普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学辅导与提高

（上）

韩天勇　陈　丹　主编

科学出版社

高等数学辅导与提高(上)

主编　韩天勇　陈丹

科学出版社
北　京

内 容 简 介

为了满足学生在学习高等数学过程中对夯实基础与扩展提高的双重要求，我们根据教学大纲、参照研究生入学考试大纲，编写了这本《高等数学辅导与提高》。本书既可单独使用，也可与教材同步使用。希望本书能帮助学生加深对高等数学基本内容的理解，掌握解题的方法、技巧，巩固教学内容，提高分析问题，解决问题的能力。全书按照高等数学知识演绎的自然顺序分节编写，主要有主要内容、疑难解析、典型例题和综合与提高四个板块，板块之间知识点由粗到细、由浅到深排列，其中典型例题主要处理常见基础知识题目，而综合与提高选题多来自数学建模、数学竞赛和研究生入学考试题目，旨在帮助读者在牢固掌握基础知识的同时扩展眼界、提高解题能力。

本书适合大学理工科学生学习高等数学时参考使用，也可作为教师参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导与提高. 上 / 韩天勇，陈丹主编. —北京：科学出版社，2017.9

ISBN 978-7-03-054621-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①韩… ②陈… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 234982 号

责任编辑：冯 铂 / 责任校对：韩雨舟
封面设计：墨创文化 / 责任印制：罗 科

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2017年9月第一次印刷 印张：15.75
字数：450 千字

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

高等数学辅导与提高(上)
编委会

前　言

本书《高等数学辅导与提高》是教材《高等数学》的同步辅导材料，分上、下两册，上册包含一元微积分学和常微分方程，下册包含级数、空间解析几何和多元微积分学．本书可以作为普通高等学校理工科高等数学课程教材、日常教学参考书，也可以作为研究生入学考试的辅导资料．

本系列教材的编写立足于基础与应用并重，着重介绍数学的思想和方法，注重扩展几何背景和实际应用，适当渗透现代数学思想和人文素养，能较好地服务于二本院校实现培养高素质应用型人才的目标．

随着高校教育各项改革的推进，二本院校《高等数学》教学的特点日益清晰：既要满足学生日常学习的要求，又要满足部分学生毕业继续考研深造的需求．因此学生既要掌握必要的方法和解题技巧，也要较全面地了解各主要板块的知识．本辅导书汲取国内外众多优秀教材的长处，融入编者多年的教学经验，以提高学生的综合数学能力，培养学生的数学文化素养为宗旨，形成如下特色：本系列教材突出了考研能力的培养，为学生进一步深造创造了条件；突出了数学思想和文化的特色，在激发学生学习数学的热情和兴趣，以及调动学生学习数学的积极性和主动性的同时，又对学生进行了数学文化和人文素质的熏陶．

基于此，结合这几年配合教材使用的经验，保持并升华了传统教材的主要风格：

（1）突出数学建模能力和数学基础知识应用能力的培养．

（2）突出“分层教学”的教学策略的支撑．所谓“分层教学”是指对基础不同的学生实施不同教学方法，不同教学内容的教学策略，目前已在多数高等院校实施．配套资料《高等数学辅导与提高》的“典型例题”部分结合教材习题并辅以经典习题，着重从方法上引导学生掌握本节主要知识，而“综合与提高”部分引入或改编了考研、数学竞赛、数学建模等方面的题目．

（3）注重介绍数学思想和数学方法．学习高等数学，需要在掌握数学知识的同时，使自己的心理和智力受到引导启迪，一个人若是在文化素养中缺少了数学素质就是“文化缺钙”，无论在什么岗位上，数学文化修养已不是一种时髦，而是一种工作、学习和人际交往中的一种实在需要．作为本书的特色之一，“综合提高”把考研和竞赛等综合题目与本节具体知识点联系起来，这样既起到丰富课堂的效果，又为学生扩展知识面做出了指引，并引导学生从案例中获取模式的思想方法．

本次编写工作由韩天勇、陈丹担任主编，负责协调工作，韩天勇负责全书统稿工作．本书分别由韩天勇、胡旭东、邹全春、叶建华编写第 1 章至第 4 章，第 5 章由张坤和王晋编写，而第 6 和第 7 章分别由杨洪和陈丹编写．

本系列教材编写工作之所以能够如此顺利地推进，得益于成都大学信息科学与工程学院各级领导的支持和帮助，以及杨晋浩、罗钊、张勇、高朝邦、宋敏、王伟钧、施达及多位相关同志对教材修订给出的诸多有益建议，在此一并感谢.

本教材虽然凝结了编者多年来高等数学教学的经验，以及对数学科学的感悟，但由于时间仓促，编者水平有限，教材中难免有不尽人意之处，敬请读者不吝指教.

编　者

2017 年 9 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

1.1　函　　数

1.1.1　主要内容

1. 实数及其性质

实数的有关概念；绝对值的定义；绝对值的性质.

2. 集合和区间

集合的概念；集合的表示；集合之间的关系；集合的基本运算；区间；邻域.

3. 函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型. 函数的定义、函数的图形、函数的表示法.

确定函数的两要素：对应法则，定义域.

定义域：规定用算式表示的函数的定义域是使算式有意义的 x 的全体. 若函数有实际意义，定义域由实际问题确定.

4. 函数的几种特性

有界性、单调性、奇偶性和周期性.

5. 反函数与复合函数

反函数：反函数的概念；函数存在反函数的条件；在同一个坐标平面内，直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

复合函数：设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 I_φ，若 $D_f\cap I_\varphi\neq\varnothing$，则称 y 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

注：条件 $D_f\cap I_\varphi\neq\varnothing$ 是重要的，该条件指出了并不是任意两个函数都能复合.

6. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数：幂函数；指数函数；对数函数；三角函数；反三角函数及常数函数.

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

初等函数的基本特征：在函数有定义的区间内，初等函数的图形是不间断的.

7. 分段函数

在函数的定义域的不同范围内要用不同的式子来表示对应关系的函数称为分段函数.

8. 曲线及其表示方法

曲线的复杂性导致了其表示方法的多样性.常用的表示方法有函数法、隐函数法、参数方程法和极坐标法.其中参数方程和极坐标在几何和物理中有着广泛的应用.

9. 函数关系的建立

为解决实际应用问题，首先要将该问题量化，从而建立起该问题的数学模型，即建立函数关系.

1.1.2 疑难解析

1. 邻域与去心邻域有何区别?

答 点 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)$ 是一个完整的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$，即 $U(a,\ \delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$，用不等式表示为 $a-\delta<x<a+\delta$；

点的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(a,\ \delta)$ 仅为 $U(a,\ \delta)$ 去掉邻域的中心一点即 $x\neq a$，其他都相同，它是两个子开区间(点的左右邻域)的并集：$(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)$. 用不等式表示为 $a-\delta<x<a$ 或 $a<x<a+\delta$；用集合表示为 $\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$.

2. 确定函数定义域有哪些方法?

答 常用如下几种方法通过解不等式(或不等式组)确定函数的定义域.

(1) 分式函数，其分母不等于零;

(2) 偶次根式下的函数，被 a 开方式的值非负;

(3) 对数函数，其真数大于零，底数大于零且不等于 1;

(4) 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是其直接函数 $y=f(x)$ 的值域;

(5) 由四则运算所构成的函数的定义域是各成员函数定义域的交集;

(6) 分段函数的定义域是其各段函数定义域的并集;

(7) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是内函数(中间变量) $u=\varphi(x)$ 定义域的子集，在此基础上内函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值，还必属于外函数 $y=f(u)$ 的定义域;

(8) 应用问题中函数的定义域，是该函数的解析表达式自然定义域的子集，此子集为兼顾实际意义的限制条件与自然定义域的交集.

3. 如果函数 $f(x)$ 在某有限区间 I 上的每一点都有定义(有有限的函数值)，能否断言该函数在上一定有界?

答 不能. 如 $y=\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,1)$，显然当 $x\in(0,1)$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 有定义；但当 x 充分接近于 0 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 可以取任意大的值，它无界. 例如，要使得 $y>10000$，只需取 $0<x<0.0001$ 即可.

4. 在复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义中，要求内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域非空，且全部或部分包含在外函数 $y=f(u)$ 的定义域内.为什么要附加这些限制条件?

答 因为不是任何两个函 I 数都能构成复合函数，只有当 $x\in D_1$，$D_1\subset D$，且通过中间变量 $u=\varphi(x)$ 使 y 有确定的值与之对应时，才可以构成以 D_1 为定义域的复合函数；而当

$\varphi(D_1)=\varnothing$ 或 $\varphi(D_1)\cap E=\varnothing$（$E$ 为 $f(u)$ 的定义域），这时不能通过 u 使 y 有确定的值与 $x\in D$ 相对应，就不能构成复合函数. 例如

$$\begin{cases}u=\sqrt{-x^2}\,(x\neq 0),\\ y=u^2\end{cases}\qquad \begin{cases}u=x^2+2(x\in\mathbf{R}),\\ y=\arcsin u(|u|\leqslant 1)\end{cases}$$ 都不能构成复合函数.

又如 $y=\ln u(u>0)$，$u=x-1(x\in\mathbf{R})$ 虽然能构成复合函数 $y=\ln(x-1)$，$x\in(1,+\infty)$，但它的定义域比内、外函数的定义域都要小.

5. 参数方程与普通方程的区别与联系

答　在求曲线方程时，一般都需要建立曲线上的动点 $P(x、y)$ 的坐标，x、y 之间满足等量关系 $F(x,y)=0$，这样得到方程 $F(x,y)=0$ 就是曲线的普通方程；若引入中间变量 t，使之与曲线上的动点 P 的坐标 x，y 间接地联系起来，就得到方程组 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$，叫做曲线 C 的参数方程，其中的 t 称为参数.

显然，参数方程与普通方程最明显的区别是方程形式上的区别，更大的区别是普通方程反应了曲线上任一点坐标 x，y 的直接关系，而参数方程则反映 x，y 的间接关系.

参数方程与普通方程之间有着密切的联系，表现在两方面：①它们都是同一曲线不同的代数表现形式；②这两种方程之间可以进行互化，通过消参可以把参数方程化为普通方程，而通过引入参数也可把普通方程化为参数方程. 需要注意的是，在将两种方程互化的过程中，要注意两种方程(在表示同一曲线的)的等价性.

实质上，参数方程的思想方法是在运动变化的哲学思想指导下的函数的思想方法，因此也可认为引入参数就是引入函数的自变量. 参数法在求曲线的轨迹方程、最值以及某系物理问题时是一种常用的甚至是简捷的解题方法.

1.1.3　典型例题

例 1　求下列函数的定义域，用不等式或区间表示定义域.

(1) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{3-x}}$　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$　　(3) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$

分析　用算式表示的函数的定义域是使算式有意义的 x 的全体. 若函数有实际意义，定义域由实际问题确定.

解 (1) $\begin{cases}x+2>0\\ 3-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2\\ x<3\end{cases}\Rightarrow -2<x<3$；

(2) $\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\\ 25-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 6\\ -5<x<5\end{cases}\Rightarrow -4\leqslant x<5$；

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, |x|\leqslant 1\\ x^2-1, 1<|x|\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^2-1, 1<x\leqslant 2 \text{或} -2\leqslant x<-1\end{cases}\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$.

例 2 证明定义在 **R** 上的任何函数都可以表示为奇函数与偶函数之和.

证明 设 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的任一函数，则 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

而 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{f(-x)+f[-(-x)]}{2}$ 为偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-\dfrac{f(-x)-f[-(-x)]}{2}$ 为奇函数，得证.

例 3 已知 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^3,0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x,1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\varphi(x)$.

分析 利用函数表示法与用什么字母无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式，一般是用变量代换法.

解 设 $x+1=t\Rightarrow x=t-1$，

则 $\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^3,\ 0\leqslant t-1\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2(t-1),\ 1<t-1\leqslant 2\Rightarrow 2<t\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^3,\ 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1),\ 2<x\leqslant 3\end{cases}$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$和$g[f(x)]$.

解 因为当 $|\mathrm{e}^x|<1$ 时，$x<0$；当 $|\mathrm{e}^x|=1$ 时，$x=0$；当 $|\mathrm{e}^x|>1$ 时，$x>0$

故 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$.

类似可得，$g[f(x)]=\begin{cases}g(1), & |x|<1\\ g(0), & |x|=1\\ g(-1), & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^1, & |x|<1\\ \mathrm{e}^0, & |x|=1\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1\end{cases}$.

注：将两个或两个以上的函数进行复合，可用代入法或分析法.

代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代而构成复合函数的方法. 主要适用于初等函数的复合.

分析法：即根据最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法. 主要适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

例 5 求直角坐标方程 $x^2+y^2=x+\sqrt{x^2+y^2}$ 的极坐标方程.

解 利用直角坐标系与极坐标系的联系公式，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代入原方程并化简得

$$r=1+\cos\theta .$$

1.1.4 综合提高

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & x\leqslant -1\\ x^3, & x>-1\end{cases}$. 试求：

(1) $f[f(x)]$ (2) $f[g(x)]$ (3) $g[f(x)]$ (4) $g[g(x)]$

解 (1) 因为 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，所以 $f(1)=1$，$f(0)=1$，

$$f[f(x)]=\begin{cases}f(1), & |f(x)|\leqslant 1\\ f(0), & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}=1.$$

(2) 因为 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & x\leqslant -1\\ x^3, & x>-1\end{cases}$，

又 $\begin{cases}x>-1\\ |x^3|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -1<x\leqslant 1$，$\begin{cases}x>-1\\ |x^3|>1\end{cases}\Rightarrow x>1$，$\begin{cases}x\leqslant -1\\ |2-x^2|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$，$\begin{cases}x\leqslant -1\\ |2-x^2|>1\end{cases}\Rightarrow$

$x<-\sqrt{3}$, 故 $f[g(x)]=\begin{cases}f(2-x^2), & x\leqslant -1\\ f(x^3), & x>-1\end{cases}=\begin{cases}1, & -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x<-\sqrt{3}\text{或}x>1.\end{cases}$

(3) $g[f(x)]=\begin{cases}g(1), & |x|\leqslant 1\\ g(0), & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1^3, & |x|\leqslant 1\\ 0^3, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

(4) 因为 $\begin{cases}2-x^2\leqslant -1, & x\leqslant -1\\ \text{或}x^3\leqslant -1, & x>1\end{cases}\Rightarrow x\leqslant -\sqrt{3}$，$\begin{cases}x^3>-1, & x>-1\\ \text{或}2-x^2>-1, & x\leqslant -1\end{cases}\Rightarrow -\sqrt{3}<x\leqslant -1$，或 $x>1$

$$\text{所以 } g[g(x)]=\begin{cases}g(2-x^2), & x\leqslant -1\\ g(x^3), & x>-1\end{cases}=\begin{cases}2-\left(2-x^2\right)^2, & x\leqslant -\sqrt{3}\\ (2-x^2)^3, & -\sqrt{3}<x\leqslant -1.\\ x^9, & x>-1\end{cases}$$

例 2 证明关于取整函数设 $y=[x]$ 的下述不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$； (2) 当 $x<0$ 时，$1\leqslant x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1-x$.

证明 (1) 因为 $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$，所以当 $x>0\Rightarrow 1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$，

(2) 因为 $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$，所以当 $x\leqslant 0\Rightarrow 1\leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$.

例 3 设函数 $f(x)$ 满足 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant(x_2-x_1)^2$, 对任意 x_1, $x_2\in\mathbf{R}$. 证明：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是常数.

证明 不妨设 $x_1<x_2$，在 x_1, x_2 之间插入分点 x_{11}, x_{12},⋯, $x_{1(n-1)}$，将区间 $[x_1, x_2]$ n 等分，

$\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(x_{11})|+|f(x_{11})-f(x_{12})|+\cdots+|f(x_{1(n-1)})-f(x_2)|$,