泛函分析和Banach空间几何理论

商绍强　艾晓辉　编著

東北林業大學出版社

泛函分析和 Banach 空间几何理论

商绍强　艾晓辉　编著

東北林業大學出版社
·哈尔滨·

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析和 Banach 空间几何理论 / 商绍强，艾晓辉编著. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2015.4

（东北林业大学优秀学术著作丛书）

ISBN 978-7-5674-0577-6

Ⅰ.①泛…　Ⅱ.①商…②艾…　Ⅲ.①泛函分析-研究②巴拿赫空间-研究　Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 079814 号

责任编辑：杨秋华

封面设计：乔鑫鑫

出版发行：东北林业大学出版社

（哈尔滨市香坊区哈平六道街 6 号　邮编：150040）

经　　销：全国新华书店

印　　装：哈尔滨圣铂印刷有限公司

开　　本：880mm×1230mm　1/32

印　　张：6

字　　数：160 千字

版　　次：2015 年 4 月第 1 版

印　　次：2015 年 4 月第 1 次印刷

定　　价：20.00 元

前　言

泛函分析在现代数学中既有深刻的理论意义，又有广泛应用价值的研究方向．泛函分析在微分方程、计算数学、控制论、量子力学等领域有广泛的应用．20 世纪 30 年代，S. Banach 的专著 *Theorie des operations lineaires* 标志着泛函分析理论的初步形成．

Banach 空间几何理论是近代泛函分析的重要分支，内容十分丰富．自 1936 年 Clarkson 提出 Banach 空间一致凸性得到了取值在一致凸 Banach 空间的向量测度的 Radon－Nikodym 定理成立，Clarkson 开创了从 Banach 空间单位球几何结构出发研究 Banach 空间性质及应用的新方法．至此，泛函分析中的重要研究方向空间理论初步形成．

国内外已经出版了很多泛函分析的教材和专著，这些书籍的共同特点是书中的定义、定理主要是发表于 20 世纪 50 年代前的结果，没有把泛函分析最近几年的研究结果展示给读者，这样导致数学其他研究方向的学者与现代泛函分析研究割裂开，无法充分地使用泛函分析新的研究成果．

本书试图弥补这一缺陷．本书的前 3 章主要介绍泛函分析的经典理论，本书的后 3 章主要介绍泛函分析中的重要研究方向 Banach 空间几何理论研究成果．其中，第 4 章主要介绍 Banach 空间的凸性和非方性研究；第 5 章主要介绍 Banach 空间的可凹性研究；第 6 章主要介绍 Banach 空间的凸性、可凹性理论在非线性逼近理论中的应用．本书将泛函分析的经典理论和现代理论综合在

一起，以便数学工作者在数学研究中更好地使用泛函分析理论来取得更大的成果.

本书的前 3 章，第 4 章的 4.1，4.2，4.3 和第 6 章的 6.3 由艾晓辉撰写；第 4 章的 4.4 和 4.5，第 5 章和第 6 章的 6.1，6.2，6.4 由商绍强撰写.

本书可以作为数学系研究生的教材. 由于作者水平、学识有限，书中一定会有许多错误和不足之处，望读者批评指正.

商绍强　艾晓辉

2014 年 10 月于东北林业大学

目　录

1 度量空间

1.1 度量空间的定义及例子

度量空间又称为距离空间,它的拓扑由距离决定.度量空间是泛函分析中最基本的概念,我们下面来给出度量空间的定义.

定义 1.1.1 设 X 是一个非空集, X 称为度量空间是指在 X 上定义了一个函数 $d(x,y)$ 满足如下条件.

(1) $d(x,y) \geqslant 0$,而且 $d(x,y)=0$,当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,z)+d(z,y) \geqslant d(x,y)$.

例 1 离散的度量空间.

设 X 是任意的非空集合,对 X 中任意两点 $x,y \in X$,令

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x \neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

容易验证 $d(x,y)$ 满足关于距离的定义中的条件(1)及(2).我们称 (X,d) 为离散的度量空间.由此可见,在任何非空集合上总可以定义距离,使它成为度量空间.

例 2 序列空间 S.

令 S 表示实数列(或复数列)的全体,对 S 中任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$,令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

易知 $d(x,y)$ 满足条件(1),下面验证 $d(x,y)$ 满足距离条件(2),为此

我们首先证明对任意两个复数 a 和 b，成立不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

事实上，考虑 $[0,\infty)$ 上的函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 由于在 $[0,\infty)$ 上，$f'(t)=1/(1+t)^2>0$. 所以 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调增加，由不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} =$$

$$\frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

令 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)$，$a=\xi_i-\zeta_i\zeta,\zeta,b=\zeta_i-\eta_i$，则 $a+b=\xi_i-\eta_i$，代入上面不等式，得

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|} \leqslant \frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|} + \frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}$$

由此立即可知 $d(x,y)$ 满足距离条件(2)，即 S 按照 $d(x,y)$ 成一度量空间.

例 3 有界函数空间 $B(A)$.

设 A 是一给定的集合，令 $B(A)$ 表示 A 上有界实值(或复值)函数全体，对 $B(A)$ 中任何两点 x,y，定义

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|$$

下面验证 $d(x,y)$ 满足条件(1)和(2). $d(x,y)$ 显然是非负的，又 $d(x,y)=0$ 等价于对一切 $t\in A$，成立 $x(t)=y(t)$，所以 $x=y$，即 $d(x,y)$ 满足(1)；此外，对所有 $t\in A$ 成立

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|\end{aligned}$$

所以

$$\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)| \leqslant \sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|$$

即 $d(x,y)$ 满足条件. 特别地,当 $A=[a,b]$ 时,记 $B(A)$ 为 $B[a,b]$.

例 4　可测函数空间 $\mathfrak{M}(X)$.

设 $\mathfrak{M}(X)$ 为 X 上实值(或复值)的 Lebesgue 可测函数全体, m 为 Lebesgue 测度, 若 $m(X)<\infty$, 对任意两个可测函数 $f(t)$ 及 $g(t)$, 由于

$$\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}<1$$

所以这是 X 上可积函数,令

$$d(f,g)=\int_X \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}t$$

如果把 $\mathfrak{M}(X)$ 中两个几乎处处相等的函数视为 $\mathfrak{M}(X)$ 中同一个元,那么利用积分性质很容易验证 $d(x,y)$ 是距离. 因此 $\mathfrak{M}(X)$ 按上述距离 $d(f,g)$ 成为度量空间.

例 5　$C[a,b]$ 空间.

令 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上实值(或复值)连续函数全体,对 $C[a,b]$ 中任意两点 x,y,定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

容易验证它满足距离条件(1)和(2).

例 6　l^2.

记 $l^2=\{x=\{x_k\}\mid \sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty\}$. 设 $x=\{x_k\}\in l^2$, $y=\{y_k\}\in l^2$, 定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

则 d 是 l^2 上的距离(可以证明 $d<\infty$). 距离条件(1)容易得出. 现检验条件(2).

对任何正整数 n, $x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y^{(n)}=(y_1,\cdots,y_n)$ 都是 R^n 中元素,由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \times \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

不等式右端令 $n \to \infty$,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \times \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

再令左端的 n 趋于 ∞,即得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \times \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \times \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

取 $\xi = \{\xi_k\}, \eta = \{\eta_k\}, \zeta = \{\zeta_k\}$. 以 $x_k = \zeta_k - \xi_k, y_k = \eta_k - \zeta_k$ 代入上式,即可得 ξ,η,ζ 的三点不等式

$$d(\xi,\eta) \leqslant d(\xi,\zeta) + d(\zeta,\eta)$$

由上述例子可见,度量空间除了有限维的欧几里得空间 R^n 之外,还包括其他的空间.

1.2 度量空间中的极限、稠密集、可分空间

设 (X,d) 为度量空间, d 是距离,定义 $U(x_0,\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ 为 x_0 的以 ε 为半径的开球,亦称为 x_0 的 ε - 领域.

由此,仿 R^n 空间中点集的内点、外点、边界点及聚点、导集、闭包、开集等概念,我们可以在距离空间中定义一个点集的内点、外点、边界点及聚点、导集、闭包、开集等概念.

设 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中点列,如果存在 $x \in X$,使

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

则称点列 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的收敛点列，x 是点列 $\{x_n\}$ 的极限.类似于 R，可以证明度量空间中收敛点列的极限是唯一的.

$$\delta(M) = \sup_{x,y\in M} d(x,y)$$

为点集 M 的直径. 若 $\delta(M) < \infty$，则称 M 为 (X,d) 中的有界集.类似于 R,可以证明度量空间中收敛点列是有界点集. 度量空间中闭集也可以用点列的极限来定义：M 是闭集的充要条件是 M 中任何收敛点列的极限都在 M 中,即若 $x_n \in M, n=1,2,\cdots x_n \to x$，则 $x \in M$. 下面讨论某些具体空间中点列收敛的具体意义.

(1) R^n 为 n 维欧氏空间，$x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)}), m = 1,2,\cdots$ 为 R^n 中的点列，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$，不难证明 $\{x_m\}$ 按欧氏距离收敛于 x 的充分必要条件为对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $\xi_i^{(m)} \to \xi_i (m\to\infty)$.

(2) $C[a,b]$ 空间，设点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及点 x 分别为度量空间 $C[a,b]$ 中的点列及点，则 $d(x_n,x) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x_n(t) - x(t)|$ 收敛于 0 的充要条件为函数列 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x.

(3)序列空间 S，设 $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)}, \cdots), m = 1,2,\cdots$ 及 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ 分别为 S 中的点列及点,即对每个正整数 i，成立 $\xi_i^{(m)} \to \xi (m \to \infty)$.若

$$d(x_m, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(m)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(m)} - \xi_i|} \to 0 (m \to \infty)$$

对任何正整数 i，因为 $\dfrac{|\xi_i^{(m)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(m)} - \xi_i|} \leqslant 2^i d(x_m, x)$，所以

$$\frac{|\xi_i^{(m)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(m)} - \xi_i|} \to 0, n \to \infty$$

因此,对任何给定的正数 ε，存在正整数 N，使当 $m > N$ 时有

$$\frac{|\xi_i^{(m)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(m)} - \xi_i|} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \tag{1.2.1}$$

下面我们引入度量空间中稠密子集和可分度量空间的概念.

定义 1.2.1 设 X 是度量空间, E 和 M 是 X 中两个子集, 令 $\bar{M}$ 表示 M 的闭包. 如果 $E \subset \bar{M}$, 那么称集 M 在集 E 中稠密; 当 $E = X$ 时, 称 M 为 X 的一个稠密子集. 如果 X 有一个可数的稠密子集, 则称 X 是可分空间.

例 1 n 维欧氏空间 R^n 是可分空间. 事实上, 坐标为有理数的全体是 R^n 的可数稠密子集.

例 2 离散度量空间 X 可分的充要条件为 X 是可数集. 事实上, 在 X 中没有稠密真子集, 所以 X 中唯一的稠密子集只有 X 本身, 因此, X 可分的充要条件为 X 是可数集.

例 3 n 维欧氏空间 R^n 是可分空间. 事实上, 坐标为有理数的全体是 R^n 的可数稠密子集.

例 4 离散度量空间 X 可分的充要条件为 X 是可数集. 事实上, 在 X 中没有稠密真子集, 所以 X 中唯一的稠密子集只有 X 本身, 因此, X 可分的充要条件为 X 是可数集.

下面举一个不可分度量空间的例子. 令 l^∞ 表示有界(或复)数列全体, 对 l^∞ 中任意两点 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$, 定义

$$d(x,y) = \sup_i | \xi_i - \eta_i | \tag{1.2.2}$$

易证 l^∞ 按 $d(x,y)$ 成为度量空间.

例 5 l^∞ 是不可分空间.

证明 令 M 表示 l^∞ 中坐标 ξ_i 取值为 0 或 1 的点 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 全体, 则 M 与二进位小数一一对应, 所以 M 的基数为 c. 对 M 中任意两个不同的点 x, y, 有 $d(x,y) = 1$, 如果 l^∞ 可分, 则 l^∞ 中存在可数稠密子集, 设为 $\{y_k\}$. 对 M 中每一点 x, 作球 $U\left(x, \frac{1}{3}\right)$, 则

$$U\left(x, \frac{1}{3}\right) | x | \in M \tag{1.2.3}$$

是一族两两不相交的球,总数有不可数个.但由于 $\{y_k\}$ 在 l^∞ 中稠密,所以每个 $U\left(x,\dfrac{1}{3}\right)$ 中至少含有 $\{y_k\}$ 一点,这与 $\{y_k\}$ 是可数集矛盾.证毕.

1.3 连续映射

仿照直线上函数连续性的定义，我们引入度量空间中映射连续性的概念.

定义 1.3.1 设 $X=(X,d)$ ，$Y=(Y,\tilde{d})$ 是两个度量空间，T 是 X 到 Y 中映射，$x_0\in X$ ，如果对于任意给定的正数 ε ，存在正数 $\delta>0$，使对 X 中一切满足 $d(x,x_0)<\delta$ ，成立 $\tilde{d}(T_x,T_{x_0})<\varepsilon$ ，则称 T 在 x_0 连续.

如果用邻域来描述，那么 T 在 x_0 连续的定义可以改述为：对 T_{x_0} 的每个 ε -邻域 V ，存在 x_0 的邻域 V 使得 $TV\subset U$ ，其中 TV 表示 V 在映射 T 作用下的像.

我们也可以用极限来定义映射的连续性.

定理 1.3.1 设 T 是度量空间 (X,d) 到度量空间 $(Y,\tilde{d})$ 中的映射，那么 T 在 $x_0\in X$ 连续的充要条件为当 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 时，必有 $Tx_n\to Tx_0(n\to\infty)$.

证明 必要性：如果 T 在 $x_0\in X$ 连续，那么对任意给定的正数 ε ，存在正数 δ ，使当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\tilde{d}(T_x,T_{x_0})<\varepsilon$ ，因为 $x_n\to x(n\to\infty)$ ，所以存在正整数 N ，当 $n>N$ 时，有 $d(x_n,x_0)<\delta$ ，因此 $\tilde{d}(T_{x_n},T_{x_0})<\varepsilon$ 这就证明了 $T_{x_n}\to T_{x_0}(n\to\infty)$.

充分性：用反证法. 如果 T 在 x_0 不连续，那么存在正数 $\varepsilon_0>0$，使对任何正数 $\delta>0$，总有 $x\neq x_0$，满足 $d(x,x_0)<\delta$ ，但 $\tilde{d}(Tx,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$，特取 $\delta=\dfrac{1}{n}$ ，则有 x_n ，使 $d(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，但 $\tilde{d}(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$，这

就是说，$x_n \to x_0(n \to \infty)$，但 Tx_n 不收敛于 Tx_0，这与假设矛盾. 证毕.

如果映射 T 在 X 的每一点都连续,则称 T 是 X 上的连续映射. 我们可以用开集来刻画连续映射. 为此，称集合

$$\{x \mid x \mid \in X, Tx \in M \subset Y\} \tag{1.3.1}$$

为集合 M 在映射 T 下的原像. 简记为 $T^{-1}M$.关于连续映射成立着下面的定理.

定理 1.3.2 度量空间 X 到 Y 中的映射 T 是 X 上连续映射的充要条件为 Y 中任意开集 M 的原像 $T^{-1}M$ 是 X 中的开集.

证明 必要性：设 T 是连续映射，$M \subset Y$ 是 Y 中开集. 如果 $T^{-1}M = \varnothing$，那么 $T^{-1}M$ 是 X 中开集.如果 $T^{-1}M \neq \varnothing$，则对任意 $x_0 \in T^{-1}M$，令 $y_0 = Tx_0$，则 $y_0 \in M$. 由于 M 是开集，所以存在 y_0 的 ε-邻域 U，$U \subset M$，由 T 的连续性,存在 x_0 的 δ-邻域 V，使 $TV \subset U$，这就是说

$$V \subset T^{-1}U \subset T^{-1}M \tag{1.3.2}$$

所以 x_0 是 $T^{-1}M$ 的内点,由 x_0 的任意性知 $T^{-1}M$ 是开集.

充分性：如果 Y 中每一个开集的原像是开集,又 $x_0 \in T^{-1}U$,所以 x_0 是 $T^{-1}U$ 的内点,因而存在 x_0 的某个 δ-邻域 V,使 $V \subset T^{-1}U$,于是 $TV \subset U$，这说明 T 在 x_0 连续,由 x_0 的任意性可知 T 是 X 上的连续映射.证毕.

利用 $T^{-1}(CM) = C(T^{-1}M)$，不难证明在上面定理中把开集改为闭集仍然成立.

1.4 柯西(Cauchy)点列和完备度量空间

首先回忆一下 R^1 中柯西点列的定义. 设 $\{x_n\}$ 是 R^1 中的点列,如果对任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，当 n，$m > N$ 时有

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{1.4.1}$$

则称 $\{x_n\}$ 是 R^1 中的柯西点列. 类似地,可以定义度量空间中的柯西点列.

定义 1.4.1 设 $X=(X,d)$ 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中点列,如果对任何事先给定的正数 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 使当 $n,m>N$ 时,必有

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon \tag{1.4.2}$$

则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西点列或基本点列. 如果度量空间 (X,d) 中每个柯西点列都收敛于 (X,d) 中的点,那么称 (X,d) 是完备的度量空间.

注意:这里要求在 X 中存在一点,使该柯西点列收敛到这一点.

由完备度量空间的定义,立即可知有理数全体按绝对值距离构成的空间不完备,但 n 维欧氏空间 R^n 则是完备的度量空间. 在一般度量空间中,柯西点列不一定收敛,但是度量空间中的每一个收敛点列都是柯西点列. 实际上,如果 $x_n\to x(n\to\infty)$,那么对任何正数 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 时,有

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4.3}$$

因此,当 $n,m>N$ 时,由三点不等式,得到

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x)+d(x_m.x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{1.4.4}$$

即 $\{x_n\}$ 是柯西点列.

例 1 l^∞ 是完备度量空间.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的点列,其中 $x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots)$,于是对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N ,当 $n,m>N$ 时

$$d(x_m,x_n)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \tag{1.4.5}$$

因此,对每一个固定的 j , 当 $n,m>N$ 时,成立

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \tag{1.4.6}$$

这就是说,数列 $\xi_j^{(k)},k=1,2,\cdots$ 是柯西数列,因此,存在数 ξ_j ,使得

$\xi_j^{(n)} \to \xi_j (n \to \infty)$，令 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$. 下面证明 $x \in l^\infty$，且 $x_m \to x(m \to \infty)$. 在(1.4.6)式中，令 $n \to \infty$，我们得到对于一切 $m > N$，成立

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqslant \varepsilon \tag{1.4.7}$$

又因 $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_j^{(m)}, \cdots) \in l^\infty$，因此存在实数 k_m，使得对所有 j，成立 $|\xi_j^{(m)}| \leqslant k_m$. 因此，

$$|\xi_j| \leqslant |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leqslant \varepsilon + k_m \tag{1.4.8}$$

这就证明了 $x \in l^\infty$. 由(1.4.8)式，可知对一切 $m > N$，成立

$$d(x_m, x) = \sup_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqslant \varepsilon \tag{1.4.9}$$

所以 $x_n \to x(n \to \infty)$. 因此 l^∞ 是完备度量空间. 证毕.

令 C 表示所有收敛的实(或复)数列全体，对 C 中任意两点 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$，令

$$d(x, y) = \sup_j |\xi_j - \eta_j| \tag{1.4.10}$$

易证 C 是一度量空间，实际上它是 l^∞ 的一个子空间.

例 2 C 是完备的度量空间.

为此我们首先证明关于子空间完备性的一个定理.

定理 1.4.1 完备度量空间 X 的子空间 M，是完备空间的充要条件为 M 是 X 的闭子空间.

证明 设 M 是完备子空间，对每个 $x \in \bar{M}$，存在 M 中点列 $\{x_n\}$，使 $x_n \to x$，由前述，$\{x_n\}$ 是 M 中柯西点列，所以在 M 中收敛. 由极限的唯一性可知 $x \in M$，即 $\bar{M} \subset M$，所以 $\bar{M} = M$，因此 M 是闭子空间.

反之，如果 $\{x_n\}$ 是 M 中柯西点列，因 X 是完备度量空间，所以存在 $x \in X$，使 $x_n \to x(n \to \infty)$. 由于 M 是 X 中闭子空间，所以 $x \in M$，即 $\{x_n\}$ 在 M 中收敛. 这就证明了 M 是完备空间. 证毕.

例 2 的证明 由定理 1.4.1，只要证 C 是 l^∞ 中的闭子空间即可. 对任何 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \bar{C}$，存在 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots) \in C, n = 1, 2, \cdots$ $x_n \to x(n \to \infty)$，因此对任何正数 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，