

钱德拉塞卡

1983年诺贝尔物理学奖获得者

S. CHANDRASEKHAR 著作选译

THE MATHEMATICAL THEORY
OF BLACK HOLES

黑洞的数学理论

S. 钱德拉塞卡 著 卢炬甫 译

高等教育出版社

中国科学院
数学研究所
数学研究所

THE MATHEMATICAL THEORY
OF ELASTIC MODELS

THE MATHEMATICAL THEORY
OF ELASTIC MODELS

黑洞的数学理论

中国科学院数学研究所

中国科学院数学研究所



1983年诺贝尔物理学奖获得者
S. CHANDRASEKHAR 著作选译
**THE MATHEMATICAL THEORY
OF BLACK HOLES**

HEIDONG DE SHUXUE LILUN

黑洞的数学理论

S. 钱德拉塞卡 著 卢炬甫 译

高等教育出版社·北京

图字 : 01-2014-0387 号

Copyright ©Oxford University Press, Inc., 1992

The Mathematical Theory of Black Holes, New Edition was originally published in English in 1998. This translation is published by Higher Education Press Limited Company by arrangement with Oxford University Press.

本书的英文原版 *The Mathematical Theory of Black Holes, New Edition* 于 1998 年出版。本翻译版由牛津大学出版社授权高等教育出版社有限公司出版。

图书在版编目 (CIP) 数据

黑洞的数学理论 / (美) 苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡
著 ; 卢炬甫译. -- 北京 : 高等教育出版社, 2018. 4
书名原文 : The Mathematical Theory of Black Holes
ISBN 978-7-04-049097-8

I. ①黑… II. ①苏… ②卢… III. ①数学理论 - 研
究 - 美国 IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 313194 号

策划编辑 王 超
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 王 超
责任校对 刘丽娴

封面设计 王 洋
责任印制 赵义民

版式设计 张 杰

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京盛通印刷股份有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 40.5
字 数 740 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>

版 次 2018 年 4 月第 1 版
印 次 2018 年 4 月第 1 次印刷
定 价 129.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 49097-00

致读者

首先,我的担忧;接着,我的敬礼;最后,我的致辞.我的担忧是怕您会不满意;我的敬礼是向您应尽之仪;我的致辞是要请求您的谅解.如果您现在就期待我讲得好,那可就难为我了;因为我所讲的,都是我心所造;恐怕讲出来后会使自己没趣.言归正传,我就冒一次险吧.

——莎士比亚《亨利四世·下部》

目录 目录已做得足够详细,从中能够看出全书所涉及的题材及其编排.每一章的开头一节都给出展望,而结尾一节则常常是一个回顾.

排列 节的编号按连续顺序贯穿全书,图和表的编号也是如此.方程式则是在同一章里编号,除非加注了该式原属的章的序号.

符号 一个符号的含义在全书里严格保持一致是不可能做到的,因为可用的字母供不应求.另外,也受限于不宜随意地使用符号,那会把方程或公式弄得面目全非、意义混淆.于是只好采取折中办法.那些容易从上下文识别的符号保持其含义上的一贯性;而其它许多符号的含义则是可变的.如有不明之处,重看该章(甚至该节)的开头,一般都能解决.

文献注释 不论源于何处,作者已经从头写出了(或者研究出了)全部题材(包括数学上的进展),因此就没有严格地查找原始文献.每一章结尾的文献注释只是给出作者信息的出处.

本书表达的是作者在自己能力限度内所作的观察.

致谢

在我关于黑洞数学理论的工作中,与一些同事的交往使我大为受益.我特别感激的是:

弗雷德曼 (John L. Friedman), 他的关键性判断、有洞察力的评论和不断的鼓励, 还有涉及第 10 章 (§102) 和第 11 章 (§114) 的帮助;

德特维勒 (Steven Detweiler), 他在几项研究 (已写入本书) 中的积极合作, 他在需要阐明和需要计算的两类事务中常备不懈的作用, 表 IV、VI、IX、X、XI, 以及附录里的表格都是他的贡献;

Garret Toomey, 他在有关史瓦西 (Schwarzschild)、雷斯纳 - 诺兹特朗 (Reissner-Nordström)、克尔 (Kerr) 时空短程线的章节中的协助, 还有他提供的第 3、5、7 章中的漂亮插图;

Robert Wald、Robert Geroch 和 James Hartle, 他们审阅了许多内容.

我对山托珀罗斯 (Basilis Xanthopoulos) 的感激, 则更难以恰当地表达. 他愉快地承担了通读不同阶段书稿的艰难工作, 并且检查了数学推导. 他的帮助还远不止于此: 他还在第 4 (§25)、5 (§42)、6 (§57)、7 (§60)、11 章 (§109) 中作出了原创性贡献, 他的关键性判断也总是非常宝贵.

我还要感谢 Mavis Takeuchi-Lozano 小姐在准备书稿到付印的全过程中给予的协助.

本书的写作 (时间为 1980 年 3 月至 1982 年 1 月) 部分地由自然科学基金准予芝加哥大学的 PHY-78-24275 号项目资助. 而且在 1980 年 3—6 月的三个月里, 我还得到哈佛学院天文台天体物理中心史密松研究所 (华盛顿特区) 的董事研究员基金资助.

最后, 我感谢 Clarendon 出版社对本书 (如我以前的两本书一样) 印刷出版所做的出色工作, 他们的工作一贯如此.

序言

数学准备

自然界的黑洞是宇宙中最完美的宏观物体, 构成它们的唯一基础是我们的时间和空间概念. 由于描述它们的是广义相对论提供的唯一的一族解, 它们又是最简单的物体.

描述黑洞周围时空的唯一的两参量解族是克尔 (Roy Patrick Kerr) 于 1963 年 7 月发现的克尔族. 这两个参量是黑洞的质量和黑洞的角动量. 零角动量的静态解由史瓦西 (Karl Schwarzschild) 于 1915 年 12 月得到. 所以对自然界黑洞的研究也就是对这些解的研究. 本书正是致力于这一研究.



罗伊·帕特里克·克尔 (Roy Patrick Kerr 1934—)



卡尔·史瓦西 (Karl Schwarzschild 1873—1916)

目录

序言	i
第一章 数学准备	1
1. 引言	1
2. 微分几何基础	1
(a) 正切矢量	2
(b) 一次型 (或余切矢量, 或协变矢量)	4
(c) 张量和张量积	6
3. 型的微积分	9
(a) 外部微分	10
(b) 李括号和李微分	12
4. 协变微分	15
(a) 平行位移和短程线	18
5. 曲率型和嘉当结构方程	19
(a) 扭率为零时的循环恒等式和比安基恒等式	24
6. 度规和由之导出的联络; 黎曼几何和爱因斯坦场方程	26
(a) 由度规导出的联络	27
(b) 克里斯托费尔联络对于黎曼和里奇张量的一些推论	29
(c) 爱因斯坦张量	30
(d) 外尔张量	31
(e) 作为四维流型的时空; 标记问题和爱因斯坦场方程	31
7. 四次形式	33
(a) 四次表示	33
(b) 方向导数和里奇旋转系数	35
(c) 转换关系和结构常数	37
(d) 里奇和比安基恒等式	37

(e) 四次形式的推广	38
8. 纽曼 - 彭罗斯形式	39
(a) 零基和自旋系数	39
(b) 外尔、里奇、黎曼张量的表示	40
(c) 转换关系和结构常数	43
(d) 里奇恒等式和消元关系	44
(e) 比安基恒等式	46
(f) 麦克斯韦方程	49
(g) 四次变换	51
9. 光学标量, 彼得罗夫分类, 哥尔德伯 - 萨赫定理	54
(a) 光学标量	55
(b) 彼得罗夫分类	57
(c) 哥尔德伯 - 萨赫定理	60
文献注释	62
第二章 充分广义的时空	65
10. 引言	65
11. 定常态轴对称时空和惯性系的拖曳	65
(a) 惯性系的拖曳	68
12. 所需广义的时空	69
13. 结构方程和黎曼张量的分量	72
14. 四次标架和旋转系数	80
15. 麦克斯韦方程	82
文献注释	83
第三章 史瓦西时空	85
16. 引言	85
17. 史瓦西度规	85
(a) 方程的解	88
(b) 克鲁斯卡尔坐标	90
(c) 变换到史瓦西坐标	92
18. 史瓦西度规的另一种导出	93
19. 史瓦西时空的短程线: 类时短程线	95
(a) 径向短程线	97
(b) 束缚轨道 ($E^2 < 1$)	99
(i) 第一类轨道	101
(α) $e = 0$ 情形	104

(β) $2\mu(3+e) = 1$ 情形	105
(γ) 后牛顿近似	106
(ii) 第二类轨道	106
(α) $e = 0$ 情形	107
(β) $2\mu(3+e) = 1$ 情形	108
(iii) 虚偏心率轨道	109
(c) 开放轨道 ($E^2 > 1$)	111
(i) 第一和第二类轨道	111
(ii) 虚偏心率轨道	119
20. 史瓦西时空的短程线: 零短程线	121
(a) 径向短程线	121
(b) 临界轨道	123
(i) 回避锥	125
(c) 第一类短程线	128
(i) $P \rightarrow 3M$ 和 $P/3M \gg 1$ 时 φ_∞ 的渐近行为	130
(d) 第二类短程线	131
(e) 虚偏心率和碰撞参量小于 $(3\sqrt{3})M$ 的轨道	131
21. 史瓦西时空的纽曼-彭罗斯形式描述	132
文献注释	134
第四章 史瓦西黑洞的扰动	136
22. 引言	136
23. 非定常态、轴对称时空的里奇和爱因斯坦张量	136
24. 度规扰动	139
(a) 轴向扰动	139
(b) 极向扰动	142
(i) 方程组简化为单个一维波动方程	145
(ii) 解的完成	147
25. 关于与线性微分方程组可简化性相联系的特殊积分的定理	148
(a) 方程组 (52)—(54) 的特定解	153
26. $V^{(+)}$ 与 $V^{(-)}$ 之间和 $Z^{(+)}$ 与 $Z^{(-)}$ 之间的关系	155
27. 反射和透射问题	158
(a) 轴向和极向扰动的反射和透射系数的相等性	159
28. 一维势散射理论要点和两个势产生相同透射振幅的必要条件	161
(a) 约斯特函数及其满足的积分方程	163
(b) $\lg T(\sigma)$ 展开为 σ^{-1} 的幂级数和不同的势产生相同透射振幅的条件	165

(c) 对应于势 $V^{(\pm)} = \pm\beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f$ 的积分等式等级性的 直接验证	168
29. 通过纽曼-彭罗斯形式处理的扰动	168
(a) 已经线性化的方程及其简化	170
(b) 方程组 (237)–(242) 解的完成和影子规范	174
30. 变换理论	176
(a) $f = 1$ 和 $\beta =$ 常数的变换存在的条件; 双重变换	179
(b) 支配 F 的方程的验证以及 κ 和 β^2 的值	181
31. 借助于度规扰动对 Ψ_0 的直接计算	182
(a) Ψ_0 的轴向部分	183
(b) Ψ_0 的极向部分	185
32. 理论的物理含义	186
(a) 散射矩阵么正性的应用	189
33. 对扰动理论的一些观察	190
34. 史瓦西黑洞的稳定性	192
35. 史瓦西黑洞的准正则模式	193
文献注释	194
第五章 雷斯纳-诺兹特朗解	197
36. 引言	197
37. 雷斯纳-诺兹特朗解	197
(a) 麦克斯韦方程的解	198
(b) 爱因斯坦方程的解	198
38. 时空的性质	201
39. 雷斯纳-诺兹特朗度规的另一种导出	205
40. 雷斯纳-诺兹特朗时空的短程线	206
(a) 零短程线	207
(b) 类时短程线	209
(c) 带电粒子的运动	214
41. 雷斯纳-诺兹特朗时空的纽曼-彭罗斯形式描述	215
42. 雷斯纳-诺兹特朗解的度规扰动	216
(a) 线性化的麦克斯韦方程	216
(b) 里奇张量的扰动	218
(c) 轴向扰动	218
(d) 极向扰动	221
(i) 解的完成	225

43. $V_i^{(+)}$ 与 $V_i^{(-)}$ 之间和 $Z_i^{(+)}$ 与 $Z_i^{(-)}$ 之间的关系	225
44. 通过纽曼-彭罗斯形式处理的扰动	227
(a) 已经线性化的麦克斯韦方程	227
(b) “影子”规范	229
(c) 基本方程	230
(d) 变量的分离和方程的解耦及简化	231
45. 变换理论	234
(a) 双重变换的可接受性	235
(b) $Y_{\pm i}$ 和 $X_{\pm j}$ 的渐近行为	237
46. 借助于度规扰动对外尔和麦克斯韦标量的直接计算	238
(a) 麦克斯韦标量 ϕ_0 和 ϕ_2	240
47. 反射和透射问题; 散射矩阵	242
(a) 麦克斯韦场的能量-动量张量和电磁能量流	245
(b) 散射矩阵	246
48. 雷斯纳-诺兹特朗黑洞的准正则模式	248
49. 关于雷斯纳-诺兹特朗时空稳定性的考虑	249
50. 对静态黑洞解的一些综合观察	256
文献注释	257
第六章 克尔度规	260
51. 引言	260
52. 支配定常态轴对称真空时空的方程	260
(a) 共轭度规	264
(b) 帕帕培特罗变换	264
53. 规范的选择和方程向标准形式的简化	265
(a) 支配 X 和 Y 的方程的一些性质	269
(b) 方程的替代形式	269
(c) 恩斯特方程	271
54. 克尔度规的推导	273
(a) 黎曼张量的四次分量	276
55. 克尔度规的唯一性; 罗宾逊和卡特的定理	278
56. 克尔时空的纽曼-彭罗斯形式描述	285
57. 度规的克尔-席尔德形式	288
(a) 将克尔度规表示为克尔-席尔德形式	292
58. 克尔时空的性质	294
(a) 能层	301

文献注释	302
第七章 克尔时空的短程线	305
59. 引言	305
60. D 型时空中短程线运动积分的定理	305
61. 赤道面上的短程线	313
(a) 零短程线	314
(b) 类时短程线	318
(i) $L = aE$ 的特别情形	318
(ii) 圆形的和相关的轨道	319
62. 短程线运动的一般方程和哈密顿 - 雅可比方程的可分离性	327
(a) 哈密顿 - 雅可比方程的可分离性和基本方程的另一种导出	329
63. 零短程线	332
(a) θ 运动	332
(i) $\eta > 0$	333
(ii) $\eta = 0$	333
(iii) $\eta < 0$	334
(b) 主零迭合	334
(c) r 运动	335
(d) $a = M$ 情形	341
(e) 偏振方向沿零短程线的传播	341
64. 类时短程线	345
(a) θ 运动	345
(b) r 运动	346
65. 彭罗斯过程	349
(a) 原初彭罗斯过程	350
(b) 瓦尔德不等式	352
(c) 巴丁 - 珀勒斯 - 楚科尔斯基不等式	354
(d) 可逆的能量提取	356
66. $a^2 > M^2$ 时的短程线	357
(a) 零短程线	358
(b) 类时短程线	358
(c) 对因果律的违反	359
文献注释	361

第八章 克尔几何中的电磁波	364
67. 引言	364
68. 定义和引理	365
69. 麦克斯韦方程: 简化和可分离性	366
(a) 对 Φ_0 和 Φ_2 的方程的简化和可分离性	367
70. 楚科尔斯基 - 斯塔罗宾斯基等式	368
71. 解的完成	374
(a) 对 ϕ_1 的解	375
(b) 等式 (80) 的验证	376
(c) 对矢量势的解	377
72. 楚科尔斯基方程到标准形式的变换	379
(a) $r_*(r)$ 关系	381
73. 一般变换理论和向一维波动方程的简化	382
74. 入射电磁波的势垒	385
(a) $Z^{(+\sigma^+)}$ 与 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的区别	387
(b) 解的渐近行为	389
75. 反射和透射问题	391
(a) $\sigma^+ > \sigma_c^+ (= -a/m)$ 和 $\alpha^2 > 0$ 的情形	391
(b) $\sigma_s^+ < \sigma^+ < \sigma_c^+$ 情形	392
(c) $0 \leq \sigma^+ < \sigma_s^+$ 情形	393
76. 进一步放大和物理解释	397
(a) 么正性的应用	400
(b) 无穷远处和事件视界上辐射流的直接计算	401
(c) 进一步放大	405
77. 对理论的一些综合观察	406
文献注释	408
第九章 克尔黑洞的引力扰动	410
78. 引言	410
79. 支配外尔标量 Ψ_0 、 Ψ_1 、 Ψ_3 和 Ψ_4 的方程的简化和解耦	411
80. 规范的选择和自旋系数 κ 、 σ 、 λ 、 ν 的解	414
(a) 影子规范	414
81. 楚科尔斯基 - 斯塔罗宾斯基等式	416
(a) 有用公式汇集	421
(b) 括号标记	422

82. 度规扰动; 问题的表述	422
(a) 基矢扰动的矩阵表示	423
(b) 度规系数的扰动	424
(c) 须确定的量、可用的方程和具有的规范自由度的列举	425
83. 剩余比安基恒等式的线性化	426
84. 转换关系的线性化; 三组方程	427
85. I 组的简化	431
86. II 组的简化; 可积条件	432
87. 可积条件的解	435
88. Ψ 的可分离性和函数 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{S}$	441
(a) 用楚科斯基函数表示 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$	442
89. II 组简化的完成和 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{S}$ 满足的微分方程	444
90. 四个线性化的里奇恒等式	447
91. 方程 (209) 和 (210) 的解	449
(a) 方程 (233) — (236) 的简化	451
(b) 可积条件	454
92. Z_1 和 Z_2 的明晰解	455
(a) Z_1 和 Z_2 解的确定	458
(b) 方程 (211) 和 (212) 的进一步应用	459
93. 解的完成	460
94. 积分等式	462
(a) 由可积条件 (263) 导出的进一步等式	464
95. 回顾	471
96. 史瓦西极限 $a \rightarrow 0$ 时解的形式	474
97. 变换理论和入射引力波的势垒	476
(a) 一个明晰解	477
(b) $Z^{(+\sigma^+)}$ 与 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的区别	479
(c) 势的性质	480
(d) 属于不同势的解之间的关系	485
(e) 解的渐近行为	487
98. 反射和透射问题	487
(a) 用附有适当边界条件的楚科斯基方程的解表示 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$	490
(b) 无穷远处辐射流的直接计算	493
(c) 穿过事件视界的能量流	496
(d) 霍金 - 哈特尔公式	498

99. 克尔黑洞的准正则模式	500
100. 最后的观察	501
文献注释	501
第十章 克尔几何中自旋为 $1/2$ 的粒子	503
101. 引言	503
102. 旋量分析和纽曼 - 彭罗斯形式的旋量基	503
(a) 用旋量表示矢量和张量	507
(b) 彭罗斯用“旗”作为旋量 ξ^A 的图画表示	509
(c) 并矢形式	510
(d) 旋量场的协变导数和自旋系数	512
103. 纽曼 - 彭罗斯形式的狄拉克方程	515
104. 克尔几何中的狄拉克方程及其分离	517
105. 克尔几何中的中微子波	519
(a) 对 $\sigma > \sigma_s (= -am/2Mr_+)$ 的反射和透射问题	521
(b) 超辐射的缺失 ($0 < \sigma < \sigma_s$)	523
106. 守恒流和狄拉克方程向一维波动方程形式的简化	524
(a) 狄拉克方程简化为一维波动方程形式	525
(b) 狄拉克方程在平直空间椭球坐标系中的分离形式	527
107. 反射和透射问题	528
(a) 朗斯基行列式 $[Z_{\pm}, Z_{\pm}^*]$ 对 r 的范围 $r_+ < r < \infty$ 的守恒性	529
(b) 穿过事件视界能流的正值性	530
(c) 超辐射缺失的量子起因	532
文献注释	532
第十一章 其它解; 其它方法	535
108. 引言	535
109. 支配定常态轴对称时空的爱因斯坦 - 麦克斯韦方程	535
(a) 规范的选择和方程简化为标准形式	538
(b) 方程的进一步变换	539
(c) 恩斯特方程	540
(d) 恩斯特方程的变换性质	542
(e) 共轭运算	543
110. 克尔 - 纽曼解: 推导和纽曼 - 彭罗斯形式描述	544
(a) 纽曼 - 彭罗斯形式的克尔 - 纽曼时空描述	550