

线·性·代·数 30年真题超精解

◎ 屈海亮 编

(数学一)

数学全程答疑



下载答疑APP

刷真题·做学霸

1988 — 2017年考研数学真题分类详解

西北工业大学出版社

 学府考研

十年专注·只做考研

XIANXING DAISHU 30 NIAN ZHENTI CHAO JINGJIE

线性代数30年真题超精解

SHUXUE YI

(数学一)

屈海亮 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书汇集了1988—2017年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)试题中的所有线性代数题目,并按照考研数学考试大纲规定的章节和题型进行分类编写,将不同年份、相同考点和题型的试题归纳在一起,内容翔实、栏目设计合理,且做到一题多解,具有独到之处。本书涵盖了历年考题中所有的题型和解题方法,并针对每类题型,给出相应的知识要点和解题思路,做到知识点融会贯通,使考生在复习过程中做到有的放矢、心中有数。

本书可作为备战2018年研究生入学考试的学生、提前备战2019年研究生入学考试的学生的辅导用书,也可供从事本专业教学的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数30年真题超精解. 数学一 / 屈海亮编. —西安:西北工业大学出版社, 2017.4
ISBN 978-7-5612-5302-1

I. ①线… II. ①屈… III. ①线性代数—研究生—入学考试—题解 IV. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第084762号

策划编辑:杨 军

责任编辑:胡莉巾

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:西安新华印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:9.75

字 数:203千字

版 次:2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷

定 价:23.80元

风雨考研路 学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌!

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006 年从 30 平方米办公室起步,历经十年,打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书编辑、在线教育为一体的综合性教育机构,扎根陕西,服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求,主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心,兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系,解决了考研辅导“只管教,不管学”的问题,保证学员在课堂上听得懂,课下会做题。通过定期测试,掌握学员的学习进度,安排专职教师答疑,保证学习效果。总结多年教学实践经验,学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系,尽量做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案,大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面实现零基础教学,在专业课方面,建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库,解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注,只做考研”。因为专业,所以深受万千考研学子信赖!

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者”。正是这种责任,让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的必选品牌。

人生能有几回搏,三十年太长,只争朝夕!

同学们,春华秋实,为了实现理想,努力吧!

学府考研 | 全国统一客服电话 | 400-090-8961 |
总 部 | 陕西·西安友谊东路75号新红锋大厦三层

学府官方微博



学府官方微信



致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚地感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

图书微博



图书微信



图书微店



前 言

在考研复习的过程中,同学们都听过这样一句话,“得数学者得天下”.这句话就能反映出考研数学在考研科目中举足轻重的地位,因为在统考的三门科目(数学、英语、政治)中数学的满分分值最高,为150分.不仅如此,数学也是复习周期最长、难度最大、技巧最强的一门课程.因此数学成绩的高低,在很大程度上决定着考生能否考上理想的名校.

在漫长的考研数学复习过程中,很多同学比较关心的是如何选择合适的复习参考书.众所周知,历年真题是所有考研复习资料中最重要的,也是必不可少的,其重要性主要体现在以下几方面:

1. 真题是历年考试命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循,通过复习历年真题可以掌握命题规律,把握复习重、难点.

2. 真题蕴含着命题的指导思想、基本原则和命题趋势,反映出考研数学考试大纲对考生基本概念、基本理论和基本方法掌握水平的要求.

3. 真题帮助考生明确复习的基本方向以及把握复习过程中做题的难易程度.通过真题不难发现,历年真题题目的难易程度是相对稳定的,尤其是从2003年以后,考研数学满分从原来的100分增至150分,试卷从结构、知识点覆盖面和题目难易程度上都保持了很好的稳定性,这也使得考生在复习过程中要更注重对历年真题的研究.

本书汇集了1987—2017年30多年数学(一)中线性代数真题题目,这些题目是考生了解、分析和研究考研数学线性代数最宝贵、最直接的渠道.为了方便考生对考研数学大纲知识点的系统复习,笔者根据多年的考研辅导经验精心编写了30年真题超精解系列书,本书具有以下几个特点:

1. 全. 本书汇集了自1987年以来全国硕士研究生入学统一考试(数学一)试题中的所有线性代数题目,通过全面复习真题可帮助考生总结出考研数学命题的规律和方向,掌握复习的重点和难点,为考生取得高分打下坚实的基础.

2. 广. 本书是按照考研数学考试大纲规定的章节和题型进行分类解析的,将不同年份、相同的考点和题型的试题归纳在一起,并给出详细的解答.本书涵盖了历年考题中所有的题型和解题方法,这样便于考生在复习过程中,通过真题超精解把握考研数学的常考题型、解题方法和技巧,做到知识点之间的融会贯通,进而掌握试题的广度和深度,并在复习过程中有的放矢、心中有数.

3. 精. 本书中对每类题型都给出知识要点和解题思路,对所有的试题都给出详细的解答过程,并尽量做到一题多解.其中很多试题的解法是笔者根据多年的考研辅导和教学经验总结出

来的,具有独到之处.本书在每道题详解的基础之上,都给出名师评注,这样可以培养考生独立思考解决问题的能力,达到举一反三、触类旁通的效果.

在本书编写过程中,王喆与王涛两位老师主要负责历年真题的录入和分类,屈海亮老师负责编写真题的分析、详解和评注.

限于水平,书中的疏漏和不足之处在所难免,恳请读者和同行给予批评指正.

最后希望本书能对大家在考研高等数学的复习中有所帮助,祝同学们备考顺利,考研成功!

编 者

2017年1月

目 录

第一章 行列式	1
考情分析	1
考点清单	2
真题全解	2
第二章 矩阵	11
考情分析	11
考点清单	12
真题全解	12
第三章 向量	35
考情分析	35
考点清单	36
真题全解	36
第四章 线性方程组	56
考情分析	56
考点清单	57
真题全解	58
第五章 矩阵的特征值与特征向量	93
考情分析	93
考点清单	94
真题全解	94
第六章 二次型	123
考情分析	123
考点清单	124
真题全解	124
参考文献	145

第一章

行列式

..... 考 情 分 析

考试概况

行列式是线性代数的一个重要的理论工具,是后面学习向量组、线性方程组和矩阵特征问题等知识的基础,线性代数中的很多问题都可以归结到行列式中,或者通过计算行列式进行求解. 考研数学考试大纲规定了以下考试内容:

- (1) 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
- (2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

命题分析

历年真题中单纯性行列式的考题不多,分值也不大,一般以选择题和填空题为主,比较重要的是抽象型行列式的计算;另外考生需要注意如何通过行列式的计算来解决矩阵、向量、方程组、特征值及二次型中的问题,即行列式的应用.

行列式的考题大致分为三种题型:具体型行列式的计算、抽象型行列式的计算、行列式是否为零的判定. 这些考题中不仅考查行列式的概念、性质与计算,肯定还会涉及其它章节的知识点,需要考生灵活应用所学的知识.

趋势预测

通过研究近几年考研试题的命题规律可知,2018年考研行列式的考查会有以下特点:

- (1) 行列式的计算是研究生入学考试数学试卷中要求掌握的内容,但一般不会单独考查,而是将行列式的计算与其它内容结合起来进行综合性考查.
- (2) 行列式的计算所占分值一般为3~4分,题目相对简单,因此考生只需掌握基础性方法即可.
- (3) 抽象矩阵行列式的计算在近几年考题中经常出现,通过对抽象矩阵行列式的讨论,可以考查考生的基本知识,因此带有综合性矩阵行列式题目的考查概率较高.
- (4) 抽象矩阵行列式主要考查的内容为求伴随矩阵的行列式和一些定理的证明.

复习建议

结合命题分析,建议考生从行列式本身的知识点、行列式与其它知识点的联系这两方面来复习该部分内容,具体如下:

(1) 行列式本身的知识点.

考生应在理解行列式定义、掌握其性质及展开定理的基础上,熟练掌握各种形式的行列式的计算;行列式计算的基本思路是利用性质化简,利用展开定理降阶;常见的计算方法有“三角化”法,直接利用展开定理,利用范德蒙行列式结论以及逆向运用展开定理.

(2) 行列式与其它知识的联系.

行列式与其它知识点(线性方程组的克拉默法则、由伴随矩阵求逆矩阵、证明矩阵可逆、判定 n 个 n 维向量线性相关(无关)、计算矩阵特征值、判断二次型的正定性)有较多联系,考生应准确把握这些联系,并灵活运用.

..... 考 点 清 单

1. 具体型行列式的计算	31 年 4 考
2. 抽象型行列式的计算	31 年 7 考
3. 行列式是否为零的判定	31 年 2 考

..... 真 题 全 解

一 具体型行列式的计算(31 年 4 考)

1. 知识要点

(1) 行列式按行按列展开定理:行列式等于它的某行(或列)元素与其对应的代数余子式之积的和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \text{ (按第 } i \text{ 行展开)}$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n), \text{ (按第 } j \text{ 列展开)}$$

(2) 对角行列式、上(下)三角行列式:上(下)三角行列式的值等于主对角线元素之积.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 拉普拉斯行列式:设 A 为 n 阶方阵, B 为 m 阶方阵,则有

$$1) \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|;$$

$$2) \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|.$$

2. 解题思路

计算具体型行列式常见的方法有:

- (1) 利用行列式的性质化成上(下)三角行列式进行计算;
- (2) 利用行列式的性质,结合行列式按行按列展开定理进行计算;
- (3) 利用拉普拉斯行列式进行计算.

在利用以上方法计算之前先运用行列式的性质对其作恒等变形,使得某行或某列有较多的零元素,这样会大大降低运算的复杂性.

真题 1 (1996 年, 3 分) 四阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$
 的值等于().

- (A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$ (B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$
 (C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$ (D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

【分析】交换行列式的第 2, 4 两行, 再交换第 2, 4 两列, 可得拉普拉斯行列式, 计算即可. 此外, 还可以将行列式直接按照第一列或者第一行展开进行计算.

【详解】应选(D).

方法一:
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$$

方法二: 按照第一行展开所求行列式, 得

$$\text{原式} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

上面两个三阶行列式均按照第三行展开, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4) \end{aligned}$$

名师评注

本题主要考查行列式的计算,方法一用到了行列式的基本性质以及拉普拉斯行列式的计算公式,方法二用到了行列式按行按列展开定理.

真题 2 (2014 年, 4 分) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\quad).$$

(A) $(ad - bc)^2$

(B) $-(ad - bc)^2$

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$

(D) $b^2c^2 - a^2d^2$

【分析】交换行列式的第 2, 3 两行, 再交换第 1, 3 两列, 可得拉普拉斯行列式, 计算即可.

【详解】应选(B).

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2$$

名师评注

本题主要考查行列式的计算, 用到了行列式的基本性质以及拉普拉斯行列式的计算公式.

真题 3 (2015 年, 4 分) n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】将行列式按照第一行展开后找到递推公式进行求解.

【详解】应填 $2^{n+1} - 2$.

将行列式 D_n 按照第一行展开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + 2(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + 2$$

则递推公式为 $D_n = 2D_{n-1} + 2$.

因此,可得 $D_{n-1}=2D_{n-2}+2, D_{n-2}=2D_{n-3}+2, \cdots, D_2=2D_1+2, D_1=2$

$$\begin{aligned} \text{于是, } D_n &= 2D_{n-1} + 2 = 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 = 2^2(2D_{n-3} + 2) + 2^2 + 2 \\ &= 2^2(2D_{n-3} + 2) + 2^2 + 2 = 2^3 D_{n-3} + 2^3 + 2^2 + 2 \\ &= \cdots = 2^n + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2 = 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

名师评注

本题主要考查利用递推法求解行列式. 求解的关键是要通过展开式找到递推公式.

真题 4 (2016 年, 4 分) 行列式
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】将此行列式按照第一列展开进行计算.

【详解】应填 $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.

按第一列展开, 得行列式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4 \end{aligned}$$

名师评注

本题主要考查利用行列式按行按列展开定理计算行列式.

二 抽象型行列式的计算 (31 年 7 考)

1. 知识要点

(1) 方阵的行列式: $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|, |\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$ (λ 为常数), $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$.

(2) 伴随矩阵和逆矩阵的行列式: $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}, |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ ($|\mathbf{A}| \neq 0$).

(3) 行列式与矩阵特征值的关系: $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

2. 解题思路

计算抽象型行列式常见的方法如下:

(1) 应用行列式的性质进行计算;

(2) 利用矩阵的运算、伴随矩阵或可逆矩阵的性质进行运算;

(3) 用矩阵的特征值或者矩阵的相似关系进行计算.

这类题目往往综合性强,涉及知识点多,因此在复习时要注意知识的衔接和转化,如果内在联系把握得好,解题时的思路就灵活.但是这类题目的运算量一般不会太大.

真题 5 (1987 年,3 分) 设 A 为 n 阶方阵,且 $|A| = a \neq 0$,而 A^* 是 A 的伴随矩阵,则 $|A^*| = (\quad)$.

- (A) a (B) $\frac{1}{a}$ (C) a^{n-1} (D) a^n

【分析】在公式 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式进行计算 $|A^*|$ 的值.

【详解】应选(C).

由 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式,得 $|A| |A^*| = ||A|E| = |A|^n \cdot |E| = |A|^n$.

因为 $|A| = a \neq 0$,所以 $|A^*| = |A|^{n-1} = a^{n-1}$.

名师评注

本题主要考查伴随矩阵的相关知识及方阵乘积行列式的运算.注意对任何 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A ,均有 $AA^* = A^*A = |A|E$,这是处理有关伴随矩阵的一个基本公式.

真题 6 (1988 年,3 分) 设 4×4 矩阵 $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, $B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$,其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|A| = 4$, $|B| = 1$,则行列式 $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】先利用矩阵运算求出 $A+B$,再利用行列式性质计算 $|A+B|$.

【详解】应填 40.

因为 $A+B = [\alpha+\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4]$,由行列式的性质可得

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha+\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 8|\alpha+\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 8(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + |\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|) = 8(4+1) = 40 \end{aligned}$$

名师评注

本题主要考查行列式相关性质的应用.注意向量和矩阵的线性运算是—致的,因此,两矩阵相加可归结为它们对应的列分别相加.

真题 7 (1995 年,3 分) 设 A 是 n 阶矩阵,满足 $AA^T = E$ (E 是 n 阶单位阵, A^T 是 A 的转置矩阵), $|A| < 0$,求 $|A+E|$.

【分析】由 $AA^T = E$ 可将 $|A+E|$ 中的 E 换成 AA^T ,然后提取公因式,进而将矩阵和的行列式转化为矩阵乘积的行列式求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \text{ 因为 } |A+E| &= |A+AA^T| = |A(E+A^T)| = |A| |(E+A)^T| \\ &= |A| |E+A| = |A| |A+E| \end{aligned}$$

所以, $(1-|A|)|A+E|=0$. 由 $|A| < 0$,得 $1-|A| > 0$,于是, $|A+E|=0$.

名师评注

本题综合考查矩阵的乘法、转置及方阵乘积的行列式等运算.这里,将 $|A+E|$ 中的 E 换成 AA^T ,进而推出关于 $|A+E|$ 的关系式是求解的关键.

真题 8 (2004 年, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为

A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】因为有基本公式 $AA^* = A^*A = |A|E$, 所以在等式 $ABA^* = 2BA^* + E$ 两边右乘矩阵 A , 进而可得关于矩阵 B 的等式, 再求其行列式的值.

【详解】应填 $\frac{1}{9}$.

由于 $A^*A = |A|E$, 而 $|A| = 3$, 因此 $A^*A = 3E$.

在等式 $ABA^* = 2BA^* + E$ 两边右乘矩阵 A , 可得 $3AB = 6B + A$, 即 $3(A - 2E)B = A$, 两边取行列式, 得

$$3^3 |A - 2E| |B| = |A|$$

$$\text{由于 } |A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \text{ 则 } 27|B| = 3, \text{ 得 } |B| = \frac{1}{9}.$$

 名师评注

本题主要考查矩阵的基本运算及方阵乘积的行列式的常用性质: $|AB| = |A||B|$. 本题如果先计算出矩阵 B , 再计算 $|B|$, 显然要麻烦得多, 所以此类问题一般需要先进行化简再代值计算.

真题 9 (2005 年, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$, 如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】利用矩阵的乘法可将矩阵 B 表示为矩阵 A 的形式再计算行列式 $|B|$.

【详解】应填 2.

利用矩阵的乘法可将矩阵 B 表示为

$$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

两边取行列式, 可得 $|B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2$, 其中 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ 为范德蒙行列式,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(3-2) = 2$$

名师评注

本题主要考查方阵行列式的计算. 考生应该注意解题过程中所用的表示方法, 这种表示方法在讨论向量的线性相关性时也是很有用的.

真题 10 (2006 年, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$,

则 $|B| =$ _____.

【分析】由 $BA = B + 2E$ 解得矩阵 B , 再求解行列式的值.

【详解】应填 2.

由 $BA = B + 2E$ 解得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 得 $|B| |A - E| = |2E|$.

因为 $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $|2E| = 2^2 |E| = 4$, 所以有 $2|B| = 4$, 从而得 $|B| = 2$.

名师评注

本题主要考查矩阵的运算规律及方阵行列式的性质与运算. 本题显然不要求出矩阵 B , 但若要求出矩阵 B , 则只需要在 $B(A - E) = 2E$ 两边右乘 $(A - E)^{-1}$ 即可.

真题 11 (2013 年, 4 分) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

【分析】由条件 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 可得 $A^T = -A^*$, 再两边取行列式求解.

【详解】应填 -1.

由条件 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 可得, $A^T = -A^*$, 两边取行列式得 $|A| = -|A|^2$, 可见 $|A|$ 只能是 0 或者 -1.

因为矩阵 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, 所以不妨设 $a_{11} \neq 0$, 将行列式 $|A|$ 按照第一行展开, 得 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 < 0$, 于是 $|A| = -1$.

名师评注

本题主要考查抽象性行列式的计算以及矩阵与伴随矩阵之间的关系.

三 行列式是否为零的判定 (31 年 2 考)

1. 知识要点

若 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ 是 n 阶矩阵, 则有下面几组充分必要条件:

行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 矩阵 A 是不可逆矩阵 (奇异矩阵) $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的秩 $R(A) < n \Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的行 (列) 向量组线性相关 $\Leftrightarrow 0$ 是矩阵 A 的一个特征值.

2. 解题思路

判断一个行列式是否为零的问题, 常用的思路如下:

- (1) 利用行列式对应的矩阵的秩判断,若矩阵不是满秩矩阵则对应行列式为零;
- (2) 判断齐次线性方程组是否有非零解,若有非零解,则系数矩阵的行列式为零;
- (3) 判断行列式对应的矩阵是否有 0 特征值,若有,则对应行列式为零;
- (4) 采用反证法进行证明判断;
- (5) 若能得到 $|A| = -|A|$ 或者 $|A| = l|A| (l \neq 1)$,则可判断 $|A| = 0$.

真题 12 (1994 年,6 分) 设 A 为 n 阶非零方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 当 $A^* = A^T$ 时, 证明 $|A| \neq 0$.

【分析】由 $A^* = A^T$ 可得 $A_{ij} = a_{ij}$, 于是可以考虑利用行列式按行按列展开定理进行证明. 此外若证明某一个值不等于零, 也可以考虑利用反证法进行证明.

【详解】方法一: 由于 $A^* = A^T$, 根据伴随矩阵 A^* 的定义有 $A_{ij} = a_{ij}$, 其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

因为矩阵 $A = (a_{ij})$ 是非零矩阵, 所以不妨设 $a_{11} \neq 0$, 将行列式 $|A|$ 按照第一行展开, 得 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 > 0$, 于是 $|A| \neq 0$.

方法二: (反证法) 假设 $|A| = 0$, 则 $AA^T = AA^* = |A|E = O$.

设 A 的行向量为 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\alpha_i \alpha_i^T = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$.

于是 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 进而, $A = O$, 这与 A 是非零矩阵矛盾, 故 $|A| \neq 0$.

名师评注

本题主要考查抽象性行列式的证明、行列式按行按列展开以及矩阵与伴随矩阵之间的关系.

真题 13 (1999 年, 3 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 ().

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$
 (C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

【分析】证明行列式 $|AB|$ 是否为零, 可以考虑证明矩阵 AB 是满秩矩阵, 或者证明齐次线性方程组 $ABx = 0$ 有无非零解. 此外也可以进行举例排除错误选项.

【详解】应选 (B).

方法一: A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 AB 是 m 阶方阵, 且

$$R(AB) \leq \min[R(A), R(B)] \leq \min(m, n)$$

当 $m > n$ 时, 有 $R(AB) \leq \min[R(A), R(B)] \leq n < m$, 故有行列式 $|AB| = 0$, 故应选 (B).

方法二: B 是 $n \times m$ 矩阵, 当 $m > n$ 时, 则 $R(B) \leq n < m$ (系数矩阵的秩小于未知数的个数), 方程组 $Bx = 0$ 必有非零解, 即存在 $x_0 \neq 0$, 使得 $Bx_0 = 0$, 两边左乘 A , 得 $ABx_0 = 0$, 即 $ABx = 0$ 有非零解, 从而 $|AB| = 0$, 故选 (B).