高等院校经济管理类专业　经济数学基础系列教材

微积分学习指导与同步习题解答

杨皓　主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材

微积分
学习指导与同步习题解答

杨 皓 主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与同步习题解答 / 杨皓主编. —北京：中国财政经济出版社，2017.9
高等院校经济管理类专业 经济数学基础系列教材
ISBN 978－7－5095－7729－5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 224600 号

责任编辑：吕小军　　　　责任校对：张　凡
封面设计：思梵星尚

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：88190406　北京财经书店电话：64033436　84041336
北京富生印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　16 印张　385 000 字
2017 年 9 月第 1 版　2017 年 9 月北京第 1 次印刷
定价：45.00 元
ISBN 978－7－5095－7729－5
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744
打击盗版举报热线：010－88190414　QQ：447268889

前　言

Preface

数学作为自然科学的重要分支在经济学与管理学领域得到日益广泛的应用，微积分、线性代数、概率论与数理统计是经济管理类专业的重要基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助、指导广大读者学好这三门课程，我们编写了这套与中国财政经济出版社出版的《经济数学基础系列教材》完全配套的《学习指导与同步习题解答》，以使读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，提高数学思维水平及应试能力。本书既是学习的指导书，也是备考硕士研究生的应试指南。

本系列辅导书共分三本《微积分学习指导与同步习题解答》、《线性代数学习指导与同步习题解答》、《概率论与数理统计学习指导与同步习题解答》。章节的划分与内容设置与中国财政经济出版社出版的《经济数学基础系列教材》完全一致。在每一章的开头先对本章知识点进行简要的概括，然后通过对精选例题的分析，归纳解题方法的技巧，总结规律，最后是教材习题详解。

每章由六部分有机组合而成

一、基本要求：根据课程教学大纲，提出对每一章基本知识点的具体要求，指出重难点。

二、内容提要：对每一章所学的知识进行系统的回顾，对基本概念、基本定理进行系统梳理。

三、典型例题：这一部分是每一章的核心内容，编者基于多年的教学经验和对历年考研试卷试题的研究，归纳出与该章内容相关的基本题型，针对每一种题型，整理出大量经典例题进行深入分析与讲解，使读者扎实掌握每一个知识点，并能熟练运用于解题中。

四、教材习题解答：为了方便读者对课本知识进行复习巩固，本书对教材中的全部习题作了详细解答，有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

五、综合自测题：在每一章的最后，编者精心编写出部分习题，这些题目难易适当，能比较准确地反映学习该章的基本要求，通过自测题的测试，可以有效地检验学生对本章知识点掌握的熟练程度。

六、自测题参考答案。

本系列丛书题型广泛，内容丰富，涵盖了经济数学的主要内容，读者可以从中加深理解经济数学的基本内容，熟练掌握各种解题方法、技巧和规律，提高解题和应试能力。

此次先期出版的《微积分学习指导与同步习题解答》由杨皓主编，编写分工为：陆璐编写第一、第二、第三章；周爽编写第四、第五章；刘亚楠编写第六、第八章；胡坤编写第

七、第九章。第十章差分方程，该章内容在很多经济管理类专业中属于略讲部分，因此本书暂未将这一章列入。

本丛书博采众家之长，参考了多本同类书籍，在此向这些书籍的编者表示感谢。由于我们的水平有限，书中仍会有一些错误和问题，恳请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

2017 年 8 月

目　　录

Contents

第1章

函　　数

一、基本要求

掌握函数的概念；了解函数的几何特性并掌握其几何特性的图形特征；了解反函数的概念并会求反函数；理解复合函数的概念并掌握将复合函数分解为简单函数的方法；理解基本初等函数的概念并熟练掌握基本初等函数的定义域、值域和基本性质；理解初等函数的概念；了解分段函数的概念.

二、内容提要

1. 函数定义：设 D 是一个非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对于任意一个 $x \in D$，通过对应规则 f 总有唯一确定的 $y \in R$ 与之相对应，则称对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数，或称 y 是 x 的函数，表示为 $y=f(x)$.

2. 反函数定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f，对于任意一个 $x \in D_f$，都有唯一确定的 $y \in Z_f$ 与之相对应，且满足关系 $y=f(x)$. 如果对于任意一个 $y \in Z_f$，都有唯一确定的 $x \in D_f$ 与之相对应，且满足关系 $y=f(x)$，则称 $x=f^{-1}(y)$ 是定义在 Z_f 上，以 y 为自变量的函数，并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

3. 复合函数定义：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的值域为 Z_g，若

$$D_f \cap Z_g \neq \varphi$$

则函数 $y=f(g(x))$ 称为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数. 其中，u 为中间变量；x 是自变量，该复合函数的定义域为 $D_F=\{x \mid u=g(x) \in D_f\}$.

4. 基本初等函数定义：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角

函数这六类函数统称为基本初等函数．

5. 初等函数定义：基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合，得到的函数统称为初等函数．

6. 常用的分段函数．

（1）绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，其定义域为 R，值域为 $[0,+\infty)$．

（2）符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，其定义域为 R，值域为集合 $\{-1,0,1\}$．

（3）取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，其定义域为 R，值域为 Z.

（4）狄利克莱（*Dirichlet*）函数 $y=D(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0,\text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$，其定义域为 R，值域为集合 $\{0,1\}$．

三、典型例题

题型一：求函数定义域，函数表达式

［例 1.1］求函数 $y=\ln\dfrac{x}{x-1}+\sqrt{2x-2}+\arcsin(x-3)$ 的定义域．

解： $\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}>0 & \Leftrightarrow\quad x>1 \text{ 或 } x<0\\ 2x-2\geqslant 0 & \Leftrightarrow\quad x\geqslant 1\\ -1\leqslant x-3\leqslant 1 & \Leftrightarrow\quad 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$

$\therefore$ 该函数定义域为 $[2,4]$．

注： 在求函数定义域时应考虑以下几点：

（1）分母不等于零；

（2）负数不能开偶次根；

（3）对数函数中真数必须大于零，底数大于零且不为 1；

（4）反正弦，反余弦定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

（5）问题实际背景．

［例 1.2］设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$，求 $f(x)$.

提示： 将等式中的 x 换成 $\dfrac{1}{x}$.

解： $\begin{cases} f(x)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x} \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{2}f(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{4}{x} \\ 2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=2x \end{cases} \Rightarrow f(x)=\dfrac{4-2x^2}{3x}$

题型二：复合函数与反函数

[例 1.3] 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\leqslant 0 \\ -x^2, x>0 \end{cases}$ 的反函数是 $g(x)$，求 $g(x)$ 及 $g(4)$.

提示： 正确理解反函数的定义，$g(4)=?\Leftrightarrow f(?)=4$.

解： $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, x\geqslant 0 \\ \sqrt{-x}, x<0 \end{cases}$

$\therefore g(4)=-2$

求 $y=f(x)$ 的反函数的一般步骤：

（1） 利用 $y=f(x)$，解出 $x=f^{-1}(y)$；

（2） 交换 x,y；

（3） $y=f^{-1}(x)$ 即为所求反函数.

注： $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线，而交换变量之后 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 因此，我们俗称的“直接函数图像与反函数图像关于直线 $y=x$ 对称”中的反函数图像，指的是交换变量 x,y 之后所形成的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像. 而在高等数学中 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 均可以称作函数 $y=f(x)$ 的反函数.

[例 1.4] 指出 $y=\arctan e^{\sqrt{\sin\ln x}}$ 的复合过程.

解： $y=\arctan u$，$u=e^v$；$v=\sqrt{s}$；$s=\sin t$；$t=\ln x$

[例 1.5] 设 $f(x)=\sin 2x+1, g(x)=x^2$，求 $f(f(x))$，$f(g(x))$，$g(f(x))$，$g(g(x))$.

解： $f(f(x))=\sin(\sin 2x+1)+1$；$f(g(x))=\sin 2x^2+1$；$g(f(x))=(\sin 2x+1)^2$；$g(g(x))=(x^2)^2=x^4$

注： 分析清楚复合函数的复合结构对后期微积分的学习有非常大的帮助！

题型三：函数性质

奇偶性、单调性、周期性、有界性是函数的基本特性，其中有界性是大家首次接触，在描述有界性时一定要注明有界的区间，因为同一个函数在不同区间上的有界性是不同的.

[例 1.6] 试证明 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上有界，在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 无上界.

证明： 对函数 $y=x^2$，$\exists M=1, \forall x\in[0,1], |y|=|x^2|\leqslant M$，所以 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上有界.

注： 在这部分证明中，即使取 $M=2,3,\cdots$ 也不会影响有界性的证明，因此只要是有界函数，它的界不唯一. 在证明过程中强调的是“界”的存在性，而不强调“界”具体等于多少.

对函数 $y=x^2$，$\forall M>0, \exists x_0=\sqrt{M+1}\in(-\infty,+\infty), f(x_0)=(\sqrt{M+1})^2>M$，所以 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 无上界.

注： 在这部分证明中，即使取 $x_0=\sqrt{M+2}, \sqrt{M+3}\cdots$ 也不会影响无界性的证明.

[例 1.7] 试证明函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

证明： $\forall M>0$，$\exists x_0=\dfrac{1}{2[M+1]\pi+\dfrac{\pi}{2}}\in(0,+\infty)$，$s.t.$ $\dfrac{1}{x_0}\sin\dfrac{1}{x_0}=2[M+1]\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$

即 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界.

四、教材习题解答

1. 用区间表示下列不等式的解集：

(1) $|x+4|<3$

解： $-3<x+4<3$，即 $-7<x<-1$

则该不等式的解集为$(-7,-1)$.

(2) $|x-1|\geqslant 5$

解： $x-1\geqslant 5$ 或 $x-1\leqslant -5$，即 $x\geqslant 6$ 或 $x\leqslant -4$

则该不等式的解集为$(-\infty,-4]\cup[6,+\infty)$.

(3) $|2x+1|>|x-1|$

解： $(2x+1)^2>(x-1)^2$，即 $x>0$ 或 $x<-2$

则该不等式的解集为$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

(4) $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$

解： $(|x+1|+|x-1|)^2\leqslant 16$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$

则该不等式的解集为$[-2,2]$.

(5) $0<|ax+b|<\delta$，a,b,δ 均为正常数.

解： $0<ax+b<\delta$ 或 $-\delta<ax+b<0$，即 $-\dfrac{\delta+b}{a}<x<-\dfrac{b}{a}$或 $-\dfrac{b}{a}<x<\dfrac{\delta-b}{a}$，则该不等式的解集为$\left(-\dfrac{\delta+b}{a},-\dfrac{b}{a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{a},\dfrac{\delta-b}{a}\right)$.

2. 判断下列函数是否为同一函数，并说明理由：

(1) $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$

解： 否．因为 $y=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而 $y=\sin(arcsinx)$的定义域为$[-1,1]$.

(2) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$

解： 是.

(3) $y=\sqrt{2}\cos x$ 与 $y=\sqrt{1+\cos 2x}$

解： 否．因为 $y=\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2\cos^2x}=\sqrt{2}|\cos x|$

(4) $y=\sqrt{x(x+2)}$与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x+2}$

解： 否．因为 $y=\sqrt{x(x+2)}$的定义域为$(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$，而 $y=\sqrt{x}\sqrt{x+2}$的定义域为$[0,+\infty)$.

(5) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$与 $y=x\sqrt[3]{x-1}$

解：是.

3. 求下列函数的定义域，并用区间表示：

（1） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$

解：$\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ |x|-x\neq 0 \end{cases}$，则该函数的定义域为$[-2,0)$.

（2） $y=\ln(x-1)+\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

解：$\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases}$，则该函数的定义域为$(1,+\infty)$.

（3） $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$

解：$\begin{cases} x\neq 0 \\ 1-x^2\geqslant 0 \end{cases}$，则该函数的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

（4） $y=3^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$

解：$\begin{cases} x\neq 0 \\ -1\leqslant \ln\sqrt{1-x}\leqslant 1 \end{cases}$，则该函数的定义域为$[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$.

（5） $y=\arccos\dfrac{1}{x-1}$

解：$\begin{cases} -1\leqslant \dfrac{1}{x-1}\leqslant 1 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$，则该函数的定义域为$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

（6） $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\lg(25-x^2)$

解：$\begin{cases} \sin x>0 \\ 25-x^2>0 \end{cases}$，则该函数的定义域为$(-5,-\pi)\cup(0,\pi)$.

4. 作出下列分段函数的图形，并求函数值$f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)$.

（1） $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0 \\ e^x, & 0\leqslant x\leqslant 6 \\ \sin x, & x>6 \end{cases}$

解：$f(-1)=-1$，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$，$f(3)=e^3$，图略.

（2） $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & |x|<1 \\ \ln x, & x\geqslant 1 \end{cases}$

解：详见图 1.1.

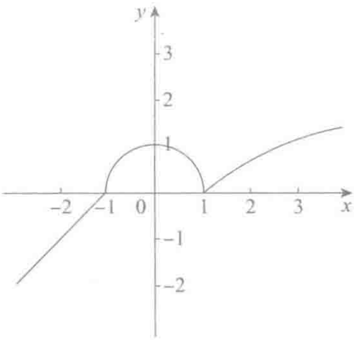

图 1.1

$f(-1)=0$，$f(0)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(3)=\ln 3$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$f(-2)$，并作图．

解： $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(-2)=0$

作图如图 1.2.

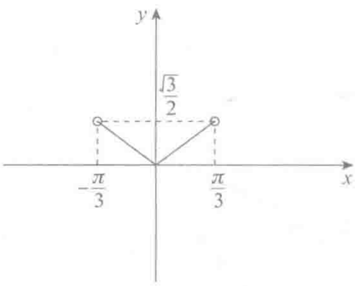

图 1.2

6. 确定 $y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|\leqslant 2\\ x-2, & 2<|x|<3\end{cases}$ 的定义域，并画图．

解： 定义域为 $(-3,3)$．作图如图 1.3.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ x^2-1, & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(x+2)$ 和 $f(-x)$.

解： $f(x+2)=\begin{cases}2(x+2), & x+2<1\\ (x+2)^2-1, & x+2\geqslant 1\end{cases}$，即 $f(x+2)=\begin{cases}2x+4, & x<-1\\ x^2+4x+3, & x\geqslant -1\end{cases}$

$f(-x)=\begin{cases}2(-x), & -x<1\\ (-x)^2-1, & -x\geqslant 1\end{cases}$，即 $f(-x)=\begin{cases}-2x, & x>-1\\ x^2-1, & x\leqslant -1\end{cases}$

8. 设对于一切实数 $f(x)$ 均满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$.

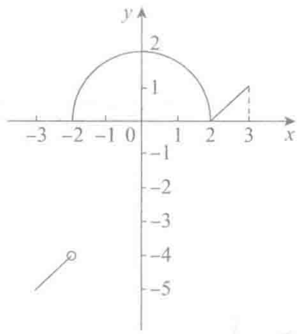

图 1.3

解：令 $x=1-t$，则：$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2$

联立$\begin{cases}2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\\2f(x)+f(1-x)=x^2\end{cases}$，可得：$f(x)=\dfrac{2x^2-(1-x)^2}{3}=\dfrac{x^2+2x-1}{3}$

9. 已知$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$，求$f(e^x)$.

解：令 $t=\dfrac{1}{x}>0$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，$f(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1+(\dfrac{1}{t})^2}=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$

那么：$f(e^x)=\dfrac{1+\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}$，$x\in\mathbb{R}$

10. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,1)$内无界.

证明：$\forall M>0, \exists x_0=\sqrt{\dfrac{1}{M+1}}\in(0,1)$，$s.t.$ $\dfrac{1}{x_0^2}=M+1>M$，即 $y=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,1)$内无界.

11. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界.

证明：详见典型例题例 1.7.

12. 在区间(a,b)内，函数$f(x)$和$g(x)$分别单调递增，证明函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$与$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$也在区间$(a,b)$内单调递增.

证明：$\forall a<x_1<x_2<b$，$\varphi(x_1)=\max\{f(x_1),g(x_1)\}$, $\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}$.

(1) 若$f(x_1)\geqslant g(x_1)$, $f(x_2)>g(x_2)$时，$\varphi(x_2)=f(x_2)\geqslant f(x_1)=\varphi(x_1)$，从而证明$\varphi(x)$在$(a,b)$内单调递增.

(2) 若$f(x_1)\geqslant g(x_1)$, $f(x_2)\leqslant g(x_2)$时，$\varphi(x_2)=g(x_2)\geqslant f(x_2)\geqslant f(x_1)=\varphi(x_1)$，从而证明$\varphi(x)$在$(a,b)$内单调递增.

(3) 若$f(x_1)<g(x_1)$, $f(x_2)<g(x_2)$时，$\varphi(x_2)=g(x_2)\geqslant g(x_1)=\varphi(x_1)$，从而证明$\varphi(x)$在$(a,b)$内单调递增.

(4) 若$f(x_1)<g(x_1)$, $f(x_2)\geqslant g(x_2)$时，$\varphi(x_2)=f(x_2)\geqslant g(x_2)\geqslant g(x_1)=\varphi(x_1)$，从而证明$\varphi(x)$在$(a,b)$内单调递增.

同理可证$\psi(x)$在(a,b)内单调递增.

13. 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数，若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加，试证明$f(x)$在

$(-l,0)$内也单调增加．

证明：$\forall\ -l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，则 $f(-x_2)<f(-x_1)$. 又因为 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 内的奇函数，则 $-f(x_2)<-f(x_1)$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加．

14. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$

解：该函数为奇函数：

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}}=-f(x)$$

(2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$

解：该函数为奇函数：

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_a(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}})=-f(x)$$

(3) $f(x)=x^2+\cos x$

解：该函数为偶函数：

$$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$$

(4) $f(x)=\begin{cases}2+x, & -2\leqslant x<-1\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ -2+x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

解：该函数为非奇非偶函数：

$$f(-x)=\begin{cases}2-x, & 1<x\leqslant 2\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ -2-x, & -2\leqslant x<-1\end{cases}=-f(x),\ x\neq 0$$

(5) $f(x)=x^n-x^{-n}$，n 为正整数．

解：$f(x)=\dfrac{x^{2n}-1}{x^n}$

$$f(-x)=\frac{x^{2n}-1}{(-x)^n}\begin{cases}-\dfrac{x^{2n}-1}{x^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{x^{2n}-1}{x^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

故当 n 为奇数时，$f(x)$ 为奇函数．故当 n 为偶数时，$f(x)$ 为偶函数．

15. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的任意函数，试证明 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数，$h(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数．

证明：$g(-x)=f(-x)-f(x)=-g(x)$，则 $g(x)$ 为奇函数．

$h(-x)=f(-x)+f(x)=h(x)$，则 $h(x)$ 为偶函数．

16. 下列函数中哪些是周期函数，若是周期函数，请指出其周期：

(1) $y=x\cos x$

解：不是．

(2) $y=\sin^2 x$

解： 是，$y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，最小正周期为 $T=\pi$.

(3) $y=2\tan 3x$

解： 是，最小正周期为 $T=\dfrac{\pi}{3}$.

(4) $y=1+|\sin 2x|$

解： 是，最小正周期为 $T=\dfrac{\pi}{2}$.

(5) $y=\cos 2x+\tan\dfrac{x}{2}$

解： 是，最小正周期为 $T=2\pi$.

17. 讨论狄利克雷函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的周期性和有界性.

解： 任意选取有理数 r，当 x 为有理数时，$f(x+r)=1=f(r)$. 当 x 为无理数时，$f(x+r)=0=f(r)$，即 $f(x)$ 以任意有理数为周期.

$\forall x\in\mathbb{R}$，$|f(x)|\leqslant 1$，即 $f(x)$ 为有界函数.

18. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，在 $[0,2)$ 内有 $f(x)=x^2$，求 $f(x)$ 在 $[0,6)$ 内的表达式.

解： $\forall x\in[2,4)$，则 $x-2\in[0,2)$. 又因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，则：

$f(x)=f(x-2)=(x-2)^2$

$\forall x\in[4,6)$，则 $x-4\in[0,2)$，$f(x)=f(x-4)=(x-2)^4$

故 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,2)\\(x-2)^2, & x\in[2,4)\\(x-4)^2, & x\in[4,6)\end{cases}$

19. 设函数 $y=f(x)$，$x\in R$ 的图像与 $x=a$，$x=b$ 均对称，且 $a\neq b$. 求证 $y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

解： 因为 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=a$ 对称，则 $f(x)=f(2a-x)$. 又 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=b$ 对称，$f(2a-x)=f(2b-(2a-x))=f(x+2b-2a)$，故 $f(x)=f(x+2b-2a)$. 同理可得 $f(x)=f(x+2a-2b)$，则 $y=f(x)$ 的周期为 $2|a-b|$.

20. 求下列函数的反函数以及反函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$

解： 由 $y=\dfrac{x+2}{x-2}=1+\dfrac{4}{x-2}\Rightarrow x=\dfrac{2y+2}{y-1}$，则 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 的反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$，其定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $y=\ln(1-2x)$

解： 由 $y=\ln(1-2x)\Rightarrow x=\dfrac{1-e^y}{2}$，则 $y=\ln(1-2x)$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-e^x}{2}$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.