国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

TARTAGLIA FORMULA — TRANSFORMATION AND REDUCTION

Tartaglia公式
——转化与化归

杨世明　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Tartaglia 公式
——特征与性质

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

TARTAGLIA FORMULA—TRANSFORMATION AND REDUCTION

Tartaglia公式

——转化与化归

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是一本既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书．本书共分3章，分别为数学与转化、化归、转化的技艺，通过对理论基础的讲解和举例子来形象、深刻地说明转化与化归在数学解题中的重要性．

本书适合初高中师生，以及高等师范类院校数学教育专业的学生和数学爱好者参考阅读．

图书在版编目(CIP)数据

Tartaglia公式：转化与化归/杨世明编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1
（现代数学中的著名定理纵横谈丛书）
ISBN 978-7-5603-6986-0

Ⅰ.①T… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①方程-数学公式 Ⅳ.①O122.2-64

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第239049号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　牡丹江邮电印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张13.5　字数140千字
版　　次　2018年1月第1版　2018年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6986-0
定　　价　58.00元

⊙ 代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

⊙目录

数学与转化

第1章

第1节　转化例说

数学是什么?

数学家们众说纷纭,但是从思维角度看,不过是人们从量的侧面对事物的一种思考,是通过量认识世界万事万物的一种过程、途径、方法. 因为事物在不断地运动变化,所以这个过程也充满了从一种形式到另一种形式的转化.

1. 从一则传说谈起

传说,古印度北方有一座圣庙,庙里有一块黄铜板,板上竖着三根宝石针. 印度教主梵天在创世之初,把64个大小不同的金盘(中间有孔)由大到小地穿放在其中一根针上(图1). 梵天传旨僧侣们,要日夜不停地把金盘从A针移到B针上,并且规定:每次移一盘,可以C针为"中间站",但大盘不得放于小

盘之上. 当这 64 个金盘全部移到 B 针之时,整个世界将霹雳一声,化为乌有. 这大概就是印度教中所说的"世界末日"吧!

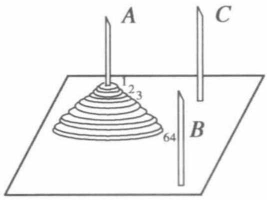

图 1

世界末日何时降临人间? 这可是件大事. 为了得到明确答案,我们不妨用数学方法,把它转化为一个数学问题来解决.

1° 在此问题中,我们关心的是移完 64 个盘的时间,自然与次数有关. 因为同一盘在两针间来回移动只会白费时间,所以我们假定僧侣们都掌握了恰当的移盘方式,使移盘次数最少. 我们以 a_n 表示将 n 个盘从一根针移到另一根针用的最少次数,目的是求出 a_{64}.

2° 怎样求 a_{64}? 如果 $n=1$,则 1 次就可把盘 1 由 A 移到 B,因此,$a_1=1$. 如果 $n>1$,我们这样想:要想把 n 个盘由 A 移到 B,那么首先应把它上面$(n-1)$个盘移开(移到 C 上,用了 a_{n-1} 次),然后把盘 n 移到 B 上(用了 1 次),最后再把前$(n-1)$个盘由 C 移到 B(又用了 a_{n-1} 次). 这时,就完成了 n 个盘由 A 到 B 的移动,于是有 $2a_{n-1}+1=a_n$,加上 $a_1=1$,得

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=2a_{n-1}+1 \quad (n=2,3,\cdots) \end{cases} \qquad ①$$

这样,我们就把一个 n 盘问题(计算 a_n)化成了一

个$(n-1)$盘问题(计算a_{n-1}). 事实上,我们做得比较充分:不仅把64盘问题化成了63盘问题,而且继之,又把63盘问题化成了62盘问题,……,只要反复应用①,即知,实际上化成了1盘问题,①叫作数列$\{a_n\}$的递推公式.

3°　但是,事情并没有结束,因为要算a_{64},须先算a_{63},为此,又要算$a_{62},a_{61},\cdots,a_1$,这是递推公式的一个缺点. 有没有能一下子算出a_{64}(或者说a_n)的公式呢?

我们先用归纳法猜猜看

$$
\begin{aligned}
&a_1=1\\
&a_2=2\times1+1=3\\
&a_3=2\times3+1=7\\
&a_4=2\times7+1=15\\
&a_5=2\times15+1=31\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

了解2的方幂数2,4,8,16,32,…的人,不难猜想

$$a_n=2^n-1$$

它是对的吗? 学过数学归纳法的读者,当然可以自行证明. 下面我们做一简明推导. 反复用①

$$
\begin{aligned}
a_n&=2a_{n-1}+1=2(2a_{n-2}+1)+1\\
&=2^2a_{n-2}+2+1=2^2(2a_{n-3}+1)+2^2-1\\
&=2^3a_{n-3}+2^2+2^2-1=2^3(2a_{n-4}+1)+2^3-1\\
&=2^4a_{n-4}+2^3+2^3-1=2^4a_{n-4}+2^4-1\\
&=\cdots\\
&=2^{n-1}\cdot a_1+2^{n-1}-1=2^{n-1}\cdot1+2^{n-1}-1\\
&=2^n-1
\end{aligned}
$$

所以

$$a_{64}=2^{64}-1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615(\text{次})$$

4° 如果移盘 1 次用一秒钟,则共用了 a_{64} 秒. 如果一年按 365. 242 2 天算,则共 31 556 926 秒. 那么移完 64 盘要用约

$$a_{64} \div 31\,556\,926 \approx 5\,844 \text{ 亿(年)}$$

据现代宇宙学测算,宇宙年龄不过几百亿年,就算是我们的僧侣已辛勤工作了几百亿年;而太阳系的"寿命"大约还有 150 亿年,两项合起来尚不足 1 000 亿年,看来梵天真有些失算了,因为太阳系给僧侣们的时间,大约只能完成移盘任务的$\frac{1}{6}$.

2. 一个趣味旅行问题

某人按如下方式做一次旅行:第 1 天向东行 $\frac{1^2}{2}$km,第 2 天向北行 $\frac{2^2}{2}$km,第 3 天向西行 $\frac{3^2}{2}$km,第 4 天向南行$\frac{4^2}{2}$km,第 5 天又向东行……,且旅行都在同一平面上. 问:第 40 天他距第 1 天的出发点多远?

1° 为了弄清旅行的具体情况,应按题意画出一个图形(图 2),则这个旅行问题就转化为一个几何问题,因为逐日行程越来越长,所以路线形成一条回形折线.

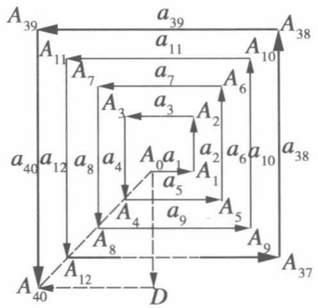

图 2

2°　第1天从 A_0 出发，到达 A_1，走了 $a_1=\frac{1}{2}$km；

第2天由 A_1 到 A_2，走了 $a_2=\frac{2^2}{2}$km；

如规定向东、向北为正，向西、向南为负，则：

第3天由 A_2 到 A_3，走了 $a_3=-\frac{3^2}{2}$km；

第4天由 A_3 到 A_4，走了 $a_4=-\frac{4^2}{2}$km；

……

第37天由 A_{36} 到 A_{37}，走了 $a_{37}=\frac{37^2}{2}$km；

第38天由 A_{37} 到 A_{38}，走了 $a_{38}=\frac{38^2}{2}$km；

第39天由 A_{38} 到 A_{39}，走了 $a_{39}=-\frac{39^2}{2}$km；

第40天由 A_{39} 到 A_{40}，走了 $a_{40}=-\frac{40^2}{2}$km.

总之：

$a_1,a_5,a_9,\cdots,a_{37}$ 是向东走，$a_2,a_6,a_{10},\cdots,a_{38}$ 是向北走，均为正；

$a_3,a_7,a_{11},\cdots,a_{39}$ 是向西走，$a_4,a_8,a_{12},\cdots,a_{40}$ 是向南走，均为负.

3°　作出 Rt△$A_0A_{40}D$，易见

$$\begin{aligned}DA_{40}&=A_0A_1+A_2A_3+A_4A_5+\cdots+A_{38}A_{39}\\&=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39}\\A_0D&=A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6+\cdots+A_{39}A_{40}\\&=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40}\end{aligned}$$

按勾股定理，有

$A_0A_{40}{}^2=DA_{40}{}^2+A_0D^2$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{37}+a_{39})^2+\\
&\quad(a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{38}+a_{40})^2\\
&=\left(\frac{1^2}{2}-\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}-\frac{7^2}{2}+\cdots+\frac{37^2}{2}-\frac{39^2}{2}\right)^2+\\
&\quad\left(\frac{2^2}{2}-\frac{4^2}{2}+\frac{6^2}{2}-\frac{8^2}{2}+\cdots+\frac{38^2}{2}-\frac{40^2}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{4}(1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+37^2-39^2)^2+\\
&\quad\frac{1}{4}(2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+38^2-40^2)^2\\
&=\frac{1}{4}[-2(1+3)-2(5+7)-\cdots-\\
&\quad2(37+39)]^2+\frac{1}{4}[-2(2+4)-\\
&\quad2(6+8)-\cdots-2(38+40)]^2\\
&=(1+3+5+7+\cdots+37+39)^2+\\
&\quad(2+4+6+8+\cdots+38+40)^2\\
&=(20^2)^2+(20\times21)^2\\
&=20^2\times(20^2+21^2)\\
&=20^2\times29^2
\end{aligned}
$$

所以

$$|A_0A_{40}|=20\times29=580(\mathrm{km})$$

3° 此题设计十分精巧,不仅沟通了几何(回形折线、勾股定理、有向线段等)、代数(线段的数量、数列求和等),而且数字凑得正好计算.如建立坐标系,则只需依次计算 $A_i(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,40)$ 的坐标,再用两点间距离公式就可以了.

3. 猪舍问题

有木料可做围墙 24 m,欲围猪舍三间,一面靠旧