# 效应代数与伪效应代数的结构

颉永建 著

科学出版社

# 效应代数与伪效应代数的结构

颉永建 著



科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书介绍了效应代数与伪效应代数的基本理论，是作者十多年来从事量子逻辑学习研究成果的总结，同时包括国际上量子逻辑研究领域中的相关成果. 全书共6章，内容包括 $n$-可分效应代数、具有 Riesz 分解性质的效应代数、区间效应代数、区间效应代数的张量积、MV-代数的 Greechie 图及黏合构造技巧、弱可换的伪效应代数及其理想、完全伪效应代数、量子逻辑上的量子测度理论等.

本书可作为数学及计算机专业的量子逻辑、智能计算、模糊数学等研究方向的研究生参考书或教材，也可供相关领域的本科生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

效应代数与伪效应代数的结构/颉永建著. —北京：科学出版社，2017. 11
ISBN 978-7-03-055327-0

Ⅰ. ①效…  Ⅱ. ①颉…  Ⅲ. ①量子力学–研究  Ⅳ. ①O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 281179 号

责任编辑：李 萍 刘艳华／责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 11 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2017 年 11 月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：310 000

定价：95.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前 言

量子逻辑旨在为量子物理建立相应的数学模型，起源于解决 Hilbert 在 1900 年世界数学家大会上所提出的第六个问题，即物理学的公理化问题．在 20 世纪 30 年代初期，Kolmogorov 将概率公理化，试图解决这个问题．他的这个模型认为物理系统中的随机事件之集是 $\sigma$ 布尔代数，该模型在刻画经典力学的运动规律方面有重要的应用并取得了成功．但是量子力学系统中的随机事件之集不能用经典 Kolmogorov 概率论中随机事件的结构来描述，因此对量子力学中事件的公理化描述就成了量子理论研究的重要问题之一．量子逻辑是量子力学存在的数学基础，是极富启发性的数学结构，同时也是一种全新的非经典逻辑，量子逻辑的研究内容涵盖经典逻辑与模糊逻辑．量子逻辑不仅是量子力学的数学模型，还是计算机科学、量子计算、量子信息的数学基础，而量子计算、量子信息、量子概率等新兴学科的出现又为量子逻辑提供了广泛的应用领域．

自 1936 年 Birkhoff 和 von Neumann 提出量子逻辑的概念以来，经过近一个世纪的发展，量子逻辑的研究取得了丰硕的成果．例如，1983 年 Kalmbach 出版的专著*Orthomodular Lattices* 是 sharp 量子逻辑的重要著作，该著作从代数、几何及逻辑等方面深入系统地总结了 sharp 量子逻辑的研究成果．2000 年，斯洛伐克科学院数学研究所的 Dvurečenskij 和 Pulmannová 教授出版了专著*New Trends in Quantum Structures*，总结了自效应代数提出以来至 2000 年对 unsharp 量子逻辑的研究成果．2007 年，Engesser，Gabbay 和 Lehmann 联合全球著名量子逻辑领域专家出版了*Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures* 一书，总结了自量子逻辑诞生以来的重要研究成果及当前研究的一些重要问题．同时，我国学者在量子逻辑的研究领域也做了大量的工作．然而，国内专门介绍量子逻辑的书籍较少，本书尝试总结近年来对量子逻辑的一些学习研究成果，同时也收录了国际上相关的部分研究内容．

本书共 6 章，第 1~4 章主要介绍量子逻辑领域中效应代数与伪效应代数这两种量子逻辑的代数结构；第 5 章使用态的性质研究非 Archimedean 伪效应代数的代数结构；第 6 章介绍量子逻辑上量子测度的结构．

在本书的撰写过程中，得到了许多老师、同事、同仁的关心和帮助．在此特别感谢我的导师陕西师范大学的李永明教授多年来的教导、鼓励和支持，是他指引我从事量子逻辑的研究，是他的谆谆教诲及细心指导使我进入了量子逻辑领域的研究．书中的许多内容及结论是在李永明教授的指导下取得的．感谢 Dvurečenskij 教

授邀请我于 2011 年在斯洛伐克科学院数学研究所跟随他学习和研究量子逻辑. 感谢陕西师范大学数学与信息科学学院院长吉国兴教授和副院长唐三一教授等的关心以及经费支持. 感谢尚云博士、李得超博士、郭建胜博士、席政军博士、李平博士、林运国博士、王拥兵博士、邵连合博士、张胜礼博士、魏秀娟博士、梁常建博士等的帮助和支持. 感谢我的研究生郭亚男和樊丰丽对书稿的校对及编辑工作.

本书的出版得到国家自然科学基金面上项目 (61673250)、陕西师范大学量子信息学交叉学科建设项目、陕西师范大学研究生教育教学改革研究项目的资助.

由于作者的水平有限, 书中的不妥之处在所难免, 恳请各位专家与读者不吝赐教.

颉永建

2017 年 8 月于陕西师范大学

# 目　　录

前言
第 1 章　效应代数与差分偏序集 ······ 1
1.1　正交模格 ······ 3
1.2　差分偏序集 ······ 7
1.3　效应代数 ······ 10
1.4　差分格与 MV-代数 ······ 13
1.5　部分可换半群与广义效应代数 ······ 17
第 2 章　区间效应代数 ······ 27
2.1　效应代数与交换群 ······ 28
2.2　$n$-可分效应代数 ······ 30
2.3　区间效应代数的张量积 ······ 36
2.4　具有 Riesz 分解性质的效应代数 ······ 39
2.5　标度效应代数 ······ 55
2.6　$E$ 完全效应代数 ······ 67
第 3 章　格效应代数的黏合构造 ······ 79
3.1　格效应代数与 MV-代数 ······ 80
3.2　格效应代数的相容元及块 ······ 82
3.3　环引理 ······ 87
3.4　MV-代数的 Greechie 图及其应用 ······ 90
3.5　只含有 1 型原子的格效应代数的黏合 ······ 95
3.6　有限格效应代数的黏合 ······ 105
第 4 章　弱可换的伪效应代数 ······ 118
4.1　伪效应代数与伪差分偏序集 ······ 118
4.2　广义弱可换的伪效应代数及其单位化 ······ 120
4.3　弱可换的伪正交代数 ······ 123
4.4　伪效应代数中的主要元、精确元与中心元 ······ 125
4.5　广义伪效应代数中的 Riesz 理想与 Riesz 同余 ······ 136
4.6　广义伪效应代数与其单位化中的 Riesz 理想 ······ 145
第 5 章　完全伪效应代数 ······ 152
5.1　效应代数上的离散态 ······ 153

5.2 具有二值态的伪效应代数 ······ 155
5.3 具有 $(n+1)$-值离散态的伪效应代数 ······ 158
5.4 $n$-完全伪效应代数 ······ 161
5.5 强 $n$-完全伪效应代数的表示 ······ 165
**第 6 章 量子测度理论** ······ 177
6.1 有限空间上的超级量子测度 ······ 178
6.2 超级量子测度与带号测度 ······ 196
6.3 效应代数上的量子测度 ······ 201
6.4 具有 Riesz 分解性质的效应代数上的超级量子测度 ······ 203
6.5 超级量子测度的表示 ······ 215
**参考文献** ······ 231

# 第 1 章 效应代数与差分偏序集

量子力学和相对论是 20 世纪物理学最伟大的两项科学成就, 量子逻辑是伴随着量子物理的公理化而发展起来的一种理论. 自从 1936 年 Birkhoff 和 von Neumann 提出量子逻辑的概念以来, 经过近一个世纪的发展, 量子逻辑方面的研究取得了丰硕的成果, 请参见文献 [1]—[25]. 量子逻辑是能够描述量子系统的数学模型, 它是用代数方法研究量子系统中可观测量之集的代数结构, 用几何方法研究量子系统态之凸结构的数学分支. 经典力学中的可观测量之集是布尔代数, 而量子系统中的可观测量之集不再满足分配律, 是非分配的代数结构. 经典力学系统的态是定义在布尔代数上的概率测度, 量子系统上的态是经典可加测度的推广. 而最近出现的量子测度是一种能刻画量子干涉现象的非可加测度 [26–29]. 量子逻辑的发展主要经历了以下三个重要阶段.

第一阶段 ——sharp 量子逻辑的诞生与发展. 1936 年, Birkhoff 和 von Neumann 联合发表的题为 *The logic of quantum mechanics* 的论文标志着 sharp 量子逻辑的诞生. 他们认为量子力学是建立在复可分的 Hilbert 空间上的物理系统, 该系统包含 “state” 和 “observable” 两个基本量. State 是物理系统的态, 可以描述整个物理系统, 对应 Hilbert 空间中的单位向量; observable 是物理系统中的可观测量, 对应 Hilbert 空间中的正交投影算子或者闭子空间之格 [1]. 量子逻辑考虑的是物理系统的事件结构对应的命题演算, 而与 Hilbert 空间上的量子系统相联系的命题演算应与它的闭子空间之格的演算是一致的, 它应该是一个正交补的模格 $L$, 即

$$如果\ x, a, b \in L, x \leqslant b, 那么 (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee x,$$

其中 $L$ 中的元素对应所考虑的系统中的命题. 但由于 Hilbert 空间的闭子空间格是模格当且仅当该空间是有限维的 [4], 因此模格的这种模型具有很大的局限性. 1937 年, Husimi 发现: 任意的 Hilbert 空间 $H$ 的投影格 $\mathcal{P}(H)$ 满足一个比模律弱的规律, 也就是正交模律 [5], 即

$$如果\ a, b \in \mathcal{P}(H), a \leqslant b, 那么 b = a \vee (a' \wedge b).$$

后来, Kaplansky 正式将其命名为 “orthomodular law (正交模律)” [6]. 如果一个正交补格满足正交模律, 则称为正交模格. 至此, 正交模格 (正交模偏序集) 或 $\sigma$ 正交

模格 ($\sigma$ 正交模偏序集) 就成了标准量子逻辑的代名词 [4]. 随后, 1957 年 Gleason 证明了 Hilbert 空间的闭子空间格上的概率表示定理 [3]. 1963 年, Mackey 出版了*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* 一书, 从量子试验的角度直接验证了量子系统的事件结构集是正交模格 [7]. 这进一步奠定了正交模格是量子逻辑研究的主要模型的地位 [8−10,12]. 1983 年, Kalmbach 出版的专著*Orthomodular Lattices* 是 sharp 量子逻辑的重要著作, 该著作从代数、几何及逻辑等方面深入系统地总结了 sharp 量子逻辑的研究成果 [4]. 值得一提的是, 该著作中还提供了 53 个开问题, 至今影响着量子逻辑的研究方向.

第二阶段 —— unsharp 量子逻辑的诞生与发展. 为了解决物理系统中非精确测量的需要集, 伴随模糊数学的出现与发展, 一些新的量子结构被作为量子逻辑的模型 [13−20]. 1992 年, Kôpka 在 fuzzy 集上引进了一种部分代数运算 $\ominus$, 定义 $b \ominus a$ 存在当且仅当 $a \leqslant b$, 具有这种运算的 fuzzy 集称为差分偏序集 [15]. 1994 年, Kôpka 和 Chovanec 把这种差分运算推广到一般的偏序集上, 引入了差分偏序集的定义 [16]. 从此差分偏序集作为一种新的量子结构出现, 差分偏序集对于解决非交换的测量理论与非交换概率问题起着重要的作用 [2].

Hilbert 空间效应代数 $\mathcal{E}(H)$ 是指 Hilbert 空间 $H$ 中介于零算子 0 与单位算子 $I$ 之间的自伴算子, $\mathcal{E}(H)$ 中的部分运算 $\oplus$ 定义为 $A \oplus B$ 存在当且仅当 $A + B \leqslant I$, 且 $A \oplus B = A + B$ [19]. Hilbert 空间效应在量子测量中具有重要的作用 [19]. 由于投影算子格 $\mathcal{P}(H) \subseteq \mathcal{E}(H)$, 其中 $\mathcal{P}(H)$ 代表 sharp 量子事件之集, $\varepsilon(H)$ 代表 unsharp 量子事件之集, 不同于 sharp 量子事件, unsharp 量子事件不满足矛盾律 $a \wedge a' = 0$. 从量子力学的角度, 这也可以看作是从 PV (projection valued, 投射算子) 测量过渡到 POV(positive operator valued, 正算子) 测量 [2, 19]. 为了描述量子测量中的 unsharp 事件, Foulis 和 Bennett 在文献 [19] 中推广了 Hilbert 空间效应代数, 给出了效应代数的定义. 效应代数的提出标志着 unsharp 量子逻辑的诞生. 事实上, 早在 1989 年, Giuntini 和 Greuling 已在文献 [14] 中引入了弱正交代数的定义. 而效应代数、差分偏序集、弱正交代数之间是代数等价的, 这些结构都可以看作量子逻辑, 它们是正交模格或正交模偏序集的推广 [2, 18]. 2000 年, 斯洛伐克科学院数学研究所的 Dvurečenskij 和 Pulmannová 教授出版了专著*New Trends in Quantum Structures*, 总结了自效应代数提出以来至 2000 年关于 unsharp 量子逻辑的研究成果, 系统介绍了差分偏序集、效应代数、MV-代数、BCK 代数等量子结构及它们之间的关系.

第三阶段 —— 非交换量子逻辑的诞生与发展. 为了解决量子力学中的一些新的问题, 满足物理系统中非交换性的需要, 又出现了许多新的量子结构模型[13,21−23]. 在这些模型中, 通过去掉 MV-代数中"全部和"运算的交换性, Georgescu 和 Iorgulescu 给出了伪 MV-代数的定义 [21]. 类似地, 通过去掉效应代数中"部分和"运算的交换性, Dvurečenskij 和 Vetterlein 给出了伪效应代数的概念 [22, 23]. 这标志着量子逻辑发展的第三阶段的到来. 目前量子逻辑的发展处于第三阶段, 效应代数和伪效应代数这两类量子结构成为量子逻辑研究的主要对象 [2, 13]. 2007 年, Engesser, Gabbay 和 Lehmann 联合全球著名量子逻辑领域专家编辑出版了 *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures* 一书, 总结了自量子逻辑诞生以来的重要研究成果及当前研究的一些重要问题. 我国学者也在量子逻辑领域做了许多重要的工作, 参见文献 [30]—[40]. 例如, 清华大学应明生教授最早研究了基于 sharp 量子逻辑的自动机理论; 中国科学院陆汝钤院士和尚云研究员及陕西师范大学的李永明教授后来研究了基于 unsharp 量子逻辑的自动机理论; 浙江大学武俊德教授研究了效应代数与算子代数之间的关系; 四川大学张德学教授对 Topos 理论及 Quantle 理论进行了深入的研究; 湖南大学李庆国教授在量子逻辑与剩余格之间建立了关系; 上海海事大学张小红教授对模糊逻辑与量子逻辑之间的关系进行了深入的研究, 等等.

本章主要给出本书所需的一些基本概念和结论, 包括偏序集、正交模格、差分偏序集、MV-代数、效应代数和伪效应代数等方面的基本知识. 同时由于广义效应代数与偏序群之间具有紧密的关系, 本章对部分可换半群及广义效应代数的结构进行了研究. 本章的内容主要取自于文献 [2], [4], [41]—[64].

## 1.1 正交模格

本节回忆偏序集、格及正交模格的相关概念和结论, 参见文献 [2], [4], [47], [50], [51], [53].

**定义 1.1.1** 设 $X$ 是非空集, $\leqslant$ 是 $X$ 上的二元关系, 如果

(i) $\leqslant$ 是**自反的**, 即 $x \leqslant x\ (\forall x \in X)$;

(ii) $\leqslant$ 是**传递的**, 即 $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z\ (\forall x,\ y,\ z \in X)$;

(iii) $\leqslant$ 是**反对称的**, 即 $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y\ (\forall x,\ y \in X)$,

则称 $\leqslant$ 为 $X$ 上的**偏序关系**, 称 $(X;\leqslant)$ 为**偏序集**.

在不致引起混淆的情况下, 也把偏序集 $(X;\leqslant)$ 简写为 $X$. 设 $A \subset X$, 若对 $A$ 中任意元 $a$ 和 $b$, 都存在 $c \in A$ 使 $a \leqslant c, b \leqslant c$, 则称 $A$ 为**上定向集**.

**定义 1.1.2**　设 $(X;\leqslant)$ 是偏序集, $A\subset X, a\in X$. $a$ 叫做 $A$ 的**上界**, 若对任意的 $x\in A$, 都有 $x\leqslant a$. 若 $A$ 有一最小上界 $a$, 即 $a$ 是 $A$ 的上界, 且对 $A$ 的任一上界 $b$ 总有 $a\leqslant b$, 则称 $a$ 为 $A$ 的**上确界**, 记作 $a=\sup_X A$. 在不致引起混淆的情况下, 也把 $A$ 的上确界简记作 $\sup A$ 或 $\vee A$. 对偶地, 可以定义 $A$ 的下界与下确界 $\inf_X A$ 或 $\inf A$ (或 $\wedge A$).

若对 $X$ 的任二元 $a$ 与 $b$, $\sup\{a,b\}$ 与 $\inf\{a,b\}$ 恒存在, 则称 $X$ 为**格**, 这时 $\sup\{a,b\}$ 和 $\inf\{a,b\}$ 可分别简记为 $a\vee b$ 与 $a\wedge b$. 一般情况下, 当偏序集 $(X;\leqslant)$ 是格时, 常记为 $(X;\vee,\wedge)$.

**定义 1.1.3**　设 $X$ 是偏序集, 若 $X$ 的每个子集 $A$ 都有上确界及下确界, 即对任意的 $A\subset X, \sup A$ 与 $\inf A$ 恒存在, 则称 $X$ 为**完备格**.

**注 1.1.4**　完备格 $X$ 一定有最大元与最小元, 即 $\sup X$ 与 $\inf X$, 今后把它们分别记为 1 和 0. 完备格 $X$ 的空子集 $\varnothing$ 的上确界和下确界分别为 0 和 1.

**定义 1.1.5**　设 $L$ 是偏序集, $'\colon L\to L$ 是 $L$ 到自身的映射, 如果

(i)$'$ 是对合对应, 即 $(a')'=a$ $(\forall a\in L)$;

(ii)$'$ 是逆序对应, 即 $a\leqslant b$ 蕴涵 $b'\leqslant a'$ $(\forall a,\ b\in L)$,

则称 $'$ 为 $L$ 上的**逆序对合对应**, 简称为**逆合对应**.

**定义 1.1.6**　设 $L_1$ 与 $L_2$ 是完备格, $f: L_1\to L_2$ 是映射.

(i) 如果对 $L_1$ 的任二元 $a$ 与 $b$, $a\leqslant b\Longrightarrow f(a)\leqslant f(b)$, 则称 $f$ 是**保序映射**;

(ii) 如果对 $L_1$ 的任二元 $a$ 与 $b$, $a\leqslant b\Longrightarrow f(b)\leqslant f(a)$, 则称 $f$ 是**逆序映射**;

(iii) 如果对 $L_1$ 的任一子集 $A$, $f(\sup A)=\sup f(A)$ (也常写作 $f(\vee A)=\vee f(A)$), 则称 $f$ 为**保并映射**;

(iv) 如果对 $L_1$ 的任一子集 $A$, $f(\inf A)=\inf f(A)$ (也常写作 $f(\wedge A)=\wedge f(A)$), 则称 $f$ 为**保交映射**.

**定义 1.1.7**　设 $L$ 是完备格. 对任意的 $a,b,c\in L, b_j\in L$, 其中 $j\in J$.

(i) 称

$$a\wedge\left(\bigvee_{j\in J} b_j\right)=\bigvee_{j\in J}(a\wedge b_j)$$

为**第一无限分配律**; 称

$$a\vee\left(\bigwedge_{j\in J} b_j\right)=\bigwedge_{j\in J}(a\vee b_j)$$

为**第二无限分配律**. 可以证明第一无限分配律与第二无限分配律不等价.

(ii) 分配律是指

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

及

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

可以证明这两式等价. 将满足分配律的格称为**分配格**.

**定义 1.1.8** 设 $(P; \leqslant, 0, 1)$ 是有界偏序集, 其中 0 与 1 分别是最小元和最大元. 若 $P$ 上存在逆序对合对应 $' : P \to P$ 满足如下条件:

$$x' \vee x = 1, \quad x' \wedge x = 0,$$

则称 $(P; \leqslant, ', 0, 1)$ 是**正交偏序集**. 这里称 $'$ 为**正交补运算**.

**注 1.1.9** 设 $(P; \leqslant, ', 0, 1)$ 是正交偏序集.

(i) 若 $x \leqslant y'$, 则称 $x$ 与 $y$ **正交**.

(ii) De Morgan 对偶律成立, 即

$$\left(\bigvee_{i\in I} a_i\right)' = \bigwedge_{i\in I} a_i', \quad \left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)' = \bigvee_{i\in I} a_i',$$

只要左边的并与交存在.

**定义 1.1.10** 若正交偏序集 $(P; \leqslant, ', 0, 1)$ 是格, 则称其为**正交格**.

**定义 1.1.11** 若正交格 $(P; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 满足分配律, 则称其为**布尔代数**.

**定义 1.1.12** 若格 $(P; \vee, \wedge, 0, 1)$ 满足模律, 即对任意的 $a, b, c \in P$,

$$\text{若 } a \leqslant b, \text{则 } a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c),$$

则称其为**模格**.

**定义 1.1.13** 若正交格 $(P; \vee, \wedge, 0, 1)$ 满足正交模律, 即对任意的 $a, b \in P$,

$$\text{若 } a \leqslant b, \text{则 } b = a \vee (a \wedge b'),$$

则称其为**正交模格**.

**注 1.1.14** 在正交格中, 分配律 $\Rightarrow$ 模律 $\Rightarrow$ 正交模律. 反之则不成立, 反例见文献 [4].

**定义 1.1.15** 设 $(P; \leqslant, ', 0, 1)$ 是正交格, $x, y \in P$ , 称 $x$ 与 $y$ 是**可交换的**, 若 $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$. 当 $x$ 与 $y$ 可交换时, 记为 $xCy$.

**例 1.1.16** 设 $(P; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是布尔代数, 则对任意的 $x, y \in P$, $xCy$.

**例 1.1.17** 设 $O_6 = \{0, x, y, x', y', 1(=0')\}$ , 且 $0 < x < y < 1$, $0 < y' < x' < 1$, $x \wedge x' = x \wedge y' = y \wedge x' = y \wedge y' = 0$, $x \vee x' = x \vee y' = y \vee x' = y \vee y' = 1$, 则 $O_6$ 是不满足正交模律的正交格.

**注 1.1.18**　在正交格中, 可交换关系 $C$ 不是对称的, 即 $x$ 与 $y$ 是交换的一般不能得到 $y$ 与 $x$ 是交换的. 如例 1.1.17 所示, 在 $O_6$ 中, $xCy$ 成立但是 $yCx$ 不成立. 而正交格 $P$ 中的关系 $C$ 是对称的, 当且仅当 $P$ 是正交模格, 见下面定理.

**定理 1.1.19**　设 $(P;\leqslant,',0,1)$ 是正交格, 则下列各条等价.

(i) $P$ 是正交模格.

(ii) 若 $x\leqslant y$ 且 $y\wedge x'=0$, 则 $x=y$.

(iii) $O_6$ 不是 $P$ 的子代数.

(iv) 若 $x\leqslant y$, 则由 $x,y$ 生成的正交子格 $\Gamma\{x,y\}$ 是 $P$ 的布尔子代数.

(v) $xCy$ 当且仅当 $yCx$.

**证明**　(i) $\Rightarrow$ (ii). 若 $x\leqslant y$ 且 $y\wedge x'=0$, 则由正交模律可知 $y=x\vee(x'\wedge y)=x$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 若 $O_6$ 是 $P$ 的子代数, 则存在 $x\leqslant y\in P$, 且 $y\wedge x'=0$, 但 $x\neq y$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 反设 $x\leqslant y$ 且 $\Gamma\{x,y\}$ 是不满足分配律的. 由 $x\vee(x'\wedge y)=y, y'\vee(x'\wedge y)=x'$ 可知, $\Gamma\{x,y\}=\{0,1,x,x',y,y',x'\wedge y,x\vee y'\}$ 满足分配律, 从而可设 $x\vee(x'\wedge y)\neq y$ . 这样, $\{0,1,x\vee(x'\wedge y),y,y',x'\wedge(x\vee y')\}$ 是同构于 $O_6$ 的子代数.

(iv) $\Rightarrow$ (v). 只需证明由 $xCy$ 可得 $yCx$ . 设 $xCy$ 且 $x=(x\wedge y)\vee(x\wedge y')$, 则 $x'\wedge y=((x'\vee y')\wedge(x'\vee y))\wedge y=(x'\vee y')\wedge y=(x\wedge y)'\wedge y$. 又注意到 $\Gamma\{x\wedge y,y\}$ 是分配子代数, 从而有 $(x\wedge y)\vee(x'\wedge y)=(x\wedge y)\vee((x\wedge y)'\wedge y)=y$, 故有 $yCx$.

(v) $\Rightarrow$ (i). 若 $x\leqslant y$, 则 $x=(x\wedge y)\vee(x\wedge y')$, 从而 $xCy$. 由 (v) 可知 $yCx$, 故 $y=(y\wedge x)\vee(y\wedge x')=x\wedge(x'\wedge y)$. □

**定义 1.1.20**　设 $H$ 是复数域 $C$ 上的线性空间, 若从 $H\times H$ 到 $C$ 定义一个映射 $\langle\cdot\rangle$ 使得对任意的 $x,y,z\in H$, 满足

(i) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$, 其中 $\overline{\langle y,x\rangle}$ 为 $\langle x,y\rangle$ 的共轭复数;

(ii) 对任意的复数 $\alpha,\beta$ 有 $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$;

(iii) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$. $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$,

则称该映射为 $H$ 中的**内积**, 定义了内积的空间称为**内积空间**. 完备的内积空间称为**Hilbert 空间**, 这里的完备指 $H$ 中任意的 Cauchy 列均收敛在 $H$ 中.

**例 1.1.21**　设 $H$ 为 Hilbert 空间, $C(H)$ 为它的闭子空间集, 则 $(C(H);\vee,\wedge,',0,1)$ 是一个完备的正交模格. 定义 $M\wedge N=M\cap N$, 定义 $M\vee N$ 为包含 $M+N$ 的最小的闭子空间. 这里对于 $M,N\in C(H), M+N=\{m+n\mid m\in M,n\in N\}$, $M'=\{x\in H\mid\langle x,y\rangle=0,\forall y\in M\}$.

## 1.2 差分偏序集

本节给出差分偏序集和 BCK 代数的相关概念和基本结论. 所提及的概念和命题参见文献 [2], [16].

Kôpka 和 Chovanec 在文献 [16] 中结合模糊数学与量子逻辑的思想提出了差分偏序集的定义.

**定义 1.2.1** 设 $P$ 是偏序集且 $\ominus$ 是 $P$ 上的部分二元运算. 称代数系统 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是**带差的偏序集**, 对任意的 $a,b,c\in P$, 若 $\ominus$ 满足如下条件:

(D1) $b\ominus a$ 有定义当且仅当 $a\leqslant b$;

(D2) 若 $a\leqslant b$, 则 $b\ominus a\leqslant b$ 且 $b\ominus(b\ominus a)=a$;

(D3) 若 $a\leqslant b\leqslant c$, 则 $c\ominus b\leqslant c\ominus a$ 且 $(c\ominus a)\ominus(c\ominus b)=b\ominus a$.

若 $P$ 是格, 则称 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是**带差的格.**

**例 1.2.2** (1) 设 $N$ 是自然数集, 其上的偏序 $\leqslant$ 为自然数通常的大小关系. 若定义 $N$ 上的部分运算 $\ominus$ 如下: $m,n\in N$, $m\ominus n:=m-n$ 当且仅当 $n\leqslant m$, 其中 $m-n$ 表示通常的自然数的减法, 则 $(N;\leqslant,\ominus)$ 是带差的格.

(2) 设 $P=\{a,b\}$ 是二元集, 其上的偏序 $\leqslant$ 为 $a\leqslant a, b\leqslant b$, $a$ 与 $b$ 不可比较. 若定义 $P$ 上的部分运算 $\ominus$ 如下: $a\ominus a:=a$ 且 $b\ominus b:=b$, 则 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集.

(3) 设 $\mathcal{R}$ 是非空集合 $X$ 上的集环, 即 $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(X)$, 且对任意的 $A,B\in\mathcal{R}$ 总有 $A\cup B\in\mathcal{R}$, $A-B\in\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 上的序 $\leqslant$ 为集合之间的包含关系. 若定义 $\mathcal{R}$ 上的部分运算 $\ominus$ 如下: $A,B\in\mathcal{R}$, $A\ominus B:=A-B$ 当且仅当 $B\leqslant A$, 则 $(\mathcal{R};\leqslant,\ominus)$ 是带差的格.

(4) 设 $[0,1]^X$ 是非空集合 $X$ 上的模糊集, 按点式序 $[0,1]^X$ 是偏序集. 若定义 $[0,1]^X$ 上的部分运算 $\ominus$ 如下: $f,g\in[0,1]^X$, $f\ominus g:=f-g$ 当且仅当 $g\leqslant f$, 则 $([0,1]^X;\leqslant,\ominus)$ 是带差的格.

**定义 1.2.3** 设 $0\in X$, 称代数系统 $(X;*,0)$ 是**BCK 代数**, 若对任意的 $x,y,z\in X$, 二元运算 $*$ 满足下面条件:

(B1) $x*(x*y)=y*(y*x)$;

(B2) $(x*y)*z=(x*z)*y$;

(B3) $x*x=0$;

(B4) $x*0=x$.

**例 1.2.4** 设 $\mathcal{R}$ 是非空集合 $X$ 上的集环. 若定义 $\mathcal{R}$ 上的二元运算 $*$ 如下: $A,B\in\mathcal{R}$, $A*B:=A-B$, 则 $(\mathcal{R};*,\varnothing)$ 是 BCK 代数.

**命题 1.2.5** 设 $(X;*,0)$ 是 BCK 代数. 若对任意的 $x,y\in X$, 定义 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x*y=0$; 且定义 $y\ominus x=y*x$ 当且仅当 $x\leqslant y$, 则 $(X;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集.

**证明** 先证 $\leqslant$ 是 $X$ 上的偏序关系. 由 $x*x=0$ 可知 $x\leqslant x$. 下设 $x\leqslant y,y\leqslant x$, 则 $x*y=y*x=0$. 从而 $x=x*0=x*(x*y)=y*(y*x)=y*0=y$. 若 $x\leqslant y,y\leqslant z$, 则 $x*y=y*z=0$. 从而 $x*z=(x*z)*(x*y)=(x*(x*y))*z=(y*(y*x))*z=(y*z)*(y*x)=(y*y)*(y*x)=(y*(y*x))*y=(x*(x*y))*y=(x*y)*(x*y)=0$. 故有 $x\leqslant z$.

下证 $\ominus$ 满足 (D1), (D2), (D3). 只需证 (D2), (D3). 设 $x\leqslant y$, 则 $y\ominus x=y*x$. 又 $(y*x)*y=(y*y)*x=0*x=(x*x)*(x*0)=(x*(x*0))*x=(0*(0*x))*x=(0*x)*(0*x)=0$. 从而 $y*x\leqslant y$. 因此 $y\ominus(y\ominus x)=y*(y*x)=x$. 对 (D3), 设 $x\leqslant y\leqslant z$, 则 $z\ominus x=z*x$, $z\ominus y=z*y$, $x*y=y*z=x*z=0$. 由于 $(z*y)*(z*x)=(z*(z*x))*y=(x*(x*z))*y=x*y=0$, 从而 $z\ominus y\leqslant z\ominus x$. 进一步, $(z\ominus x)\ominus(z\ominus y)=(z*x)*(z*y)=(z*(z*y))*x=(y*(y*z))*x=y*x=y\ominus x$. □

**命题 1.2.6** 设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集, 对任意的 $a,b,c\in P$, 以下各条均成立.

(i) 若 $a\leqslant b\leqslant c$, 则 $b\ominus a\leqslant c\ominus a$ 且 $(c\ominus a)\ominus(b\ominus a)=c\ominus b$.

(ii) 若 $b\leqslant c,a\leqslant c\ominus b$, 则 $b\leqslant c\ominus a$ 且 $(c\ominus b)\ominus a=(c\ominus a)\ominus b$.

(iii) 若 $a\leqslant b\leqslant c$, 则 $a\leqslant c\ominus(b\ominus a)$ 且 $(c\ominus(b\ominus a))\ominus a=c\ominus b$.

(iv) 若 $a\leqslant c,b\leqslant c$, 则 $c\ominus a=c\ominus b$ 当且仅当 $a=b$.

(v) 若 $d\in P,d\leqslant a,b$, 且 $a,b\leqslant c$, 则 $c\ominus a=b\ominus d$ 当且仅当 $c\ominus b=a\ominus d$.

**证明** 利用定义 1.2.1 可直接证明, 具体过程请读者自己完成. □

**注 1.2.7** 设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集.

(i) $P$ 不一定具有最小元和最大元, 如例 1.2.2(2). 但对任意的 $a\in P$, $a\ominus a$ 是 $P$ 的极小元. 事实上, 若 $b\leqslant a\ominus a$, 则有 $b\leqslant a\leqslant a,b\leqslant b\leqslant a$, 从而 $a\ominus b=(a\ominus b)\ominus(a\ominus a)$, $a\ominus b=(a\ominus b)\ominus(b\ominus b)$. 由此可知 $a\ominus a=b\ominus b\leqslant b$, 故 $a\ominus a=b$.

(ii) 若 $a\leqslant b$, 则 $a\ominus a=b\ominus b$. 事实上, 由 $a\leqslant a\leqslant b$, $a\leqslant b\leqslant b$, 从而 $b\ominus a=(b\ominus a)\ominus(a\ominus a)$, $b\ominus a=(b\ominus a)\ominus(b\ominus b)$, 由命题 1.2.6(iv) 可知 $a\ominus a=b\ominus b$, $a\ominus b=(a\ominus b)\ominus(b\ominus b)$. 由此可知 $a\ominus a=b\ominus b\leqslant b$, 故 $a\ominus a=b$.

(iii) 若 $P$ 具有最大元 1, 则 $1\ominus 1$ 是 $P$ 的最小元. 对任意的 $a\in P$, 由 (ii) 可知 $1\ominus 1=a\ominus a\leqslant a$. 通常将 $P$ 中最小元记为 0.

**定义 1.2.8** 设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集. 若 $P$ 具有最大元 1 (因此具有最小元 0), 则称代数系统 $(P;\leqslant,\ominus,1)$ 是**差分偏序集**.

**注 1.2.9** 设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是差分偏序集. 对任意的 $a\in P$, 称元素 $1\ominus a\in P$ 为 $a$ 的正交补, 常记为 $a'$. 那么可定义 $P$ 上的一元运算 $':P\longrightarrow P$, 对任意的 $a\in P$, $'(a)=a'$. 一元运算 $'$ 是 $P$ 上的逆序对合映射. 对任意的 $a,b\in P$, 若 $a\leqslant b$, 则 $b'=1\ominus b\leqslant 1\ominus a=a'$. 故 $'$ 是逆序的. 又 $a''=1\ominus(1\ominus a)=a$, 从而 $'$ 是对合的. 在差分偏序集中 $a\wedge a'=0$ 一般不成立, 从而差分偏序集不一定是正交偏序集.

**例 1.2.10** 设 $(B;\leqslant,\vee,\wedge,',0,1)$ 是布尔代数. 定义 $B$ 上的部分二元运算 $\ominus$ 如下: 对任意的 $a,b\in B$, $b\ominus a$ 存在当且仅当 $a\leqslant b$, 且 $b\ominus a=b\wedge a'$. 则容易验证 $(B;\leqslant,\ominus,0,1)$ 是差分偏序集.

设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集, 下面的条件 (C) 称为消去律.

(C) 若 $a\leqslant b,c$ 且 $b\ominus a=c\ominus a$ , 则 $b=c$.

在带差的偏序集 $P$ 中消去律不一定成立, 如下例.

**例 1.2.11** 设 $P=\{0,a,b,c\}$ 是偏序集, 这里 $0\leqslant a\leqslant b$, 且 $0\leqslant a\leqslant c$, $b$ 与 $c$ 不可比较大小. 其中 $b\ominus a=c\ominus a$ 且对任意的 $x\in P$, $x\ominus x=0, x\ominus 0=x$. 则容易验证 $(B;\leqslant,\ominus,0,1)$ 是带差的偏序集且不满足消去律 (C).

**定义 1.2.12** 设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集. 若 $P$ 具有最小元 0, 且满足消去律 (C), 则称代数系统 $(P;\leqslant,\ominus,0)$ 是**广义差分偏序集**.

在广义差分偏序集 $P$ 中利用部分二元运算 $\ominus$ 可通过下面的条件 (S) 定义部分二元运算 $\oplus$.

(S) $a\oplus b$ 存在且 $a\oplus b=c$ 当且仅当 $c\ominus b=a$.

事实上, 若 $a\oplus b=c$ 且 $a\oplus b=d$, 则 $c\ominus b=a=d\ominus b$, 利用消去律可知 $c=d$, 从而二元运算 $\oplus$ 是定义好的.

**命题 1.2.13** 设 $(P;\leqslant,\ominus)$ 是带差的偏序集. 若 $P$ 是上定向的, 则 $P$ 满足消去律 (C). 特别地, 当 $P$ 是差分偏序集时, $P$ 也满足条件 (C).

**证明** 设 $a,b,c\in P$, $b\ominus a=c\ominus a$. 由于 $P$ 是上定向的, 存在 $d\in P$, 使得 $b,c\leqslant d$. 从而 $d\ominus b=(d\ominus a)\ominus(b\ominus a)=(d\ominus a)\ominus(c\ominus a)=d\ominus c$, 因此 $b=d\ominus(d\ominus b)=d\ominus(d\ominus c)=c$. □

**命题 1.2.14** 设 $(P;\leqslant,\ominus 0,1)$ 是差分偏序集. 对任意的 $a,b,c\in P$, 则下列各条成立.

(i) $a \oplus b$ 在 $P$ 中存在当且仅当 $a \leqslant b'$ 且 $a \leqslant (a \oplus b)$, $(a \oplus b) \ominus a = b$.

(ii) 若 $a \leqslant b', a \oplus b \leqslant c$, 则 $c \ominus (a \oplus b) = (c \ominus a) \ominus b = (c \ominus b) \ominus a$.

(iii) 若 $a \leqslant b \leqslant c'$, 则 $a \oplus c \leqslant b \oplus c$ 且 $(b \oplus c) \ominus (a \oplus c) = b \ominus a$.

(iv) 若 $a \leqslant b \leqslant c$, 则 $a \oplus (c \ominus b) = c \ominus (b \ominus a)$ 且 $(c \ominus b) \ominus (b \ominus a) = c \ominus a$.

(v) 若 $a \leqslant b$, 则 $b = a \oplus (b \ominus a)$.

(vi) 设 $a \leqslant b', a \leqslant c'$, 则 $a \oplus b = a \oplus c$ 当且仅当 $b = c$.

(vii) 设 $a \leqslant b \leqslant c', c \leqslant d \leqslant a'$, 则 $a \oplus d = b \oplus c$ 当且仅当 $b \ominus a = d \ominus c$.

(viii) 若 $a \leqslant b' \leqslant c'$, 则 $a \oplus (b \ominus c) = (a \oplus b) \ominus c$.

(ix) 若 $c \leqslant a \leqslant b', c \leqslant b$, 则 $(a \ominus c) \oplus (b \ominus c) = ((a \oplus b) \ominus c) \ominus c$.

**证明** 证明留给读者作为练习. □

类似于效应代数的态射, 回忆如下差分偏序集间态射的定义.

**定义 1.2.15** 设 $P, Q$ 是差分偏序集, $f : P \to Q$ 是映射. 称 $f : P \to Q$ 是差分偏序集间的**态射**, 若

(1) $f(0) = 0, f(1) = 1$;

(2) 当 $a, b \in P$ 且 $b \leqslant a$ 时, 有 $f(a \ominus b) = f(a) \ominus f(b)$.

## 1.3 效应代数

为了描述不可精确测量的量子理论, 1994 年, 作为 $\mathcal{E}(H)$ 的推广, Foulis 和 Bennett 在文献 [19] 中引入了效应代数的定义. 事实上, 效应代数与 Kôpka 和 Chovanec 在文献 [15], [16] 中引入的差分偏序集是等价的. 本节内容主要取自文献 [2], [16], [19].

**定义 1.3.1** 设 $E$ 是一个含有特殊元 $0, 1$ 的非空集合 $(0 \neq 1)$ 且 $\oplus$ 是 $E$ 上的部分二元运算. 称代数系统 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是**效应代数**, 对任意的 $p, q, r \in E$, 若 $\oplus$ 满足如下条件.

(Ei) (交换律) 若 $p \oplus q$ 有定义, 则 $q \oplus p$ 有定义且 $p \oplus q = q \oplus p$.

(Eii) (结合律) 若 $q \oplus r$ 和 $p \oplus (q \oplus r)$ 有定义, 则 $p \oplus q$ 和 $(p \oplus q) \oplus r$ 有定义且 $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$.

(Eiii) (正交补律) 任意的 $p \in E$, 存在唯一的 $q \in E$ 使得 $p \oplus q = 1$.

(Eiv) (0-1 律) 若 $a \oplus 1$ 有定义, 则有 $a = 0$.

**注 1.3.2** 设 $E$ 是效应代数, $a, b \in E$.