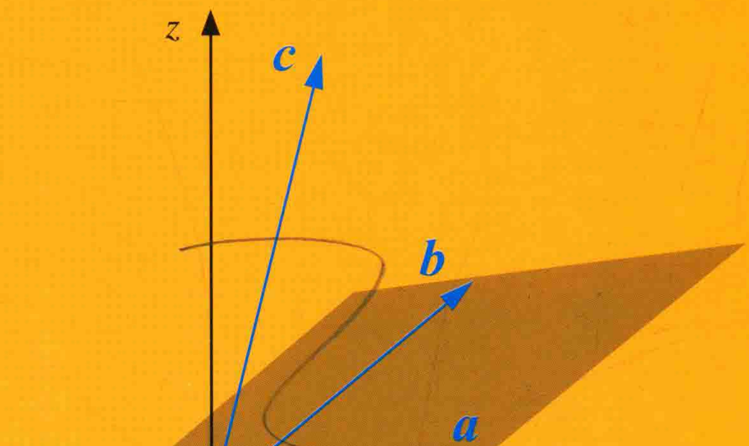
线性代数

陈小松　主编



清华大学出版社

线性代数

陈小松　主编
刘莹　梁鑫　王宇　张夏　参编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是为高等院校非数学类专业编写的线性代数教材.包含行列式、线性方程组、矩阵、二次型、向量空间与线性变换共5章内容.在注重强化基础知识及其训练的同时,兼顾应用以及与数学软件的结合,内容精炼,重点突出.每章最后一节也可以作为学生自主研学的内容,对培养学生主动学习的能力大有益处.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈小松主编.—北京:清华大学出版社,2017
ISBN 978-7-302-48062-4

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第205816号

责任编辑:刘　颖
封面设计:傅瑞学
责任校对:赵丽敏
责任印制:杨　艳

出版发行:清华大学出版社
　　网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
　　地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
　　社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
　　投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:清华大学印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×230mm　　**印　　张**:9.25　　**字　　数**:203千字
版　　次:2017年9月第1版　　**印　　次**:2017年9月第1次印刷
印　　数:1～2000
定　　价:22.00元

产品编号:076973-01

序

PREFACE

线性代数所包含的教学内容在大学理科和工科专业都是重要的基础. 教材所包含的知识和方法不仅在学生学习过程中起着重要的作用,而且在科学和生产实践中有着广泛的应用. 这本《线性代数》教材,在结构和内容上有如下安排：一是注意继承名优教材的优点,内容安排顺序要自然,循序渐进,由浅入深；二是教学的同时也简单扼要地交代历史,问题的来源和发展,强化“问题驱动”的教学思想；三是注重教学内容的应用,将数学建模训练融入到教材里,可以作为学生自主研学及数学建模训练的辅助材料,也增补了供学生考研训练的进阶题；四是在涵盖线性代数的基本内容的同时,适当地扩充了一些内容,可以根据教学专业的特点和学时,选择适当的内容教学；教材还提供了名词索引,便于教师和学生查阅.

本教材曾在部分理科专业试用,取得了良好的教学效果. 这次为适合普通高校其他专业学习,广东东软学院教师刘莹、梁鑫、王宇、张夏参加了对教材内容的增补修改和重新写作,李日华教授也对教材修改提出了很多有益的建议. 在考虑教材内容要尽可能严谨和完整的同时,又要考虑对某些专业教学的实际情况,对一些较难的定理加了星号并用小字编排,可以根据专业和学时的情况,适当选择教学内容. 例如,教学计划为 56 学时的,可以讲完全部内容,教学计划为 40～48 学时的,可以选择除星号部分的内容,或者省略部分定理的证明. 教材提供了配套的教学课件,可发邮件到我邮箱 xschen@csu. edu. cn 索取. 教材可能还会存在一些需要改进的地方,若在教学过程中发现问题,也请发到我的邮箱,我们会对问题进行分析,以便再版时完善.

陈小松

2017 年 5 月

目录

CONTENTS

第1章
CHAPTER 1

行 列 式

1.1 行列式的引入

行列式的概念最早出现在解线性方程组的过程中. 17 世纪晚期,日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨已经各自独立在著作中使用行列式来确定线性方程组解的情况以及形式,莱布尼茨对行列式的研究成果中已经包括了行列式的展开和克莱姆法则. 18 世纪开始,行列式开始作为独立的数学概念被研究. 19 世纪以后,行列式理论进一步得到发展和完善. 行列式在许多领域都逐渐显现出重要的意义和作用.

行列式有一定的计算规则,利用行列式可以把一个线性方程组的解表示成公式,因此行列式是解线性方程组的工具. 下面将会看到,行列式是一些数的乘积的代数和,也就是说行列式代表一个数.

对于二元线性方程组,可以用消元法求解:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (1.2) \end{cases}$$

$(1.1)\times a_{22}$: $a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$,

$(1.2)\times a_{12}$: $a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}$,

两式相减消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

我们称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二级行列式,并用符号表示为

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,原线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

在三元线性方程组求解时有类似的结果,即线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的未知量的系数的代数式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

用符号表示为

$$d\overset{\text{def}}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为三级行列式. 当 $d\neq 0$ 时(d 的计算可用下一节介绍的方法),线性方程组有唯一解,$x_1=\dfrac{d_1}{d}, x_2=\dfrac{d_2}{d}, x_3=\dfrac{d_3}{d}$,其中

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

在自然科学与工程技术中,我们会碰到多个未知数的线性方程组,如 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.3}$$

它的解是否也有类似的结论呢？为此,我们首先要给出 n 级行列式的定义并讨论它的性质和计算方法,最后讨论线性方程组(1.3)在什么情况下有解？有解时如何表示此解.

为了在下面课程里讨论起来严谨和方便,需要引入数域的概念.

数是数学中一个最基本的概念,随着人们对客观世界的认识的不断深入,使得数经历了由自然数到整数、有理数、实数,再到复数这样一个发展过程. 通常我们用$\mathbb{N}$表示自然数集合,用$\mathbb{Z}^+$表示正整数集合,用$\mathbb{Z}$表示整数集合,用$\mathbb{Q}$表示有理数集合,用$\mathbb{R}$表示实数集合,用$\mathbb{C}$表示复数集合.

若数集 S 中任意两个数作某一运算的结果仍在 S 中,则称数集 S 对这一运算是封闭的.

扩张数范围的主要原因是由于要求某些运算封闭或方程求解. 任意两个整数进行加、减、乘法运算后仍然是整数,但任意两个整数的商不一定是整数,这就是说,限制在整数的范

围内,除法不是普遍可以做的,而在有理数范围、实数范围及复数范围,只要除数不为零,除法是可以做的,它们有很多共同的性质,为了在今后讨论中能够把它们关于加、减、乘、除运算的共同性质统一起来,我们引入一个一般的概念——数域.

定义 1.1 设 F 是由一些复数组成的集合,其中包含 0 与 1. 如果 F 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为 0)仍是 F 中的数,则称 F 为一个**数域**.

例 1.1 证明:全体有理数的集合$\mathbb{Q}$是一个数域.

证明 显然 $0,1\in\mathbb{Q}$. 又对 $\forall a,b\in\mathbb{Q}$,有 $a+b\in\mathbb{Q}$,$a\cdot b\in\mathbb{Q}$,当 $b\neq 0$ 时,$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$. 所以,$\mathbb{Q}$为数域.

例 1.2 任意数域 F 都包括有理数域$\mathbb{Q}$,即有理数域是最小数域.

证明 设 F 为任一数域. 由定义可知,$0\in F$,$1\in F$. 于是有

$$\forall m\in\mathbb{Z}^{+},\quad m=1+1+\cdots+1\in F,$$

即 F 包含全体自然数. 又

$$\forall m,\quad n\in\mathbb{Z}^{+},\quad \frac{m}{n}\in F,\quad -\frac{m}{n}=0-\frac{m}{n}\in F.$$

而任意一个有理数可表示成两个整数的商,所以,$\mathbb{Q}\subseteq F$.

从这一节开始,我们总是取定一个固定的数域 F,所谈到的数都是指这个数域 F 中的数,所考虑的行列式也都是数域 F 上的行列式.

提问:实数集$\mathbb{R}$,复数集$\mathbb{C}$,整数集$\mathbb{Z}$,哪些是数域?

1.2 排列

为了定义 n 级行列式,也就是如何决定 n 级行列式每一项的符号,先来讨论一下排列的性质.

定义 1.2 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**.

例如,1324 是一个 4 级排列.

所有不同 n 级排列的总数是 $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)n=\mathrm{P}_n$. 例如所有的 3 级排列是 123,132,213,231,312,321,共 3! 个.

$12\cdots n$ 也是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,称为自然排列,其他排列都会破坏自然顺序.

定义 1.3 在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小次序相反,即前面的数大于后面的数,则称这对数为一个**逆序**;一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例 1.3 求排列 31542 的逆序数.

解 3 排在首位,逆序数为 0;1 的前面比 1 大的数有一个数 3,故逆序数为 1;5 是最大

数，逆序数为 0；4 的前面比 4 大的数有一个数 5，故逆序数为 1；2 的前面比 2 大的数有三个数 3,5,4，故逆序数为 3.

故这个排列的逆序数 $\tau(31542)=0+1+0+1+3=5$.

一般 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_2$ 前面比 j_2 大的数的个数 $+j_3$ 前面比 j_3 大的数的个数 $+\cdots+j_n$ 前面比 j_n 大的数的个数.

定义 1.4 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

排列 $123\cdots n$ 的逆序数为 0，所以是偶排列. 排列 31542 的逆序数为 5，所以是奇排列.

定义 1.5 一个排列中把某两个数的位置互换，而其余的数不动，得到另一个排列，这一变换称为一个**对换**.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

定理 1.1 说明经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列. 例如，$2413\xrightarrow{(12)}1423$，奇排列变成了偶排列，这里(12)表示 1 与 2 对换.

* **证明** (1) 作相邻对换，也就是将相邻两个元素对调. 设排列为

$$a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m \xrightarrow{(ab)} a_1\cdots a_l b a b_1\cdots b_m$$

这时 a,b 与其他数构成的逆序不变.

当 $a<b$ 时，经对换后，ba 构成逆序，逆序增加 1 个，当 $a>b$ 时，经对换后，ab 不再构成逆序，逆序减少 1 个. 因此对换相邻两个元素，改变排列的奇偶性.

(2) 一般情形，设排列为 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$，现来对换 a 与 b

$$a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n \xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$$

一共进行了 $2m+1$ 次相邻对换，改变排列的奇偶性.

* **推论 1.1** 所有 n 级排列中，奇、偶排列各半，均为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设在全部 n 级排列中，有 s 个奇排列，t 个偶排列，下面证明 $s=t$.

将 s 个奇排列的前两个数对换，则这 s 个奇排列全变成偶排列，并且它们彼此不同，因此得 $s\leqslant t$.

同理，将 t 个偶排列的前两个数对换，则这 t 个偶排列全变成奇排列，并且它们彼此不同，得 $t\leqslant s$.

故 $s=t=\frac{n!}{2}$.

* **定理 1.2** 任意一个排列与自然排列 $123\cdots n$ 都可经过一系列对换互换，并且所作对换的次数与这个排列的奇偶性相同.

例如，$2413\xrightarrow{(12)}1423\xrightarrow{(24)}1243\xrightarrow{(34)}1234$.

* **证明** 对排列的级数 n 用数学归纳法.

$n=1,2$ 时，结论显然成立. 假定结论对 $n-1$ 成立. 对于 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$，当 $j_n\neq n$ 时，对换 j_n,n，由归

纳假定，$j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经过一系列对换互换成 $123\cdots(n-1)$，因此 $j_1j_2\cdots j_{n-1}n$ 可经过一系列对换互换变成 $123\cdots(n-1)n$. 类似地，对 $123\cdots n$ 按相反的次序实施这些对换就变成了 $j_1j_2\cdots j_n$.

由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列逆序数为 0 是偶排列，因此结论成立.

1.3 n 级行列式

在给出 n 级行列式的定义之前，先来看一下二级和三级行列式的定义.

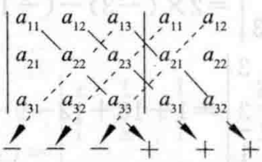
二级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

式中的 6 项是按下面所示的方法得到的



其计算法则称为沙路法或对角线法，即主对角线（左上到右下）及与之平行的对角线元素的乘积之和减去副对角线（右上到左下）及与之平行的对角线元素的乘积之和.

4 级及 4 级以上行列式不遵循此规则.

但是我们可以注意到二级和三级行列式的定义式的每一项都取自行列式的不同行、不同列，二级行列式有 2! ＝2 项，三级行列式有 3! ＝6 项. 在三级行列式的展开式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 中，当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时此项前面的符号为正，当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时此项前面的符号为负. 二级行列式中各项的符号也符合这个规律.

定义 1.6　n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的排列. (1.4)式中的每一项都按下列规则带有符号：

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时该项带正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时该项带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列求和.

行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

常简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，其中的数 a_{ij} 称为行列式 d 处于第 i 行第 j 列的元素，i 称为行指标，j 称为列指标. 不难看出，由 n 级行列式的定义，不同行不同列的元素乘积共有 $n!$ 项. 当行列式的元素都属于数域 F 时，这个行列式的值也属于 F.

例 1.4　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-3)-(-1)\times 4=-2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+18+12-9-4-6=12.$$

例 1.5　注意到行列式的展开式中某一项若有一个元素为零，则这一项为零. 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 24;$$

$$\begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & 4 & & & \\ & 5 & & & & \\ 6 & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(654321)} a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61} = -6! = -720;$$

$$\begin{vmatrix} & & & d_1 \\ & & d_2 & \\ & \iddots & & \\ d_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1d_2\cdots d_n.$$

一般地,有

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n,$$

称为**对角形行列式**;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

称为**上三角形行列式**;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

称为**下三角形行列式**.

例 1.6 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix},$$

求 x^3 的系数.

解 由 n 级行列式定义,$f(x)$是一个 x 的多项式函数,且最高次幂为 x^3,显然含 x^3 的项有两项:

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \quad 与 \quad (-1)^{\tau(1243)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43},$$

即 x^3 与 $-2x^3$,所以,$f(x)$中 x^3 的系数为-1.

例 1.7 在 4 级行列式中,$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$应带什么符号?

解 因为 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$,而 4123 的逆序数 $\tau(4123)=0+1+1+1=3$,或者直接计算 $\tau(2314)+\tau(1243)=2+1=3$,所以 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$的前面应带负号.

定义 1.6′ n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

这里 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

这个和式也叫做 **n 级行列式的等价定义.**

行列式两种定义等价的证明：在 n 级行列式的定义中，我们把 n 个元素按照行指标的自然顺序排列起来，即 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. 由于数的乘法满足交换律，所以这 n 个元素顺序可以任意改变，可以交换 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 书写顺序为 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$，这里 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 这时在自然排列 $12\cdots n$ 变成 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的同时，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 就变成了 $12\cdots n$. 因为行指标和列指标进行了相同次对换，也就是行指标和列指标一起进行了偶数次对换，所以这项前面的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(12\cdots n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)},$$

这就是说 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的一项是 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 的一项. 反过来也一样. 因此行列式两种定义等价.

设

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式 d 的行列互换得到的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 d 的**转置**，记作 d'.

由此可得下面的结论.

定理 1.3 行列互换，行列式不变，即

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = d'.$$

证明 记 $d' = \det(b_{ij})$，其中 $b_{ij} = a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式的定义，有

$$\begin{aligned} d' &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \cdots b_{ni_n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \end{aligned}$$

另一方面，按行列式的等价定义 d 可表示成

$$d = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

所以 $d' = d$.

1.4 行列式的性质

行列式的计算是一件很麻烦的事情. n 级行列式一共有 $n!$ 项,计算它就需做 $n!\,(n-1)$ 个乘法,当 n 较大时,$n!$ 是一个相当大的数字,直接从定义来计算行列式几乎不可能,因此我们有必要讨论行列式的性质,并利用这些性质来化简行列式的计算.

定理 1.4 交换行列式中两行(或两列),行列式反号.

证明 给定行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换 d 的第 i 行和第 k 行,得到行列式

$$d_1=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{n2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ k. \\ \\ \\ \end{array}$$

d 的每一项可以写成 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$. 因为这项的元素位于 d_1 的不同的行与不同的列,所以它也是 d_1 的一项;反过来,d_1 的每一项也是 d 的一项,并且 d 的不同项对应着 d_1 的不同项. 因此 d 与 d_1 含有相同的项.

$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 在 d 中的符号是$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}$,而在 d_1 中,原行列式的第 i 行变成第 k 行,第 k 行变成第 i 行,而列的次序并没有改变,注意到 $\tau(1\cdots k\cdots i\cdots n)$ 是一奇数,$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 在 d_1 中的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)+\tau(1\cdots k\cdots i\cdots n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)+1},$$

因此这一项在 d 和 d_1 中的符号相反,所以 d 与 d_1 的符号相反.

推论 1.2 如果行列式中有两行(列)相同,那么行列式为 0.

证明 交换行列式 d 中这相同的两行,由定理 1.4,$d=-d$,所以 $d=0$.

在行列式的定义中,虽然每一项都是 n 个元素的乘积,但是由于这 n 个元素是取自不同的行与列,所以对于某一确定的行中 n 个元素如 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 来说,每一项都含有其中的一

个且只含有其中的一个元素，因此，n 级行列式的 $n!$ 项可以分成 n 组，第一组的项都含有 a_{i1}，第二组的项都含有 a_{i2}，……，第 n 组的项都含有 a_{in}. 再分别把 i 行的元素提出来，就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.5}$$

这里 A_{ij} 代表那些含有 a_{ij} 的项在提出公因数 a_{ij} 后的代数和.

定理 1.5　如果行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，则行列式可按此行(列)拆成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　设这一行是第 i 行，于是

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (a_1+b_1)A_{i1} + (a_2+b_2)A_{i2} + \cdots + (a_n+b_n)A_{in} \\ &= a_1A_{i1} + a_2A_{i2} + \cdots + a_nA_{in} + b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

定理 1.5 的结果可以推广到多个数之和的情况，即：如果行列式的某一行(列)的元素都是 k 个数之和，则行列式可按此行(列)拆成 k 个行列式之和.

下面我们来看看，(1.5)式中这些 A_{ij} 由什么构成.

考察三级行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

可见,三级行列式可通过二级行列式来表示.

定义 1.7 在 n 级行列式 $\det(a_{ij})$ 中将元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去,剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原位置次序构成一个 $n-1$ 级的行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**. 令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

引理 1.1 若 n 级行列式 $d=\det(a_{ij})$ 中的第 i 行除 a_{ij} 外其余元素都为 0,则 $d=a_{ij}A_{ij}$.

证明 先证 $a_{ij}=a_{nn}$ 的情形,即

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义,有

$$\begin{aligned} d &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_{n-1}n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1}n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn} \\ &= a_{nn}\sum_{j_1\cdots j_{n-1}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1})} a_{1j_1}\cdots a_{n-1,j_{n-1}} \\ &= a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = a_{nn}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}. \end{aligned}$$

结论成立.

对于一般情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$