

$$\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

切向加速度只能改变速率的大小,法向加速度只能改变速度的方向. 在一切直线运动中,法向加速度为零,在一切匀速率曲线运动中切向加速度为零.

6. 角量与线量的关系

当质点在一个给定的圆周上作圆周运动时,质点的运动既可以用一组角量(θ、$\Delta\theta$、ω、α)来表示,也可以用一组线量(Δs、v、a_t、a_n)来表示,它们之间的关系为

$$\Delta s=R\Delta\theta,v=R\omega,a_t=R\alpha,a_n=R\omega^2$$

(三)相对运动

在两个相互作平动的参考系中,建立两个坐标系,质点相对于这两个坐标系的位置矢量、速度、加速度之间的变换关系为

$$\boldsymbol{r}_{PO}=\boldsymbol{r}_{PO'}+\boldsymbol{r}_{O'O}$$
$$\boldsymbol{v}_{PO}=\boldsymbol{v}_{PO'}+\boldsymbol{v}_{O'O}$$
$$\boldsymbol{a}_{PO}=\boldsymbol{a}_{PO'}+\boldsymbol{a}_{O'O}$$

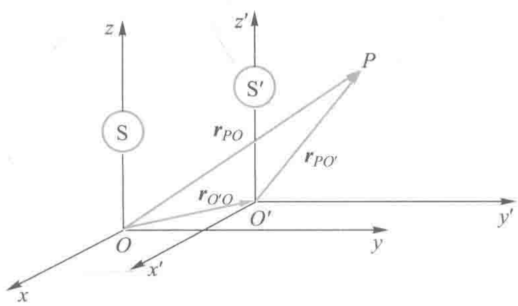

图 1.5 相对运动

四、典型例题解法指导

本章习题大致可分为两种基本类型.

第一类:求导类型的问题

已知质点的运动学方程 $\boldsymbol{r}(t)$(通常可由已知条件或几何关系得到),求任意一段时间内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、路程 Δs、任意时刻的速度 $\boldsymbol{v}(t)$、加速度 $\boldsymbol{a}(t)$(包括切向加速度和法向加速度)等. 这类问题原则上可以利用速度和加速度定义,通过矢量运算和求导运算求解.

第二类:积分类型的问题

已知质点在任意时刻的运动速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和初始位置 $\boldsymbol{r}_0$,求质点的运动学方程 $\boldsymbol{r}(t)$;或已知任意时刻的加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ 及初始速度 $\boldsymbol{v}_0$,求质点在任意时刻的速度 $\boldsymbol{v}(t)$. 这类问题从本质上来说是求解微分方程的问题,一般情况下可以通过分离变量,应用积分运算来求解,即

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}(t)\,\mathrm{d}t \quad 和 \quad \int_{r_0}^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t$$

此外,我们还必须考虑速度和加速度的瞬时性、矢量性和相对性,所以实际求解时(特别是作积分运算时),首先要选择一个恰当的坐标系,然后针对坐标系中的

各分量式进行计算,使问题简化.

例 1.1 已知一个质点在 Oxy 平面内作曲线运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r}=(3+4t)\boldsymbol{i}+(4+4t-5t^2)\boldsymbol{j}$(SI 单位). 试求:

(1) 质点在前 3 s 内的位移和平均速度;

(2) 质点在任意时刻的速度和加速度;

(3) 在任意时刻质点的切向加速度和法向加速度的大小.

分析: 本题属于第一类问题,可以通过矢量代数和求导运算来求解.

解: (1) 由题意可知 $t=0$ 和 $t=3$ s 时,质点的位置矢量分别为:$\boldsymbol{r}(0)=(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})$ m 和 $\boldsymbol{r}(3)=(15\boldsymbol{i}-29\boldsymbol{j})$ m,所以质点在前 3 s 内的位移和平均速度分别为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(3)-\boldsymbol{r}(0)=(12\boldsymbol{i}-33\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{12\boldsymbol{i}-33\boldsymbol{j}}{3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=(4\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=4\boldsymbol{i}+(4-10t)\boldsymbol{j}\ (\text{SI 单位})$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-10\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(3) **解法一** 由任意时刻的速度表达式,可得任意时刻速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4^2+(4-10t)^2}=\sqrt{100t^2-80t+32}$$

再由切向加速度的定义,可得质点在任意时刻的切向加速度的大小为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{100t-40}{\sqrt{100t^2-80t+32}}$$

又由 $a^2=a_t^2+a_n^2$,且由(2)问可知:$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,所以质点的在任意时刻的法向加速度的大小为

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\frac{40}{\sqrt{100t^2-80t+32}}$$

解法二 (解题提示:利用矢量标量积的运算规则和切向加速度的物理意义来求解.)

因为:$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=va\cos\theta=va_t$,所以

$$a_t=a\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{v}$$

余下的运算请读者自己完成.

例 1.2 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$,其中 a、b、ω 均为常量. 试求:

(1) 质点的速度和加速度的表达式;

（2）质点在任一时刻的切向加速度的大小；

（3）质点的轨迹方程.

分析：本题属于运动学中的第一类问题，运用求导运算来求解.

解：（1）质点的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\ \omega t\boldsymbol{i}+b\omega\cos\ \omega t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\ \omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\ \omega t\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

这表明该质点加速度的方向总是与位置矢量的方向相反，并指向坐标原点.

（2）由(1)问可知该质点速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(a\omega\sin\ \omega t)^2+(b\omega\cos\ \omega t)^2}$$

所以由切向加速度的定义，可得切向加速度的大小为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{a^2\omega^3\sin\ \omega t\cos\ \omega t-b^2\omega^3\sin\ \omega t\cos\ \omega t}{\sqrt{(a\omega\sin\ \omega t)^2+(b\omega\cos\ \omega t)^2}}=\frac{(a^2-b^2)\omega^3\sin\ 2\omega t}{2\sqrt{(a\sin\ \omega t)^2+(b\cos\ \omega t)^2}}$$

（3）由题意可知质点运动的参数方程为：$x=a\cos\ \omega t$，$y=b\sin\ \omega t$，消去参量 t，可得轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

例 1.3　如图 1.6 所示，路灯距离水平地面的高为 H，一个身高为 h 的人在地面上从路灯的正下方开始以速度 v_0 沿直线匀速行走. 试求：

（1）在任意时刻，人影中头顶的移动速度；

（2）影子长度增长的速率.

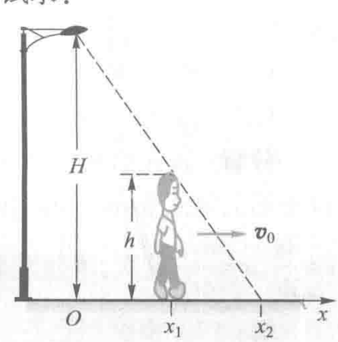

图 1.6　例 1.3 图

分析：本题需要借助几何关系来建立运动学方程，然后求相应的各个物理量.

解：（1）以地面上路灯正下方为坐标原点，人的运动方向为 x 轴正方向. 由题意可知：在 t 时刻，人的位置坐标为 $x_1=v_0t$，由几何关系可得人影中头顶的坐标为

$$x_2=\frac{H}{H-h}x_1$$

所以人影中头顶的移动速度为

$$v_2=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}v_0$$

（2）由图可知，任意时刻人影的长度为

$$L=x_2-x_1=\frac{h}{H-h}x_1$$

所以影子长度增长的速率为

$$v_L=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{H-h}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{H-h}v_0$$

例 1.4 一质点沿半径为 R 的圆周运动,其运动学方程为 $\theta=bt+ct^2$,其中 b、c 都是大于零的常量. 试求:从 $t=0$ 开始到切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间.

分析: 本题要根据圆周运动的特征,并利用角量与线量的关系来求解,仍然属于质点运动学中的第一类问题.

解: 由题意可知质点作圆周运动时的角速度和角加速度分别为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=b+2ct,\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=2c$$

由角量与线量的关系,可知切向和法向加速度的大小分别为

$$a_{\mathrm{t}}=R\alpha=2cR,a_{\mathrm{n}}=R\omega^2=R\,(b+2ct)^2$$

令 $a_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}$,即

$$2cR=R(b+2ct)^2$$

解之可得经历的时间为

$$t=\frac{\sqrt{2c}-b}{2c}$$

例 1.5 一质点沿 x 轴正向运动,其速度为 $v=\alpha\sqrt{x}$,式中 α 为正的常量. 已知 $t=0$ 时,$x=0$. 试求:

(1) 该质点的运动方程以及速度和加速度随时间的变化规律;

(2) 质点从坐标原点($x=0$)运动到任意位置 x 的过程中的平均速度.

分析: 首先这是一个一维直线运动问题. 在一维直线运动中,所有矢量均可以不用矢量式表示,而是用有正负号的代数量表示,其方向体现在正负号中,即:$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 其次,本题既有积分问题也有微分问题.

解: (1) 根据题意有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha\sqrt{x} \qquad ①$$

将①式分离变量,并在等式两边同时作定积分有(注意:积分下限为两个变量在初始时刻或某个给定时刻的值,积分上限为两个变量在任意时刻的值.)

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\int_0^t\alpha\mathrm{d}t \qquad ②$$

积分可得质点的运动方程为

$$x=\frac{\alpha^2}{4}t^2 \qquad ③$$

质点速度随时间的变化规律为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha^2}{2}t$$

加速度随时间的变化规律为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha^2}{2}$$

(2) **解法一** 由③式可知,质点从 $x=0$ 运动到 x 处所需的时间为:$\Delta t=t=2\sqrt{x}/\alpha$,所以由平均速度的定义,可得这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x}{2\sqrt{x}/\alpha}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{x}$$

解法二 由(1)可知,质点的加速度 a 为常量,即质点作匀加速直线运动,又质点在 $x=0$ 处,$v_0=0$;在 x 处 $v=\alpha\sqrt{x}$,故质点从 $x=0$ 处,运动到 x 处的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{v+v_0}{2}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{x}$$

例 1.6 已知一质点沿 x 轴作直线运动,其加速度为 $a=5+2t$(SI 单位). 在 $t=0$ s 时,$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,$x=-5$ m. 试求质点在任意时刻的速度和位置.

分析: 本题属于质点运动学中的第二类问题,根据速度、加速度的定义首先得到一个微分方程,通常可以通过分离变量用积分法进行求解. 另外本题属于一维直线运动问题,所以各矢量可以不用矢量式表示,其方向用正负号表示.

解: 由已知条件可知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=5+2t$$

对上述微分方程进行分离变量,然后在等式两边同时取定积分,即

$$\int_2^v \mathrm{d}v=\int_0^t (5+2t)\,\mathrm{d}t$$

积分可得该质点的速度为

$$v=2+5t+t^2(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

又因 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2+5t+t^2$,再次分离变量,并取定积分,即

$$\int_{-5}^x \mathrm{d}x=\int_0^t (2+5t+t^2)\,\mathrm{d}t$$

所以质点在任意时刻的位置为

$$x=-5+2t+\frac{5}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3(\mathrm{m})$$

例 1.7 一质点沿 y 轴作直线运动,其加速度为 $a=a_0-ky$,已知 $t=0$ 时,$y=0$,$v=v_0$. 试求:

(1) 质点的速度与位置的函数关系;

(2) 质点运动的最大速率.

分析: 本题中加速度是位置坐标的函数,由加速度的定义可得微分方程的形式为:$a=\dfrac{dv}{dt}=a_0-ky$,显然该方程不能直接进行分离变量,所以先要进行变量替换再求解. 因为 $a(y)=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}$,再分离变量可得 $v\mathrm{d}v=a(y)\mathrm{d}y$,积分 $\int a(y)\mathrm{d}y=\int v\mathrm{d}v$ 可求出 $v=v(y)$.

解: (1) 因为:$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}$,所以由题意可得

$$v\frac{dv}{dy}=a_0-ky$$

对上式分离变量并作定积分,即

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v=\int_0^y (a_0-ky)\mathrm{d}y$$

积分可得质点的速度与位置坐标的函数关系为

$$v=\pm\sqrt{v_0^2+2a_0y-ky^2} \quad ①$$

(2) 令:$\dfrac{dv}{dy}=\pm\dfrac{a_0-ky}{\sqrt{v_0^2+2a_0y-ky^2}}=0$,可得速率最大的位置为:$y=\dfrac{a_0}{k}$,将此代入①式,可得最大速率为

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{a_0^2}{k}}$$

例 1.8 飞机驾驶员想让飞机往正北方向飞行,飞机在静止的空气中的航速为 600 km/h,而风速为 60 km/h,风向为东风. 试问驾驶员应让飞机取什么航向? 飞机相对于地面的速率为多少?

分析: 这是相对运动问题,对这类问题的分析通常可借助于矢量图使问题简化.

解: 根据相对运动中的速度合成原理,有

$$\boldsymbol{v}_{机-地面}=\boldsymbol{v}_{机-大气}+\boldsymbol{v}_{大气-地面}$$

作矢量图如图 1.7 所示,不难看出,飞机相对于地面的速度大小为

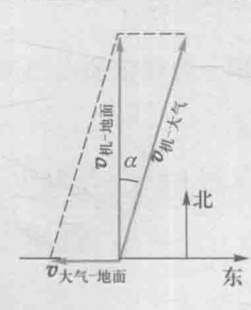

图 1.7 例 1.8 解图